

Mathematik IV für Physiker*

Sommersemester 2015

Stefan Teufel
Mathematisches Institut
Uni Tübingen

13. Juli 2015

*Diese vorläufige Version des Skriptums ist nur zum Gebrauch parallel zum Besuch der Vorlesung gedacht. Das Studium des Skripts kann den Besuch der Vorlesung **nicht** ersetzen! Falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir diese (auch die offensichtlichen) bitte mit!

Inhaltsverzeichnis

1	Abstrakte Maß- und Integrationstheorie	1
1.1	Das Inhaltsproblem	2
1.2	Grundzüge der Maßtheorie	3
1.3	Das Lebesgueintegral	9
2	Die L^p-Räume	19
3	Produktmaße und der Satz von Fubini	27
4	Die Transformationsformel	31
5	Integration auf Untermannigfaltigkeiten	39
6	Der Divergenzsatz von Gauß	49
7	Differentialformen	57
8	Der Satz von Stokes	71

1 Abstrakte Maß- und Integrationstheorie

Grundideen:

(a) Das Regel- bzw. Riemannintegral

Zerlege die Urbildmenge („ x -Achse“) in endlich viele Intervalle $[a_i, a_{i+1})$ und approximiere die zu integrierende Funktion f durch **Treppenfunktionen**

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{[a_i, a_{i+1})}(x),$$

wobei für $A \subset \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion der Menge A gegeben ist durch

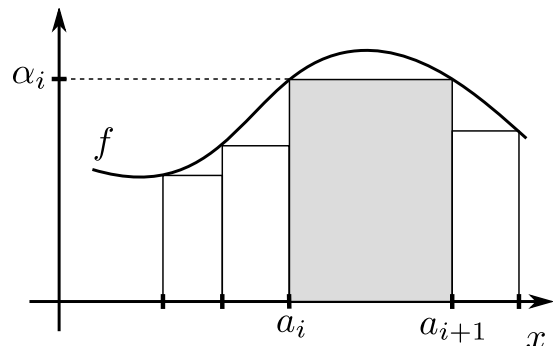
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Werte α_i werden durch die Funktion f bestimmt, z.B. $\alpha_i = \inf\{f(x) \mid x \in [a_i, a_{i+1})\}$. Das Integral über eine Treppenfunktion ist dann elementar definiert durch

$$\int g(x) dx := \sum_{i=1}^n \alpha_i (a_{i+1} - a_i)$$

und man erhält das Integral über geeignete Limesbildung.

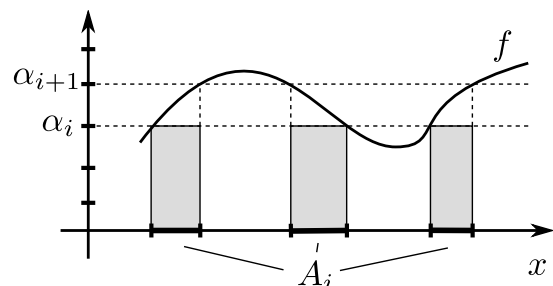
Prinzip: Einteilung des Urbildes in endlich viele Intervalle a priori und Gewichtung der Länge eines Intervalls mit Funktionswerten bei der Integration.



(b) Das Lebesgue-Integral

Zerlege den Bildbereich („ y -Achse“) in endlich viele Intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1})$ und approximiere die zu integrierende Funktion f durch sogenannte **einfache Funktionen**

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x),$$



also Funktionen die auf Mengen $A_i \subset \mathbb{R}$ konstant sind, welche durch die Funktion f definiert werden, z.B. $A_i = f^{-1}([\alpha_i, \alpha_{i+1}))$. Hier bezeichnet f^{-1} nicht die Umkehrabbildung sondern das Urbild. Die Mengen A_i sind dann im Allgemeinen keine Intervalle.

Das Integral für einfache Funktionen ist wieder elementar,

$$\int g(x) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(A_i),$$

vorausgesetzt, wir können der „Länge“ bzw. dem Maß $\lambda(A_i)$ jeder Menge A_i einen präzisen Sinn geben.

1.1 Beispiel. Die Funktion $f(x) = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x)$ ist weder Regel- noch Riemannintegrierbar, aber wegen

$$\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0 \quad (\text{intuitiv klar})$$

sollte

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) + 0 \cdot \underbrace{\lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q})}_{=1} = 0$$

gelten.

Prinzip: Beim Lebesgueintegral zerlegt man statt des Urbildbereichs zunächst den Bildbereich. Es wird sich zeigen, dass dieser Ansatz zwei große Vorteile hat:

- a) Es gibt „mehr“ integrierbare Funktionen $\Rightarrow$ Räume Lebesgue-integrierbarer Funktionen sind vollständig.
- b) Das Prinzip ist leicht auf andere Urbildmengen als $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ verallgemeinerbar, da keine Zerlegung des Urbildbereichs in Intervalle oder Würfel notwendig ist.

Aber: Alles hängt an der Definition geeigneter Maße λ .

1.1 Das Inhaltsproblem

Der Inhalt eines Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist seine Länge, $\lambda([a, b]) = b - a$. Dieser Inhalt ist

- (a) **translationsinvariant**, d.h.

$$\lambda([a + c, b + c]) = \lambda([a, b]) \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

- (b) **additiv** für disjunkte Intervalle,

$$\lambda\left(\bigcup_i [a_i, b_i]\right) = \sum_i (b_i - a_i),$$

- (c) **subadditiv** für überlappende Intervalle,

$$\lambda\left(\bigcup_i [a_i, b_i]\right) \leq \sum_i (b_i - a_i).$$

Frage: Kann man diesen primitiven Inhaltsbegriff unter Beibehaltung der Eigenschaften (a), (b) und (c) auf beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ erweitern?

Antwort: Nein! Es gibt keine Abbildung

$$\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty] \quad (\mathcal{P} = \text{Potenzmenge} = \text{Menge aller Teilmengen})$$

mit den Eigenschaften

- (a) $\lambda([0, 1]) = 1$
- (b) $\lambda(A + c) = \lambda(A) \quad \forall A \subset \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$,
- (c) $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$ falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ (σ -Additivität).

Um das einzusehen, betrachten wir das Intervall $[0, 1]$ als Kreisring und Verschiebungen modulo 1, also $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Wir konstruieren gleich eine disjunkte Zerlegung des $[0, 1]$ -Rings in abzählbar unendlich

viele Mengen V_j , $j \in \mathbb{N}$, die alle durch Translation auseinander hervorgehen, $V_j = V + r_j$. Dann folgt mit Normierung, σ -Additivität und Translationsinvarianz

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{(a)}{=} \lambda([0, 1]) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j\right) \stackrel{(c)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(V_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(V + r_j) \stackrel{(b)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(V) = \lambda(V) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} 1 = \begin{cases} 0 & \text{falls } \lambda(V) = 0 \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Der Menge V kann man also keinen solchen Inhalt zuweisen, man sagt sie ist nicht „messbar“.

Um so ein V zu konstruieren, betrachten wir die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Die Äquivalenzklassen $[x]$ bilden eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und wir können aus jeder einen Vertreter x wählen. Die Menge dieser Vertreter nennen wir V und setzen $V_r := V + r$, $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Dann gilt

$$V_r \cap V_{r'} = \emptyset \quad \text{für } r \neq r'$$

und

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} V_r = [0, 1].$$

Fazit: Es existieren Mengen, denen man keinen Inhalt zuweisen kann, falls man die Eigenschaften (a), (b) und (c) von dem Inhaltsbegriff fordert. Das ist nicht weiter schlimm und soll an dieser Stelle nur die Tatsache motivieren, dass wir im Folgenden Maße auf Teilmengensystemen betrachten, die nicht notwendigerweise die Potenzmenge sind.

1.2 Bemerkung. Bei der Konstruktion von V haben wir das **Auswahlaxiom** verwendet, da wir aus jeder Äquivalenzklasse $[x]$ einen Vertreter ausgewählt haben, ohne diesen genau zu spezifizieren.

1.3 Bemerkung. Der Satz von Banach-Tarski

Man könnte hoffen, dass alle Mengen messbar werden, wenn man statt σ -Additivität nur endliche Additivität fordert. Auf $\mathbb{R}$ ist das tatsächlich der Fall: Es gibt einen endlich additiven und translationsinvarianten Inhalt auf $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 3$ gibt es aber schon nicht messbare Mengen, wenn man nur endliche Additivität und Invarianz unter Bewegungen, also Translationen und Rotationen, fordert:

Eine Kugel im $\mathbb{R}^3$ kann so in endlich viele disjunkte Teilmengen zerlegt werden, dass aus diesen Teilen allein durch starres Verschieben und Rotieren zwei Kugeln der ursprünglichen Größe gebildet werden können.

Diese Konstruktion geht auf Banach und Tarski zurück und heißt deshalb auch das Banach-Tarski “Paradoxon”. Es handelt sich hierbei um ein Paradoxon im Sinne eines scheinbaren Widerspruchs bzw. eines Widerspruchs gegen die Intuition. Mathematisch gesehen liegt hier kein Widerspruch vor. Der Beweis wird für Interessierte in einer Zusatzstunde besprochen.

1.2 Grundzüge der Maßtheorie

Ein Maß μ ordnet Teilmengen $A \subset M$ einer Obermenge M eine Maßzahl $\mu(A) \in [0, \infty]$ zu. Für Teilmengen von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ spricht man dann beispielsweise von Länge, Fläche und Volumen. Ein anderes Beispiel sind Wahrscheinlichkeitsmaße, die Mengen von “Ereignissen” Wahrscheinlichkeiten zuordnen.

Wie wir am Beispiel $\mathbb{R}$ bereits gezeigt haben, ist es im Allgemeinen nicht möglich, allen Teilmengen einer Menge eine Maßzahl zuzuordnen, wenn man zusätzliche Eigenschaften (wie z.B.

Translationsinvarianz) fordert. Man muss sich also auf geeignete Systeme von Teilmengen beschränken:

1.4 Definition. σ -Algebra

Eine Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer Menge X heißt **σ -Algebra** auf X , falls

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
- (iii) $A_k \in \mathcal{A}$ für $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Eine σ -Algebra ist also ein System von Teilmengen, welches die leere Menge enthält und abgeschlossen ist unter Komplementbildung und abzählbaren Vereinigungen.

1.5 Proposition. Sei $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf X . Dann gilt

- (a) $X \in \mathcal{A}$
- (b) $A_k \in \mathcal{A}$ für $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$
- (c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$ und $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

1.6 Beispiel. (a) $\mathcal{P}(X)$ und $\{\emptyset, X\}$ sind σ -Algebren auf X .

(b) Sind $\mathcal{A}_j, j \in I$, σ -Algebren auf X , so ist auch $\bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$ eine σ -Algebra.

1.7 Definition. Erzeugendensystem

Aus Beispiel 1.6 (b) folgt insbesondere, dass jede Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ eine kleinste σ -Algebra **erzeugt**, welche $\mathcal{F}$ enthält:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}} := \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \\ \text{mit } \mathcal{F} \subset \mathcal{B}}} \mathcal{B}.$$

Jede Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ die $\mathcal{A}$ erzeugt, heißt **Erzeugendensystem** für $\mathcal{A}$.

1.8 Definition. Maß, Messraum, Maßraum, messbare Mengen

Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra auf X .

(a) Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Maß**, falls

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Für paarweise disjunkte $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Falls $\mu(X) < \infty$, so heißt μ ein **endliches Maß**.

Falls $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ mit $\mu(A_k) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$, so heißt μ ein **σ -endliches Maß**.

(b) Das Tupel $(X, \mathcal{A})$ heißt **Messraum**, das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**. Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen die **$\mathcal{A}$ -messbaren Mengen**.

1.9 Beispiel. Zählmaß und Diracmaß

(a) Das **Zählmaß** ν ist auf der Potenzmenge jeder Menge X definiert: Für $A \subset X$ ist

$$\nu(A) := \begin{cases} |A| = \text{Anzahl der Elemente von } A & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Ebenfalls auf $\mathcal{P}(X)$ ist das **Diracmaß** δ_{x_0} bei $x_0 \in X$ definiert durch

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_0 \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus der Definition ergeben sich direkt die folgenden elementaren Eigenschaften von Maßen.

1.10 Proposition. Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$.

(a) Seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$. Dann gilt

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Insbesondere ist also $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(b) Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(c) Seien $A_j \in \mathcal{A}$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad (\text{Subadditivität}).$$

(d) Sei (A_j) eine aufsteigende Folge messbarer Mengen, also $A_j \in \mathcal{A}$ und $A_j \subset A_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Wie können wir nun unseren translationsinvarianten Inhaltsbegriff für Intervalle in $\mathbb{R}$ auf Mengen aus einer geeigneten σ -Algebra ausdehnen? Da gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Erweitern

Sei $\mathcal{B}$ die kleinste σ -Algebra welche die offenen Intervalle enthält (also die von den offenen Intervallen erzeugte σ -Algebra) und zeige, dass sich λ in eindeutiger Weise zu einem Maß auf $\mathcal{B}$ fortsetzen läßt. Diese Strategie führt zu den sogenannten Maß-Erweiterungssätzen, auf die wir aus Zeitgründen nicht weiter eingehen können.

1.11 Bemerkung. Borel- σ -Algebra

In einem metrischen Raum X heißt die von den offenen Mengen erzeugte σ -Algebra $\mathcal{B}$ die **Borel- σ -Algebra**. Auf $\mathbb{R}$ stimmt sie mit der von den offenen Intervallen erzeugten σ -Algebra überein:

1.12 Lemma. Sei $G \subset \mathbb{R}$ offen, dann ist G abzählbare Vereinigung offener Intervalle

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$$

Beweis. Wähle zu jedem Punkt $x \in \mathbb{Q} \cap G$ das größte offene Intervall I_x mit $x \in I_x \subset G$. Dann ist $G = \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap G} I_x$. $\square$

2. Möglichkeit: Einschränken

Definiere ein sog. äußeres Maß λ^* auf allen Teilmengen von $\mathbb{R}$, welches auf den Intervallen mit λ übereinstimmt. Dieses kann mit dem zuvor gesagten nicht σ -additiv sein. Finde dann die größte σ -Algebra $\mathcal{L}$, so dass λ^* eingeschränkt auf $\mathcal{L}$ ein Maß ist.

1.13 Definition. Äußeres Maß

Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ heißt äußeres Maß auf der Menge X , falls

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$
- (ii) Falls $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, so ist

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) \quad (\text{Subadditivität})$$

Für $A \subset B$ gilt dann insbesondere $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Monotonie).

1.14 Beispiel. Äußeres Lebesguemaß

Offenbar wird nun für $A \subset \mathbb{R}$ durch

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j), a_j < b_j \in \mathbb{R} \right\}$$

ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}$ definiert und es gilt $\lambda^*((a, b)) = (b - a)$ (Übungsaufgabe). Es heißt λ^* das äußere Lebesguemaß.

Wie kommt man nun an die messbaren Mengen?

Lebesgues ursprüngliche Idee:

Definiere auch ein inneres Maß λ_* und zeige, dass $\{A \subset \mathbb{R} \mid \lambda^*(A) = \lambda_*(A)\}$ eine σ -Algebra ist und auf solchen Mengen durch $\lambda := \lambda^* = \lambda_*$ ein Maß definiert wird.

Carathéodorys Trick:

Für Teilmengen $A \subset [0, 1]$ ist

$$\lambda_*(A) := \lambda^*([0, 1]) - \lambda^*([0, 1] \setminus A) = 1 - \lambda^*([0, 1] \setminus A).$$

Es ist also A messbar, d.h. $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$, genau dann, wenn $\lambda^*(A) + \lambda^*([0, 1] \setminus A) = 1$, oder

$$\lambda^*(A \cap [0, 1]) + \lambda^*(A^c \cap [0, 1]) = \lambda^*([0, 1]).$$

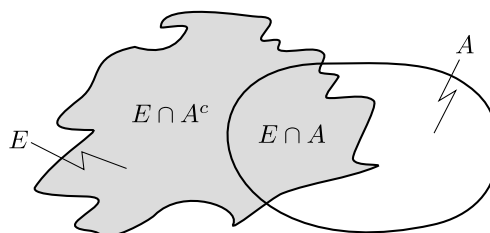
Carathéodorys Idee ist es nun, hier $[0, 1]$ durch eine beliebige Menge E zu ersetzen und die Gleichung zur Definition zu erheben.

1.15 Definition. μ^* -Messbarkeit

Sei μ^* ein äußeres Maß auf einer Menge X . Eine Menge $A \subset X$ heißt μ^* -**messbar**, falls

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \quad \text{für jedes } E \subset X.$$

A ist also μ^* messbar, falls jede Menge E von A „sauber“ zerlegt wird, also μ^* bzgl. der Zerlegung durch A additiv ist.



1.16 Bemerkung. Wegen der Subadditivität gilt immer

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E).$$

Man muss also zur Messbarkeit immer nur

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$$

nachweisen.

1.17 Satz. Carathéodory

Sei μ^* ein äußeres Maß auf einer Menge X , dann bilden die μ^* -messbaren Mengen eine σ -Algebra $\mathcal{A}$ und $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ ist ein Maß.

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ die Menge der μ^* -messbaren Mengen.

- (1) Falls $\mu^*(A) = 0$ ist, so ist $A \in \mathcal{A}$, denn die Subadditivität impliziert dann

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(A) + \mu^*(E) = \mu^*(E).$$

Es ist also insbesondere $\emptyset \in \mathcal{A}$.

- (2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ folgt sofort aus der Symmetrie der Definition.

- (3) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$, denn

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(A_1 \cap E) + \mu^*(A_1^c \cap E) \\ &= \mu^*(A_1 \cap E) + \mu^*(A_1^c \cap E \cap A_2) + \mu^*(A_1^c \cap E \cap A_2^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)^c). \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit folgt aus der Messbarkeit von A_1 , die zweite aus der Messbarkeit von A_2 . Die Ungleichung folgt schließlich aus der Subadditivität und den Identitäten

$$\begin{aligned} E \cap (A_1 \cup A_2) &= (E \cap A_1) \cup (E \cap A_1^c \cap A_2) \\ E \cap (A_1 \cup A_2)^c &= E \cap A_1^c \cap A_2^c. \end{aligned}$$

- (4) Für $A_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt und messbar, $E \subset X$ beliebig, $B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j).$$

Beweis durch Induktion: Der Fall $n = 1$ ist klar. Wegen (3) ist B_n messbar, also gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_{n+1}) &= \mu^*(E \cap B_{n+1} \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_{n+1} \cap B_n^c) \\ &= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \mu^*(E \cap A_{n+1}). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt also auch

$$\mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j),$$

da $\mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)) \geq \mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(5) Für messbare $A_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, ist auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ messbar.

Um das zu sehen, schreiben wir zunächst $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ als disjunkte Vereinigung. Sei

$$\tilde{A}_1 = A_1, \quad \tilde{A}_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \tilde{A}_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \quad \dots$$

dann sind die $\tilde{A}_j$ messbar und $\bigcup_{j=1}^n \tilde{A}_j = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Also gilt für beliebiges $E \subset X$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^n A_j)) + \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^n A_j)^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^n \tilde{A}_j)) + \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap \tilde{A}_j) + \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c) \end{aligned}$$

und für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap \tilde{A}_j) + \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c) \\ &= \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)) + \mu^*(E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c). \end{aligned}$$

□

1.18 Definition. Lebesguemaß und Lebesgue- σ -Algebra auf $\mathbb{R}^n$

Das äußere Lebesguemaß $\lambda^*(A)$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert durch das Infimum der Inhalte aller abzählbaren Überdeckungen durch offene Quader,

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n (b_{jk} - a_{jk}) \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n (a_{jk}, b_{jk}), a_{jk} < b_{jk} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Restriktion λ von λ^* auf die λ^* -messbaren Mengen heißt das n -dimensionale **Lebesguemaß** und die σ -Algebra $\mathcal{L}^n$ der λ^* -messbaren Mengen heißt **Lebesgue- σ -Algebra**.

1.19 Bemerkung. Translationsinvarianz des Lebesguemaßes

Da offenbar λ^* translationsinvariant ist, ist auch $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}^n}$ translationsinvariant, d.h.

$$\lambda(A + x) = \lambda(A) \quad \forall A \in \mathcal{L}^n, x \in \mathbb{R}^n.$$

1.20 Proposition. Borelmengen sind Lebesguemessbar, also $\mathcal{B}^n \subset \mathcal{L}^n$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass offene Quader $\prod_{k=1}^n (a_k, b_k)$ λ^* -messbar sind, denn diese erzeugen $\mathcal{B}^n$: wäre $\mathcal{B}^n \not\subset \mathcal{L}^n$, so wäre $\mathcal{B}^n \cap \mathcal{L}^n \subsetneq \mathcal{B}^n$ eine kleinere σ -Algebra welche alle offenen Quader enthält, im Widerspruch zur Definition von $\mathcal{B}^n$. Dass offene Quader messbar sind, ist für den Fall $n = 1$ eine Übungsaufgabe. □

1.21 Beispiel. Es ist $\mathbb{Q}$ als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen (Punkten) eine Borel-Menge, also Lebesguemessbar. In den Übungen wurde gezeigt, dass $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$, also ist auch $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Die rationalen Zahlen bilden somit eine Lebesgue-Nullmenge.

1.22 Bemerkung. Die σ -Algebra $\mathcal{B}$ der Borelmengen ist echt kleiner als die σ -Algebra der Lebesguemengen. Man nennt $\lambda^*|_{\mathcal{B}^n}$ deshalb auch das Lebesgue-Borel-Maß, um es von dem Lebesgue-Maß $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}^n}$ zu unterscheiden. λ erhält man aus $\lambda^*|_{\mathcal{B}^n}$ durch „Vervollständigung“: Ein Maß μ auf einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ heißt vollständig, falls jede Teilmenge einer Nullmenge messbar ist. (siehe Übungsaufgabe).

1.23 Satz. Eindeutigkeitssatz

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ ein durchschnittstabiles Erzeugendensystem für $\mathcal{A}$, d.h. $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$. Weiter gebe es eine aufsteigende Folge (E_n) in $\mathcal{E}$ mit $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \dots$ und $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = X$. Sind nun μ_1 und μ_2 Maße auf $(X, \mathcal{A})$ mit

- (i) $\mu_1|_{\mathcal{E}} = \mu_2|_{\mathcal{E}}$
- (ii) $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

so gilt bereits $\mu_1 = \mu_2$.

Beweis. Siehe z.B. Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, Satz 5.4. □

1.24 Korollar. Eindeutigkeit des Lebesguemaßes

Das Lebesgue- und das Lebesgue-Borel-Maß sind jeweils eindeutig bestimmt durch die Forderung nach Translationsinvarianz und der Normierung $\lambda((0, 1)^n) = 1$.

Beweis. Skizze: Translationsvarianz und Normierung fixieren λ auf beliebigen Quadern,

$$\lambda \left(\prod_{j=1}^n (a_j, b_j) \right) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j),$$

welche ein $\cap$ -stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{B}^n$ bilden. Also ist λ auf $\mathcal{B}^n$ eindeutig bestimmt. Auf $\mathcal{L}^n$ ist λ als Vervollständigung von λ auf $\mathcal{B}^n$ somit ebenfalls eindeutig bestimmt. □

1.3 Das Lebesgueintegral

Wir entwickeln nun die Integrationstheorie zunächst für reellwertige Funktionen. Um auch singuläre Funktionen integrieren zu können, müssen wir die Funktionswerte $\pm\infty$ explizit zulassen.

1.25 Definition. Es sei

$$\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

wobei $\infty = +\infty \neq -\infty \notin \mathbb{R}$ zwei Symbole sind. Wir erweitern die Ordnung und die Rechenregeln von $\mathbb{R}$ auf $[-\infty, \infty]$ durch

$$\begin{aligned} -\infty &< a < \infty & \forall a \in \mathbb{R} \\ a + \infty &= \infty + a := \infty & \forall -\infty < a \leq \infty \\ a - \infty &= -\infty + a := -\infty & \forall -\infty \leq a < \infty \\ (\pm\infty)(\pm a) &= (\pm a)(\pm\infty) := +\infty & \forall 0 < a \leq \infty \\ (\pm\infty)(\mp a) &= (\mp a)(\pm\infty) := -\infty & \forall 0 < a \leq \infty \\ \pm\infty \cdot 0 &= 0 \cdot (\pm\infty) := 0 \end{aligned}$$

Nicht definiert sind die Ausdrücke $\infty - \infty$ und $-\infty + \infty$.

1.26 Definition. Numerische Funktionen und die Borel- σ -Algebra auf $\bar{\mathbb{R}}$

Eine Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **numerische Funktion**. Wir verstehen $\bar{\mathbb{R}}$ im Folgenden immer mit der Borel- σ -Algebra

$$\bar{\mathcal{B}} := \{B \subset \bar{\mathbb{R}} \mid B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}\}$$

und erweitern das Lebesgue-Borel-Maß gemäß

$$\lambda(B) := \lambda(B \cap \mathbb{R}) \quad \forall B \in \bar{\mathcal{B}}.$$

Wie in der Einleitung skizziert, beruht das Lebesgueintegral für reellwertige Funktionen auf der Idee, den Wertebereich in Intervalle zu zerlegen und die Urbildmengen von Intervallen zu “messen”. Wir werden also von den zu integrierenden Funktionen verlangen müssen, dass Urbilder von Intervallen oder (wie wir sehen werden äquivalent) Urbilder von Borel-messbaren Mengen wieder messbar sind. Allgemein definiert man deshalb folgenden Begriff der messbaren Funktion:

1.27 Definition. Messbare Funktionen

Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{C})$ Messräume. Eine Abbildung

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{heißt } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{C}\text{-messbar,}$$

falls für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt, dass $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, also falls f -Urbilder messbarer Mengen messbar sind.

Für numerische Funktionen ergibt sich sofort:

1.28 Bemerkung. Messbare numerische Funktionen

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Für eine Abbildung $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sind äquivalent

- (a) f ist $\mathcal{A}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -messbar
- (b) $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $\{f \geq a\} := \{x \in X \mid f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{A}$
- (c) $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $\{f > a\} = f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A}$
- (d) $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $\{f \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$
- (e) $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $\{f < a\} = f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$

Beweis. Die Behauptung folgt aus folgendem Lemma,

1.29 Lemma. Sei $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{C})$ und $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{C}$. Falls $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ für alle $E \in \mathcal{E}$, so ist f messbar.

Beweis. Sei $\mathcal{C}' := \{C \subset Y \mid f^{-1}(C) \in \mathcal{A}\}$, dann ist $\mathcal{C}'$ eine σ -Algebra auf Y und nach Voraussetzung gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}'$ und somit $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. □

und der Tatsache, dass die Familien $\{[a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$, $\{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$ usw. jeweils die Borel- σ -Algebra $\bar{\mathcal{B}}$ erzeugen. □

1.30 Beispiel. Alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sind $\mathcal{B}^n$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -messbar, da die offenen Mengen in $\bar{\mathbb{R}}$ die σ -Algebra $\bar{\mathcal{B}}$ erzeugen und deren Urbilder als offene Mengen $\mathcal{B}^n$ -messbar sind. Und jede $\mathcal{B}^n$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -messbare Funktion ist auch $\mathcal{L}^n$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -messbar, da $\mathcal{B}^n \subset \mathcal{L}^n$.

1.31 Proposition. Verknüpfungen messbarer numerischer Funktionen

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, $f, g, f_j : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, seien $\mathcal{A}$ -messbare Funktionen und $\varphi : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sei messbar. Dann sind die Funktionen

$$f + g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f|, \quad \varphi \circ f, \quad \min(f, g), \quad \max(f, g),$$

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$$

alle wieder $\mathcal{A}$ -messbar (falls sie wohldefiniert sind).

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass Kompositionen messbarer Abbildungen messbar sind. Also ist $\varphi \circ f$ messbar.

Für $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\min(f, g)$ und $\max(f, g)$ beachte, dass

$$(f + g)^{-1}(\pm\infty) = f^{-1}(\pm\infty) \cup g^{-1}(\pm\infty) \in \mathcal{A}$$

bzw.

$$(f \cdot g)^{-1}(+\infty) = ((f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}((0, \infty])) \cup \dots \in \mathcal{A}$$

usw. Es genügt also, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ zu betrachten.

Nun sind $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $\min: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\max: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alle stetig und somit $\mathcal{B}^2$ - $\mathcal{B}$ -messbar.

Ebenso ist die Abbildung $(f, g): X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x), g(x))$, $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}^2$ -messbar, denn $(f, g)^{-1}((a, b) \times (c, d)) = f^{-1}((a, b)) \cap g^{-1}((c, d)) \in \mathcal{A}$.

Also sind $f + g = +(f, g)$ usw. als Kompositionen messbarer Abbildungen alle wieder messbar.

Da

$$\left\{ x \in X \mid \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) \leq a \right\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \left\{ x \in X \mid f_j(x) \leq a \right\}$$

abzählbarer Schnitt messbarer Mengen ist, bzw.

$$\left\{ x \in X \mid \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) < a \right\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ x \in X \mid f_j(x) < a \right\},$$

abzählbare Vereinigung messbarer Mengen ist, sind $\sup f_j$ und $\inf f_j$ $\mathcal{A}$ -messbar. Ebenso sind $\limsup f_j$ und $\liminf f_j$ $\mathcal{A}$ -messbar, da

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} f_j \quad \text{bzw.} \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq n} f_j. \quad \square$$

1.32 Korollar. Punktweise Limites messbarer Funktionen sind messbar

Sei (f_n) eine Folge messbarer numerischer Funktionen die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f messbar.

Beweis. Das folgt wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$. $\square$

1.33 Definition. Einfache Funktionen

Eine Funktion $g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **einfach** (oder Treppenfunktion), wenn $g(X)$ endlich ist, g also nur endlich viele verschiedene Werte annimmt.

Eine einfache Funktion kann in eindeutiger Weise in der **kanonischen Form**

$$g(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}(x)$$

mit $\alpha_j \in \bar{\mathbb{R}}$, $A_j \subset X$, $A_j \cap A_i = \emptyset$ und $\alpha_j \neq \alpha_i$ für $i \neq j$ geschrieben werden.

1.34 Definition. Das Integral für einfache Funktionen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $g: X \rightarrow [0, \infty]$ einfach und messbar (also $A_j \in \mathcal{A}$ für alle j), dann definieren wir das Integral von g bzgl. μ durch

$$\int_X g \, d\mu := \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j),$$

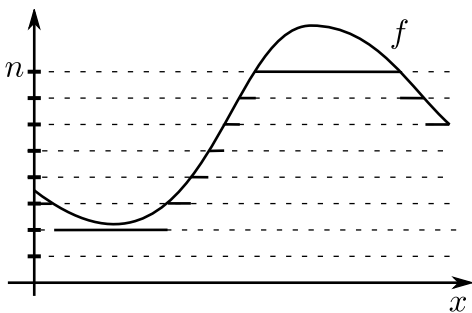
wobei $g = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ in der kanonischen Form gegeben ist.

Aus dem nächsten Lemma werden wir folgern, dass man diese Integraldefinition in natürlicher Weise auf messbare Funktionen ausdehnen kann.

1.35 Lemma. Sei $f : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann gibt es eine monoton steigende Folge (g_n) (also $g_n \leq g_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$) einfacher messbarer Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert.

Beweis. Definiere $g_n : X \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{falls } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \\ n & \text{falls } f(x) \geq n. \end{cases} \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq n \cdot 2^n$$



Da f messbar ist, sind die Mengen $\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\}$ messbar und somit ist auch g_n messbar.

□

1.36 Definition. Das Integral für positive messbare Funktionen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar, dann definieren wir das Integral von f bzgl. μ durch

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int g \, d\mu \mid g : X \rightarrow [0, \infty] \text{ einfach und messbar mit } g \leq f \right\}.$$

1.37 Bemerkung. Das Integral über eine positive messbare Funktion ist also immer wohldefiniert, kann aber den Wert $+\infty$ annehmen: Z.B. ist für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} \chi_{[1, \infty]}$ und $g_n(x) = \frac{1}{\lceil x \rceil} \chi_{(1, n+1]}(x)$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} = \infty.$$

Um nun die üblichen Eigenschaften des Integrals (Linearität und Monotonie) zu zeigen, weisen wir diese zunächst für einfache Funktionen nach (was einfach ist, daher der Name) und zeigen dann, dass sie sich durch monotone Approximation gemäß Lemma 1.35 auf das Integral messbarer Funktionen übertragen lassen.

Im Folgenden bezeichne $\mathcal{T}(X)$ die Menge der nicht negativen, einfachen und messbaren Funktionen auf $(X, \mathcal{A})$.

1.38 Lemma. Eigenschaften des Integrals über Treppenfunktionen

- (i) Sei $g = \sum_{i=1}^n \beta_i \chi_{B_i}$ einfach, messbar und nicht negativ und die Mengen B_i seien paarweise disjunkt, dann gilt

$$\int_X g \, d\mu = \sum_{i=1}^n \beta_i \mu(B_i).$$

- (ii) Seien $g, h \in \mathcal{T}(X)$ und $\alpha \geq 0$. Dann gilt
a) $\alpha g \in \mathcal{T}(X)$ und $\int \alpha g \, d\mu = \alpha \int g \, d\mu$

- b) $g + h \in \mathcal{T}(X)$ und $\int (g + h) d\mu = \int g d\mu + \int h d\mu$
 c) $g \leq h \Rightarrow \int g d\mu \leq \int h d\mu$.

Beweis. (i) Folgt sofort aus der Additivität des Maßes μ : Es sei $g = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ die kanonische Darstellung von g und $I_j := \{i \mid \beta_i = \alpha_j\}$. Dann ist $A_j = \bigcup_{i \in I_j} B_i$ und $\mu(A_j) = \sum_{i \in I_j} \mu(B_i)$, also

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \mu(B_i) = \sum_{j=1}^k \sum_{i \in I_j} \alpha_j \mu(B_i) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j) = \int g d\mu.$$

- (ii) a) Offensichtlich.
 b) Es genügt $g = \alpha \chi_A$ und $h = \beta \chi_B$ zu betrachten. Dann ist

$$g + h = (\alpha + \beta) \chi_{A \cap B} + \alpha \chi_{A \setminus B} + \beta \chi_{B \setminus A} \in \mathcal{T}(X)$$

und mit Teil (i) und der Additivität des Maßes gilt

$$\int (g+h) d\mu \stackrel{(i)}{=} (\alpha+\beta)\mu(A \cap B) + \alpha\mu(A \setminus B) + \beta\mu(B \setminus A) = \alpha\mu(A) + \beta\mu(B) = \int g d\mu + \int h d\mu.$$

- c) Mit (b) ist $h - g \in \mathcal{T}(X)$ und $\int h d\mu = \int g d\mu + \underbrace{\int (h - g) d\mu}_{\geq 0} \geq \int g d\mu.$ □

1.39 Bemerkung. Mit Teil (ii) (b) von Lemma 1.38 folgt dann, dass für jede beliebige Darstellung einer Treppenfunktion $g = \sum_{i=1}^n \beta_i \chi_{B_i}$ gilt

$$\int g d\mu = \sum_{i=1}^n \beta_i \mu(B_i).$$

1.40 Lemma. Sei $f : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar und (g_n) eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{T}(X)$ die punktweise gegen f konvergiert. Dann gilt

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu.$$

Beweis. Da $g_n \leq f$, ist nach der Definition von $\int f d\mu$ offensichtlich $\int g_n d\mu \leq \int f d\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq \int f d\mu$.

Für die umgekehrte Ungleichung zeigen wir:

$$(*) \quad \text{Sei } h \in \mathcal{T}(X) \text{ mit } h \leq f \Rightarrow \int h d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu.$$

Denn dann gilt für jede Folge (h_m) in $\mathcal{T}(X)$ mit $h_m \leq f$ und $\int h_m d\mu \nearrow \int f d\mu$ (solche Folgen gibt es aufgrund der Definition von $\int f d\mu$ als Supremum), dass

$$\int f d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu.$$

Sei für (*) also $h = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j} \in \mathcal{T}(X)$ und $\delta \in (0, 1)$. Setze $C_n := \{x \mid g_n(x) \geq \delta h(x)\}$. Die Mengen C_n sind messbar und wegen $g_n \geq \delta h \chi_{C_n}$ ist

$$\int g_n d\mu \geq \delta \int h \chi_{C_n} d\mu.$$

Wegen der Monotonie von g_n ist $C_n \subset C_{n+1}$ und da $\delta < 1$, ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = X$ (kurz: $C_n \nearrow X$), also insbesondere auch $C_n \cap A_j \nearrow A_j$. Also ergibt sich für jedes $\delta < 1$, dass

$$\begin{aligned} \int h \, d\mu &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(C_n \cap A_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int h \chi_{C_n} \, d\mu \leq \frac{1}{\delta} \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu, \end{aligned}$$

was (*) impliziert. □

1.41 Folgerung. Seien $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar und $\alpha \geq 0$. Dann gilt

- (i) $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$
- (ii) $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$
- (iii) $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Beweis. Seien (f_n) und (g_n) Folgen in $\mathcal{T}(X)$ mit $f_n \nearrow f$ und $g_n \nearrow g$.

- (i) $\alpha f_n \nearrow \alpha f \Rightarrow \int \alpha f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \alpha f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \int f_n \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$.
- (ii) $(f_n + g_n) \nearrow (f + g) \Rightarrow \dots$ wie in (i).
- (iii) $f_n \leq g \xRightarrow{\text{nach Def.}} \int f_n \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Behauptung. □

Der folgende Satz von Beppo Levi ist einer der zentralen Konvergenzsätze für die Integrationstheorie.

1.42 Satz. Satz von der monotonen Konvergenz (von Beppo Levi)

Seien $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar und $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ (punktweise), dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Beweis. Da $f_n \leq f$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ und somit auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$. Wir konstruieren nun eine Folge (g_n) in $\mathcal{T}(X)$ mit $g_n \nearrow f$ und $g_n \leq f_n$. Dann dann folgt auch

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Dazu wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(h_{nj})_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}(X)$ mit $(h_{nj})_{j \in \mathbb{N}} \nearrow f_n$ und setze

$$g_n := \max(h_{1n}, \dots, h_{nn}).$$

Dann ist

$$g_{n+1} = \max(h_{1,n+1}, \dots, h_{n,n+1}, h_{n+1,n+1}) \geq \max(h_{1n}, \dots, h_{nn}) = g_n,$$

da jeweils $h_{j,n+1} \geq h_{jn}$. Weiterhin gilt $g_n \leq f_n$, da $h_{jn} \leq f_j \leq f_n$ für $j \leq n$. Schließlich folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = f$ aus

$$f = \sup_j (f_j) = \sup_j \sup_{n \geq j} \underbrace{(h_{jn})}_{\leq g_n} \leq \sup_n g_n \leq \sup_n f_n = f. \quad \square$$

1.43 Korollar. Lemma von Fatou

Seien $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann gilt

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis. Mit Proposition 1.31 sind die Funktionen $g_k := \inf_{n \geq k} f_n$ messbar und $g_k \leq f_n$ für $n \geq k$. Somit ist

$$\int g_k \, d\mu \leq \inf_{n \geq k} \int f_n \, d\mu.$$

Nun ist $g_k \leq g_{k+1}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ und der Satz der monotonen Konvergenz liefert

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \int \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k \, d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} \int f_n \, d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu. \quad \square$$

Das Integral über Funktionen ohne festes Vorzeichen definiert man dadurch, dass man die Bereiche mit positivem und negativem Vorzeichen separat integriert. Um die Situation $\infty - \infty = ?$ zu vermeiden, fordert man, dass beide Teile jeweils endlich sind.

1.44 Definition. Integrierbare Funktionen und ihr Integral

Eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **integrierbar**, falls für

$$f_+ := \max(f, 0) \quad \text{und} \quad f_- := \max(-f, 0)$$

gilt

$$\int f_+ \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int f_- \, d\mu < \infty.$$

Man setzt dann

$$\int f \, d\mu := \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu.$$

1.45 Bemerkung. Kriterien für Integrierbarkeit

Für eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sind äquivalent:

- (a) f ist integrierbar.
- (b) $|f|$ ist integrierbar.
- (c) Es gibt eine integrierbare Funktion $g : X \rightarrow [0, \infty]$ mit $|f| \leq g$.

Beweis. Übungsaufgabe □

1.46 Satz. Eigenschaften des Integrals über integrierbare Funktionen

Seien $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- (a) αf ist integrierbar und $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$.
- (b) Falls $f + g$ definiert ist ($\infty - \infty$ ist nicht definiert, vgl. dazu aber Folgerung 1.50), so ist $f + g$ integrierbar und

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

- (c) $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.
- (d) $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$.

Beweis. (a) Für $\alpha \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} \int \alpha f \, d\mu &= \int (\alpha f)_+ \, d\mu - \int (\alpha f)_- \, d\mu = \int \alpha f_+ \, d\mu - \int \alpha f_- \, d\mu \\ &= \alpha \left(\int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu \right) = \alpha \int f \, d\mu \end{aligned}$$

und $\alpha < 0$ geht analog.

- (b) Da $|f+g| \leq |f|+|g|$ ist nach Bemerkung 1.45 (c) $f+g$ integrierbar und mit $h := f+g$ gilt

$$h_+ - h_- = h = f + g = f_+ + g_+ - (f_- + g_-),$$

also

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+.$$

Folgerung 1.41 liefert

$$\int h_+ d\mu + \int f_- d\mu + \int g_- d\mu = \int h_- d\mu + \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu,$$

also

$$\int h d\mu = \int h_+ d\mu - \int h_- d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu + \int g_+ d\mu - \int g_- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

- (c) Da $f \leq g$ impliziert, dass $f_+ \leq g_+$ und $g_- \leq f_-$, liefert Folgerung 1.41, dass

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \leq \int g_+ d\mu - \int g_- d\mu = \int g d\mu.$$

- (d) Da $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$, folgt $\int f d\mu \leq \int |f| d\mu$ und $-\int f d\mu \leq \int |f| d\mu$. $\square$

1.47 Definition. Fast überall oder fast sicher

Wir sagen, eine Eigenschaft von Punkten x gilt fast überall (oder fast sicher) bezüglich eines Maßes μ auf X , falls diese Eigenschaft für $x \in A \subset X$ gilt und

$$\mu(X \setminus A) = 0.$$

Eine Eigenschaft gilt also fast überall, falls sie nur auf einer Nullmenge nicht gilt.

1.48 Beispiel. (a) Da $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, ist eine reelle Zahl fast sicher irrational, also $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ λ -fast überall auf $\mathbb{R}$.

- (b) Ist $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar, so ist $f(x) \in \mathbb{R}$ fast überall. Denn sei $N = f^{-1}(\{-\infty, \infty\})$, dann ist $\alpha \chi_N \leq |f|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, also $\alpha \mu(N) = \alpha \int \chi_N d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann muss aber $\mu(N) = 0$ sein.

Eine integrierbare Funktion kann also nur auf einer Nullmenge die Werte $\pm\infty$ annehmen.

1.49 Bemerkung. Sei $f : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann gilt:

$$\int_X f d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \text{f.ü.}$$

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

1.50 Folgerung. (a) Man kann also eine integrierbare Funktion $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ auf jeder Nullmenge $N \subset X$ beliebig abändern ohne ihr Integral dabei zu ändern.

- (b) Insbesondere darf man das für $N = f^{-1}(\{-\infty, \infty\})$. D.h. für integrierbare Funktionen kann man zumindest das Integral betreffend annehmen, dass f reellwertig ist.
- (c) Somit ist $f+g$ für integrierbare Funktionen immer f.ü. definiert und die Aussage von Folgerung 1.46 (b) gilt in diesem Sinne immer.

1.51 Definition. Das Integral komplexwertiger Funktionen

- (a) Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Messraum $(X, \mathcal{A})$ heißt **messbar**, falls $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f) : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar sind.
- (b) Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **integrierbar**, falls $|f| : X \rightarrow [0, \infty)$ integrierbar ist und ihr Lebesgue-Integral definieren wir durch

$$\int f \, d\mu := \int \operatorname{Re}(f) \, d\mu + i \int \operatorname{Im}(f) \, d\mu.$$

1.52 Bemerkung. Satz 1.46 und Folgerungen 1.50 gelten analog für $\mathbb{C}$ -wertige Funktionen. Es ist deshalb nicht nötig, zu $\mathbb{C}$ wieder einen unendlich fernen Punkt hinzuzunehmen. Singuläre integrierbare Funktionen können eben nur auf einer Nullmenge singulär sein und dann spielt der Wert an der Singularität keine Rolle, solange wir die Funktion nur integrieren wollen.

Schließlich stellen wir noch fest, dass das eindimensionale Lebesgueintegral für Regelfunktionen mit dem im ersten Semester eingeführten Regelintegral übereinstimmt.

1.53 Proposition. Vergleich zum Regelintegral

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, so ist f $\mathcal{B}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -messbar und integrierbar und die Integrale stimmen überein:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda := \int f \chi_{[a,b]} \, d\lambda.$$

Beweis. Übung. □

2 Die L^p -Räume

2.1 Definition. Die $\mathcal{L}^p$ -Räume für $1 \leq p < \infty$

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$. Wir setzen

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und } |f|^p \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}\}$$

und für $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

2.2 Definition. Der Raum $\mathcal{L}^\infty$

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für messbares $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ setzen wir

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf\{0 \leq \lambda \leq \infty \mid \mu(|f|^{-1}((\lambda, \infty))) = 0\} =: \text{ess sup } |f|$$

und

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und } \|f\|_{L^\infty} < \infty\}.$$

Die Funktionen in $\mathcal{L}^\infty$ nennt man wesentlich beschränkt.

Wir werden nun zeigen, dass $\|\cdot\|_{L^p}$ für $1 \leq p \leq \infty$ Halbnormen (also bis auf Definitheit Normen) auf $\mathcal{L}^p$ sind und führen dann die Banachräume $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_{L^p})$ ein. Die Homogenität $\|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda| \|f\|_{L^p}$ ist offensichtlich, die Dreiecksungleichung

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

nicht. Sie folgt aus der folgenden, auch für sich genommen sehr wichtigen Ungleichung.

2.3 Satz. Hölder-Ungleichung

Seien $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar und $1 \leq p, q \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (p \text{ und } q \text{ sind "konjugiert"})$$

wobei $\frac{1}{\infty} := 0$. Dann gilt

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Insbesondere gilt also auch für $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$, dass $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$.

Beweis. Für $p = 1$ und $q = \infty$ sei $0 \leq \lambda \leq \infty$ so, dass $\mu(\{g(x) > \lambda\}) = 0$. Somit ist $0 \leq fg \leq \lambda f$ fast überall. Also gilt

$$\|fg\|_{L^1} = \int |fg| d\mu \leq \int \lambda |f| d\mu = \lambda \|f\|_{L^1}.$$

Bilden wir das Infimum über solche λ , so ergibt sich $\|fg\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1}$.

Seien nun $1 < p, q < \infty$. Ist $\|f\|_{L^p} = 0$, so gilt $f = 0$ f.ü., also auch $fg = 0$ f.ü. und somit $\|fg\|_{L^1} = 0$. Ist $\|f\|_{L^p} > 0$ und $\|g\|_{L^q} = \infty$, so gilt $\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} = \infty$. In beiden Fällen folgt die Aussage.

2 Die L^p -Räume

Daher können wir $0 < \|f\|_{L^p}, \|g\|_{L^q} < \infty$ annehmen. Da die Aussage homogen in $f \cdot g$ ist genügt es, den Fall

$$\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$$

zu betrachten. Um das Produkt $f \cdot g$ abzuschätzen, verwenden wir die folgende elementare Ungleichung.

2.4 Lemma. Youngsche Ungleichung

Seien $0 \leq a, b \leq \infty$ und $1 < p, q < \infty$ konjugiert. Dann gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis. Für $0 < a, b < \infty$ und $t := p \ln(a)$, $s = q \ln(b)$ liefert die Konvexität der Exponentialfunktion

$$ab = e^{\frac{t}{p} + \frac{s}{q}} \leq \frac{e^t}{p} + \frac{e^s}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Für $a \in \{0, \infty\}$ oder $b \in \{0, \infty\}$ gilt diese Ungleichung offensichtlich auch. □

Also ist

$$\|fg\|_{L^1} = \int fg \, d\mu \leq \frac{1}{p} \underbrace{\int f^p \, d\mu}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\int g^q \, d\mu}_{=1} = 1 = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Für die letzte Aussage betrachte man einfach $|f|$ und $|g|$. □

2.5 Satz. Minkowski-Ungleichung (= Dreiecksungleichung für die L^p -Normen)

Seien $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar und $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Beweis. Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Aussage offenbar.

Für $1 < p < \infty$ ist

$$(f + g)^p = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}$$

und mit der Hölder-Ungleichung (Satz 2.3) und $q = \frac{p}{p-1}$ folgt

$$\int f(f + g)^{p-1} \, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \underbrace{\|(f + g)^{p-1}\|_{L^q}}_{(f(f+g)^{(p-1) \cdot q})^{\frac{1}{q}}} = \|f\|_{L^p} \|(f + g)\|_{L^p}^{p-1}.$$

Also ist

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \|f + g\|_{L^p}^{p-1}. \quad (*)$$

Wir erhalten nun die Aussage, indem wir in $(*)$ durch $\|f + g\|_{L^p}^{p-1}$ dividieren. Dies geht aber nur, falls $0 < \|f + g\|_{L^p} < \infty$. Da die Aussage für $\|f + g\|_{L^p} = 0$ sowieso gilt, können wir $\|f + g\|_{L^p} \neq 0$ und ebenso $\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} < \infty$ annehmen. Die Konvexität von $t \mapsto t^p$ für $t \geq 0$ liefert

$$\left(\frac{f + g}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2} f^p + \frac{1}{2} g^p,$$

also

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq 2^{p-1} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) < \infty.$$

□

Also ist $\|\cdot\|_{L^p} : \mathcal{L}^p \rightarrow [0, \infty)$ eine Halbnorm, denn $\|\cdot\|_{L^p}$ ist offensichtlich homogen und erfüllt mit Satz 2.5 die Dreiecksungleichung. Was fehlt zur Norm? Die Definitheit:

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L^p} = 0 &\Rightarrow \int |f - g|^p d\mu = 0 \Rightarrow |f - g|^p = 0 \quad \mu\text{-f.ü.} \\ &\Rightarrow \underbrace{f - g = 0}_{(*)} \quad \mu\text{-f.ü.} \not\Rightarrow f = g. \end{aligned}$$

Um einen normierten Raum zu bekommen, müssen wir $(*)$ zur Definition von „Gleichheit“ erheben, also Funktionen die fast überall übereinstimmen miteinander identifizieren.

2.6 Definition. Die L^p -Räume

Für ein Maß μ auf X und $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir den Quotientenraum

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) / \sim$$

bezüglich der Äquivalenzrelation

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad f = g \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Die Elemente von $L^p(\mu)$ sind also Äquivalenzklassen $[f]$ von Funktionen. Wir schreiben trotzdem weiterhin $f \in L^p(\mu)$ und identifizieren $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit seiner Äquivalenzklasse. Das geht aber nur so lange gut, wie wir f „ $=$ “ $[f] \in L^p$ integrieren. Die punktweise Auswertung von „Funktionen“ $f \in L^p$ ist nicht mehr definiert!

2.7 Satz. Satz von Riesz und Fischer

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ ein Banachraum, d.h. ein vollständiger normierter Vektorraum.

Beweis. Es ist $\|\cdot\|_{L^p}$ auf $L^p(\mu)$ wohldefiniert, da offensichtlich $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$ falls $f \sim g$ und es ist $\|f\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ f.ü. $\Leftrightarrow [f] = [0] \in L^p$. Also ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ mit dem Zuvorgesagten ein normierter Raum. Um die Vollständigkeit von $L^p(\mu)$ zu zeigen, verwenden wir den folgenden äußerst wichtigen Konvergenzsatz.

2.8 Satz. Satz von der dominierten Konvergenz von Lebesgue

Seien $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, $n \in \mathbb{N}$, $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ existiere μ -fast überall und für ein $g \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, gelte

$$|f_n| \leq g \quad \mu\text{-fast überall} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $f_n, f \in L^p(\mu)$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^p} = 0,$$

also $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\mu)$.

Beweis. Es gilt auch $|f| \leq g$ μ -f.ü. und somit

$$\int |f_n|^p d\mu \leq \int g^p d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int |f|^p d\mu \leq \int g^p d\mu < \infty,$$

also insbesondere $f_n, f \in L^p(\mu)$.

Wegen $2g \geq |f_n - f|$ gilt $2^p g^p - |f_n - f|^p \geq 0$ und wir können das Lemma von Fatou anwenden:

$$\begin{aligned} \int 2^p g^p d\mu &= \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (2^p g^p - |f_n - f|^p) d\mu \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (2^p g^p - |f_n - f|^p) d\mu \\ &= \int 2^p g^p d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f|^p d\mu \end{aligned}$$

2 Die L^p -Räume

da alle Integrale endlich sind. Also ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

und der Satz ist bewiesen. $\square$

Fortsetzung des Beweises von Satz 2.7

Wir zeigen nun die Vollständigkeit von $L^p(\mu)$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mu)$. Wir müssen zeigen, dass die Folge in $L^p(\mu)$ konvergiert, also dass es ein $f \in L^p(\mu)$ gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0.$$

Zunächst bemerken wir, dass die Konvergenz einer Teilfolge einer Cauchyfolge die Konvergenz der ganzen Folge nach sich zieht. Man wähle also eine Teilfolge, welche wieder mit (f_n) bezeichnet wird und welche $\|f_n - f_{n+1}\|_{L^p} \leq 2^{-n}$ erfüllt. Wir betrachten den Fall $1 \leq p < \infty$ und lassen $p = \infty$ als Übungsaufgabe. Zunächst zeigen wir, dass f_n μ -f.ü. gegen eine Funktion f konvergiert. Dazu setze

$$h_n = \sum_{k=1}^{n-1} |f_k - f_{k+1}|.$$

Es ist

$$\|h_n\|_{L^p} \stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \sum_{k=1}^{n-1} \|f_k - f_{k+1}\|_{L^p} < 1$$

und der Satz der monotonen Konvergenz liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |h_n|^p d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} |h_n|^p d\mu =: \int |h_\infty|^p d\mu \leq 1.$$

Also ist $h_\infty \in L^p(\mu)$ welches nur auf einer μ -Nullmenge unendlich sein kann. Somit haben wir f.ü. punktweise Konvergenz von

$$f_n = f_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (f_{k+1} - f_k)$$

gegen eine messbare Funktion f . Nun ist wieder (wie im Beweis von Satz 2.5)

$$|f_n|^p \leq 2^{p-1}(|f_1|^p + |h_n|^p) \leq \underbrace{2^{p-1}(|f_1|^p + |h_\infty|^p)}_{=: |g|^p \in L^1}$$

mit $g \in L^p$. Der Satz der dominierten Konvergenz liefert den Rest:

$$f \in L^p \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0.$$

$\square$

Der Raum $L^2(\mu)$ spielt eine besondere Rolle, da er ein Hilbertraum ist.

2.9 Definition. Hilbertraum

Ein vollständiger normierter Raum $\mathcal{H}$, dessen Norm $\|\cdot\|$ durch ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben ist durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

heißt **Hilbertraum**.

2.10 Erinnerung. Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt (oder inneres Produkt) in einem komplexen Vektorraum $\mathcal{H}$ (welcher dann Prä-Hilbertraum heißt), ist eine positiv definite symmetrische Sesquilinearform auf $\mathcal{H}$, d.h. eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit den folgenden Eigenschaften.

Für alle $x, y, z \in \mathcal{H}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

- (i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- (iii) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- (iv) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

2.11 Satz. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann definiert

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\mu) \times L^2(\mu) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle := \int \bar{f}g \, d\mu \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt und macht $L^2(\mu)$ zu einem Hilbertraum.

Beweis. Zunächst zeigt die Hölderungleichung mit $p = q = 2$, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wohldefiniert ist,

$$\int |\bar{f}g| \, d\mu \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} < \infty.$$

Eigenschaft (i) gilt, da $\|\cdot\|_{L^2} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ eine Norm ist und (ii) - (iv) folgen sofort aus den Eigenschaften des Lebesgue-Integrals. Die Vollständigkeit ist Inhalt von Satz 2.7. $\square$

Exkurs Hilberträume

Um in Hilberträumen und insbesondere in $L^2(\mathbb{R}^n)$ wie in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}$ rechnen zu können, fehlt zur Vollständigkeit und zum Skalarprodukt noch der Begriff der Orthonormalbasis:

2.12 Definition. Orthonormalfolge und Orthonormalbasis

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

- (a) Eine Folge (f_j) in $\mathcal{H}$ heißt Orthonormalfolge (ONF), falls

$$\langle f_j, f_k \rangle = \delta_{jk} \quad \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

- (b) Eine ONF (f_j) heißt Orthonormalbasis (ONB), falls für alle $g \in \mathcal{H}$ gilt

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f_j, g \rangle f_j,$$

wobei die Reihe in $\mathcal{H}$ konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| g - \sum_{j=1}^n \langle f_j, g \rangle f_j \right\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

2.13 Bemerkung. Endlichdimensionale Hilberträume sind einfach die Skalarprodukträume der linearen Algebra und besitzen natürlich endliche ONBen im Sinne der Algebra. Unendlichdimensionale Räume besitzen im Allgemeinen keine abzählbaren algebraischen Basen, sondern Basen im Sinne von Definition 2.12, aber nur, wenn sie separabel sind.

2.14 Definition. Separabilität

Ein Hilbertraum (allgemeiner ein topologischer Raum) heißt **separabel**, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

2.15 Satz. Ein Hilbertraum hat genau dann eine abzählbare ONB, wenn er separabel ist.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Sei (f_j) eine ONB in $\mathcal{H}$ dann liegt die abzählbare Menge

$$\left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_j f_j \mid N \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \right\}$$

dicht in $\mathcal{H}$.

„ $\Leftarrow$ “: Sei $(\tilde{f}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dicht in $\mathcal{H}$. Dünne $(\tilde{f}_j)$ zu einer linear unabhängigen Folge (f_j) aus, so dass $\text{span}\{f_j\} = \text{span}\{\tilde{f}_j\}$. Danach wende das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren an. $\square$

2.16 Proposition. Eine ONF (f_j) ist genau dann eine ONB, falls

$$\langle f_j, g \rangle = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad g = 0.$$

In Worten: Eine ONF (f_j) ist Basis, falls nur der Nullvektor auf allen f_j senkrecht steht.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Sei (f_j) eine ONB, dann ist $g = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f_j, g \rangle f_j$ und die Implikation gilt offensichtlich.

„ $\Leftarrow$ “: Sei also $g \in \mathcal{H}$, dann gilt mit der Besselschen Ungleichung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ (Satz 6.6 aus Mathe für Physiker II)

$$\sum_{j=1}^n |\langle f_j, g \rangle|^2 \leq \|g\|^2 < \infty.$$

Also ist

$$g_n := \sum_{j=1}^n \langle f_j, g \rangle f_j$$

eine Cauchyfolge, welche aufgrund der Vollständigkeit von $\mathcal{H}$ konvergiert, sagen wir gegen $\tilde{g} \in \mathcal{H}$. Allerdings gilt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \langle f_j, g - \tilde{g} \rangle &= \langle f_j, \lim_{n \rightarrow \infty} (g - g_n) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_j, g - g_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle f_j, g - \sum_{k=1}^n \langle f_k, g \rangle f_k \right\rangle \\ &= \langle f_j, g \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle f_k, g \rangle \underbrace{\langle f_j, f_k \rangle}_{\delta_{jk}} = 0, \end{aligned}$$

wobei die Stetigkeit des Skalarproduktes verwendet wurde. Nach Voraussetzung ist dann $g - \tilde{g} = 0$ also $g = \tilde{g}$. $\square$

2.17 Bemerkung. Stetigkeit des Skalarprodukts

Die Stetigkeit des Skalarprodukts folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Denn sei $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$, dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle f, g \rangle - \langle f, g_n \rangle| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle f, g - g_n \rangle| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f\| \cdot \|g - g_n\| = 0.$$

2.18 Bemerkung. Parsevalsche Gleichung

Für Orthonormalbasen (f_j) wird aus der Besselschen Ungleichung die Parsevalsche Gleichung:

$$\|g\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j, g \rangle|^2.$$

Beweis.

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle f_j, g \rangle f_j, \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_k, g \rangle f_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle f_j, g \rangle} \langle f_k, g \rangle \underbrace{\langle f_j, f_k \rangle}_{\delta_{jk}} = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j, g \rangle|^2.$$

□

Die Analogie zur Basisdarstellung von Vektoren mittels $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ist jetzt völlig offensichtlich: Anstatt eines n -Tupels von Komponenten erhält man in ∞ -dimensionalen separablen Hilberträumen eine Folge von Komponenten. Wegen Parseval ist diese Folge quadratsummierbar und man führt für diese Folgen eine spezielle Bezeichnung ein.

2.19 Definition. Der Raum ℓ^2 der quadratsummierbaren Folgen

Der Raum der quadratsummierbaren Folgen ist

$$\ell^2 = \left\{ (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid c_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty \right\}.$$

Mit dem Skalarprodukt

$$\langle c, d \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{c_j} d_j$$

ist ℓ^2 ein separabler Hilbertraum.

Beweis. Es ist $\ell^2 = L^2(\mathbb{N}, \nu)$ mit dem Zählmaß ν . Also ist ℓ^2 ein Hilbertraum. Die Folge $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ mit der 1 an der j -ten Stelle ist offensichtlich eine ONB. □

2.20 Bemerkung. Jeder ∞ -dimensionale separable Hilbertraum ist also isomorph zu ℓ^2 , d.h. es gibt eine lineare Isometrie (= unitäre Abbildung)

$$U : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2.$$

Für eine ONB (f_j) ist beispielsweise

$$g \mapsto (Ug)_j = \langle f_j, g \rangle$$

eine solche Isometrie, da

$$\|Ug\|_{\ell^2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j, g \rangle|^2 \stackrel{\text{Parseval}}{=} \|g\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Ein zunächst erstaunliches Faktum ist, dass $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ für $1 \leq p < \infty$ separabel ist.

2.21 Satz. Sei $1 \leq p < \infty$, dann ist $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ separabel.

Beweis. Siehe z.B. Korollar I.2.15 in Werner, *Funktionalanalysis*, Springer. □

2.22 Definition. Orthogonales Komplement

Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ Teilmenge eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$. Dann ist das **orthogonale Komplement** $\mathcal{M}^\perp$ von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{H}$ gegeben durch

$$\mathcal{M}^\perp := \{g \in \mathcal{H} \mid \langle f, g \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{M}\}$$

Es folgt sofort aus der Stetigkeit des Skalarproduktes, dass $\mathcal{M}^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum ist.

Der folgende Projektionssatz liefert die Grundlage für zahlreiche Anwendungen von Hilberträumen.

2.23 Satz. Projektionssatz

Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$. Dann ist

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp,$$

d.h., jeder Vektor $f \in \mathcal{H}$ lässt sich in eindeutiger Weise schreiben als

$$f = g + g^\perp \quad \text{mit} \quad g \in \mathcal{M} \quad \text{und} \quad g^\perp \in \mathcal{M}^\perp.$$

Ist $\mathcal{H}$ separabel und sind (f_j) und $(f_j^\perp)$ ONBen von $\mathcal{M}$ bzw. von $\mathcal{M}^\perp$, so gilt

$$f = \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \langle f_j, f \rangle f_j}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \langle f_j^\perp, f \rangle f_j^\perp}_{\in \mathcal{M}^\perp}.$$

Beweis. Wir zeigen nur den separablen Fall (siehe z.B. Theorem V.3.4 in Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, für den allgemeinen Fall.) Dann sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^\perp$ selbst separable Hilberträume und es existieren ONBen (f_j) und $(f_k^\perp)$ von $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}^\perp$. Wir zeigen zunächst, dass $(f_j) \cup (f_k^\perp)$ eine ONB von $\mathcal{H}$ ist und verwenden Proposition 2.16: Sei $f \in \mathcal{H}$ und

$$\langle f_j, f \rangle = 0 = \langle f_k^\perp, f \rangle \quad \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\langle g, f \rangle = 0$ für alle $g \in \mathcal{M}$, da (f_j) ONB von $\mathcal{M}$ ist, also $f \in \mathcal{M}^\perp$. Da $(f_k^\perp)$ ONB von $\mathcal{M}^\perp$ ist, muss $f = 0$ gelten. Also ist $(f_j) \cup (f_k^\perp)$ ONB von $\mathcal{H}$ und es gilt

$$f = \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \langle f_j, f \rangle f_j}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \langle f_k^\perp, f \rangle f_k^\perp}_{\in \mathcal{M}^\perp}.$$

Diese Zerlegung ist eindeutig, denn sei $f = \tilde{g} + \tilde{g}^\perp$ mit $\tilde{g} \in \mathcal{M}$ und $\tilde{g}^\perp \in \mathcal{M}^\perp$, dann ist

$$0 = f - f = g - \tilde{g} + g^\perp - \tilde{g}^\perp \Rightarrow \underbrace{g - \tilde{g}}_{\in \mathcal{M}} = \underbrace{\tilde{g}^\perp - g^\perp}_{\in \mathcal{M}^\perp} \Rightarrow g - \tilde{g} = \tilde{g}^\perp - g^\perp = 0$$

da $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$. □

2.24 Bemerkung. Orthogonale Projektion

Man kann also auf abgeschlossene Unterräume $\mathcal{M}$ von Hilberträumen $\mathcal{H}$ orthogonal projizieren:

$$P_{\mathcal{M}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad f = g + g^\perp \mapsto P_{\mathcal{M}} f = g.$$

$P_{\mathcal{M}}$ ist eine stetige lineare Abbildung mit

$$P_{\mathcal{M}}^2 = P_{\mathcal{M}} \quad (\text{Projektion})$$

und

$$\langle P_{\mathcal{M}} f, h \rangle = \langle f, P_{\mathcal{M}} h \rangle \quad (\text{symmetrisch} \Rightarrow \text{orthogonal}).$$

Ende Exkurs

3 Produktmaße und der Satz von Fubini

Anschaulich ist klar, dass z.B. das Lebesguemaß λ^2 auf $\mathbb{R}^2$ sich in geeigneter Weise als ein Produkt $\lambda^1 \otimes \lambda^1$ des Lebesguemaßes λ^1 auf $\mathbb{R}$ schreiben läßt, denn Fläche = Länge $\times$ Länge. Wir befassen uns in diesem Kapitel mit der folgenden Frage: Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume. Kann man in natürlicher Weise $X_1 \times X_2$ zu einem Maßraum $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ machen?

3.1 Definition. Produkt- σ -Algebra

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume. Dann bezeichnet $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die von den Mengen der Form $A_1 \times A_2 \subset X_1 \times X_2$, mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$, erzeugte σ -Algebra.

3.2 Bemerkung. Sei $\mathcal{B}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Borel- σ -Algebra auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^1$ (n -mal).

Beweise werden wir in diesem Kapitel aus Zeitgründen oft weglassen oder nur skizzieren. Alle Beweise sind aber mit den bisher bereitgestellten Mitteln zu führen und können beispielsweise in Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, nachgelesen werden.

Wir können nun unsere Ausgangsfrage präzisieren: Kann man auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ auch ein Maß $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ definieren, welches für $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2)$$

erfüllt?

3.3 Bemerkung. Eindeutigkeit des Produktmaßes

Sind $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume, so gibt es höchstens ein Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ so, dass für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2).$$

Beweis. Die Familie $\mathcal{E} := \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ ist ein durchschnittstabiler Erzeuger der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Der Eindeigkeitssatz 1.23 liefert dann die Aussage. $\square$

3.4 Lemma. Messbarkeit von Schnitten

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume und $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Für jedes $x_1 \in X_1$ ist dann

$$A_{x_1} := \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in A\} \in \mathcal{A}_2$$

und für jedes $x_2 \in X_2$ ist

$$A_{x_2} := \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\} \in \mathcal{A}_1.$$

3 Produktmaße und der Satz von Fubini

Beweis. Für $x_1 \in X_1$ setze $\mathcal{G}_{x_1} := \{B \subset X_1 \times X_2 \mid B_{x_1} \in \mathcal{A}_2\}$. Dann ist $\mathcal{G}_{x_1}$ eine σ -Algebra, welche Mengen der Form $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ enthält, da

$$(A_1 \times A_2)_{x_1} = \begin{cases} A_2 & \text{falls } x_1 \in A_1 \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also gilt $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{G}$. □

3.5 Lemma. Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume und $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Dann sind die Funktionen

$$x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1}), \quad x_2 \mapsto \mu_1(A_{x_2})$$

$\mathcal{A}_1$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -messbar bzw. $\mathcal{A}_2$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -messbar.

Beweis. (Skizze). Zeige, dass $\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \mid x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1}) \text{ ist messbar}\}$ eine σ -Algebra ist und dass $A_1 \times A_2 \in \mathcal{M}$ für $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$. □

3.6 Satz. Existenz und Eindeutigkeit des Produktmaßes

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume. Dann existiert auf der Produktalgebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ genau ein Maß μ , so dass für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt:

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu(A_1) \mu(A_2).$$

Dieses Maß μ heißt Produktmaß und wird mit $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ bezeichnet. Es erfüllt

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1 = \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2}) d\mu_2.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit ist Bemerkung 3.3. Zur Existenz: Für $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ setze

$$\mu(A) := \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) d\mu_1$$

Für $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt dann

$$\mu(A_1 \times A_2) = \int_{X_1} \mu_2(A_2) \chi_{A_1} d\mu_1 = \mu_2(A_2) \cdot \mu_1(A_1).$$

Es bleibt zu zeigen, dass μ ein Maß ist: $\mu(\emptyset) = 0$ ist klar. Seien $A_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt und $A := \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann ist

$$\mu_2(A_{x_1}) = \mu_2(\cup_{n=1}^{\infty} A_{n,x_1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_{n,x_1}),$$

da μ_2 ein Maß ist und auch die Schnitte $A_{n,x_1} \in \mathcal{A}_2$ für jedes feste $x_1 \in X_1$ paarweise disjunkt sind. Also folgt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{X_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_{n,x_1}) d\mu_1 = \int_{X_1} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu_2(A_{n,x_1}) d\mu_1 \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_{X_1} \mu_2(A_{n,x_1}) d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass $g_N(x_1) := \sum_{n=1}^N \mu_2(A_{n,x_1})$ eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen ist. Somit folgt die Gleichheit $(*)$ aus dem Satz der monotonen Konvergenz. □

3.7 Korollar. Cavalieris Prinzip

Seien $p, q \geq 1$ und λ^n bezeichne das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Für jede Borel-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ist dann $A_x = \{y \in \mathbb{R}^q \mid (x, y) \in A\}$ bzw. $A_y = \{x \in \mathbb{R}^p \mid (x, y) \in A\}$ Borel-messbar für alle $x \in \mathbb{R}^p$ bzw. $y \in \mathbb{R}^q$. Es gilt

$$\lambda^{p+q}(A) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda^q(A_x) d\lambda^p = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda^p(A_y) d\lambda^q.$$

3.8 Bemerkung. Die Aussage gilt entsprechend für das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, wobei A_x und A_y nur noch fast überall messbar sind.

3.9 Beispiel. Das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$

Sei $B_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq r\}$, dann gilt

$$V_n := \lambda^n(B_1^n) = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!} & \text{für } n = 2k \\ \frac{2^{k+1} \pi^k}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)} & \text{für } n = 2k+1 \end{cases}$$

Insbesondere ist $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$, $V_3 = \frac{4\pi}{3}$ und $V_4 = \frac{\pi^2}{2}$.

Beweis. Induktion nach n : Für $n = 1$ gilt $V_1 = \lambda^1([-1, 1]) = 2$. Der Schritt von n nach $n+1$ folgt mit Cavalieris Prinzip,

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1}(B_1^{n+1}) &= \int_{[-1, 1]} \lambda^n(B_{\sqrt{1-t^2}}^n) d\lambda^1(t) = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^n V_n d\lambda^1(t) \\ &= 2 V_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n+1} du = 2 V_n \begin{cases} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt $t = \cos u$ substituiert haben und der Wert für das Integral aus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} u du = \frac{n}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} u du$$

folgt. Die letzte Formel ist schließlich einfache partielle Integration. $\square$

Nun kommen wir zur Integration beliebiger Funktionen $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ bzgl. eines Produktmaßes. Dazu seien

$$f_{x_1} : X_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, \quad x_2 \mapsto f(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad f_{x_2} : X_1 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, \quad x_1 \mapsto f(x_1, x_2).$$

3.10 Satz. von Tonelli

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume. Sei $f : X_1 \times X_2 \rightarrow [0, \infty]$ eine $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -messbare Funktion. Dann sind auch die Funktionen $f_{x_1} : X_2 \rightarrow [0, \infty]$ und $f_{x_2} : X_1 \rightarrow [0, \infty]$ sowie

$$x_1 \mapsto \int f_{x_1} d\mu_2 \quad \text{und} \quad x_2 \mapsto \int f_{x_2} d\mu_1$$

messbar und es gilt

$$\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f_{x_2} d\mu_1 \right) d\mu_2$$

Beweis. (Skizze). Für einfache Funktionen folgt das Resultat direkt aus der in Satz 3.6 gezeigten Eigenschaft des Produktmaßes. Allgemeine nichtnegative Funktionen kann man wieder durch einfache Funktionen approximieren, wobei einem der Satz von der monotonen Konvergenz die Vertauschung von Limes und Integral erlaubt. $\square$

3.11 Satz. von Fubini

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume und sei $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{C}$ messbar.

(a) Falls

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f|_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 < \infty$$

oder (mit Satz 3.10 äquivalent)

$$\int_{X_2} \left(\int_{X_1} |f|_{x_2} d\mu_1 \right) d\mu_2 < \infty$$

dann ist $f \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$.

(b) Falls $f \in L^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, dann sind die folgenden Funktionen integrierbar:

$$\begin{aligned} f_{x_1} \in L^1(X_2, \mu_2) \quad \text{für fast alle } x_1 \in X_1, \quad & f_{x_2} \in L^1(X_1, \mu_1) \quad \text{für fast alle } x_2 \in X_2, \\ \int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2 \in L^1(X_1, \mu_1) \quad \text{und} \quad & \int_{X_1} f_{x_2} d\mu_1 \in L^1(X_2, \mu_2). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f_{x_2} d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Beweis. (Skizze). Teil (a) folgt direkt aus Tonelli. Teil (b) folgt aus Tonelli für f^+ und f^- . $\square$

3.12 Merkregel. Die Integrationsreihenfolge in Mehrfach-Integralen bzgl. σ -endlicher Maße kann vertauscht werden, wenn

(a) der Integrand festes Vorzeichen hat (Tonelli)

oder

(b) der Integrand integrierbar bzgl. des Produktmaßes ist. Letzteres folgt insbesondere, wenn das iterierte Integral $\int (\int |f| d\mu_1) d\mu_2$ über $|f|$ in einer der möglichen Integrationsreihenfolgen endlich ist.

3.13 Beispiel. Wir geben ein einfaches Beispiel, in dem die Voraussetzung des Satzes von Fubini dass $f \in L^1$ nicht erfüllt ist, und daher die Integrationsreihenfolge bei den iterierten Integralen wichtig ist: Für $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x) \cdot \chi_{[y, y+2\pi]}(x)$ ist

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_y^{y+2\pi} \sin(x) dx \right) dy = 0,$$

aber

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = 2\pi \sin(x)$$

ist nicht integrierbar. Da

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_y^{y+2\pi} |\sin(x)| dx \right) dy = \infty,$$

ist f nicht integrierbar und der Satz von Fubini greift nicht.

4 Die Transformationsformel

Wir betrachten im Folgenden auch Funktionen, die auf Gebieten $D \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind. Dazu einige simple Vorbemerkungen:

4.1 Definition. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathcal{A}$, so schreibt man für eine messbare Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty]$ bzw. integrierbares $f : X \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_Y f \, d\mu := \int_X f \chi_Y \, d\mu,$$

wobei χ_Y wie immer die charakteristische Funktion auf Y bezeichne.

4.2 Bemerkung. Ist $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ die Restriktion von $(X, \mathcal{A}, \mu)$ auf $Y \in \mathcal{A}$, so gilt für die triviale Fortsetzung $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{C}$ einer Funktion $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$, also

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in Y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

dass $\tilde{f}$ messbar ist und

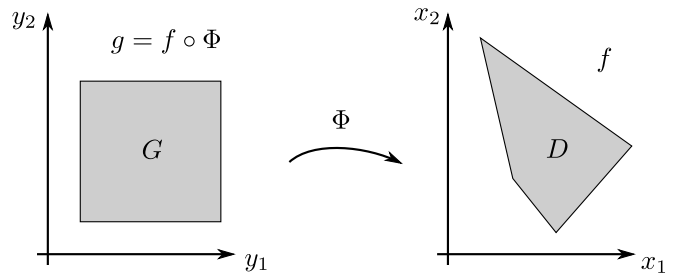
$$\int f \, d\mu_Y = \int \tilde{f} \, d\mu = \int_Y f \, d\mu.$$

Wir wenden uns nun der folgenden Frage zu:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion. Sei

$$\Phi : G \rightarrow D, \quad y \mapsto \Phi(y) = x$$

ein „Koordinatenwechsel“, d.h. ein Diffeomorphismus von einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ nach D . Wie „transformiert“ sich dann das „ x -Integral“



$$\int_D f(x) \, dx \quad \text{in ein „}y\text{-Integral“ für } f \circ \Phi(y) \text{ über } G?$$

4.3 Satz. Transformationsformel

Seien $D, G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und $\Phi : G \rightarrow D, y \mapsto \Phi(y) = x$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann ist auch die Funktion

$$\begin{aligned} g : G &\rightarrow \mathbb{C} \\ y &\mapsto g(y) = f \circ \Phi(y) \cdot |\det D\Phi(y)| \end{aligned}$$

messbar und es gilt: f ist genau dann integrierbar, wenn g es ist und in diesem Fall gilt

$$\int_D f(x) \, dx = \int_G g(y) \, dy.$$

Den Beweis werden wir im Laufe dieses Kapitels entwickeln.

4 Die Transformationsformel

4.4 Bemerkung. (a) Man nennt die Funktion

$$\begin{aligned} J_\Phi : G &\rightarrow (0, \infty) \\ y &\mapsto J_\Phi(y) = |\det D\Phi(y)| \end{aligned}$$

die **Funktional- oder Jacobideterminante** von Φ . Symbolisch merkt man sich die „Transformationsformel“ für $x = \Phi(y)$ durch

$$dx = „\frac{dx}{dy} dy“ = |\det D\Phi(y)| dy.$$

(b) Für $n = 1$ ist die Transformationsformel einfach die Substitutionsregel.

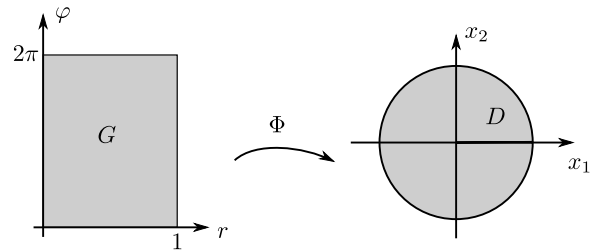
4.5 Beispiel. Fläche des Einheitskreises in Polarkoordinaten

Sei $D = \Delta \setminus \{(x_1, 0) : x_1 \geq 0\}$ und $\Delta = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, sowie

$$\begin{aligned} \Phi : (0, 1) \times (0, 2\pi) &\rightarrow D \\ (r, \varphi) &\mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \end{aligned}$$

Es ist Φ ein Diffeomorphismus und für die Jacobideterminante J_Φ gilt

$$J_\Phi(y) = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$



Weil $\bar{\Delta} \setminus D$ eine Nullmenge ist, gilt mit $f = 1$

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{\Delta}) &= \int_{\bar{\Delta}} dx_1 dx_2 = \int_D dx_1 dx_2 \stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{(0,1) \times (0,2\pi)} r dr d\varphi \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) r dr = 2\pi \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^1 = \pi. \end{aligned}$$

4.6 Korollar. Transformationssatz für Maße

Sei $\Phi : G \rightarrow D$ ein Diffeomorphismus und $J_\Phi : G \rightarrow (0, \infty)$ seine Jacobideterminante. Dann gilt für jede messbare Menge $B \subset G$, dass

$$\lambda(\Phi(B)) = \int_B J_\Phi(y) dy.$$

Beweis. Mit $f := \chi_{\Phi(B)}$ ist $f \circ \Phi = \chi_B$ und somit

$$\lambda(\Phi(B)) = \int_D \chi_{\Phi(B)} dx = \int_G \chi_B J_\Phi dy = \int_B J_\Phi(y) dy.$$

□

Wir werden im Folgenden dieses Korollar nochmals direkt beweisen und dann den Transformationssatz 4.3 aus seinem Korollar folgern. Zunächst aber noch etwas Begriffsbildung:

4.7 Definition. Bildmaß

- (a) Ist $F : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{C})$ eine messbare Abbildung und μ ein Maß auf X , so nennt man das Maß $\nu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$

$$\nu(B) := \mu(F^{-1}(B))$$

das **Bildmaß von μ unter F** und schreibt

$$\nu = F_*\mu.$$

- (b) Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\varrho : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar, so nennt man das Maß $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\tilde{\mu}(A) := \int_A \varrho \, d\mu$$

das **Maß mit Dichte ϱ bzgl. μ** und schreibt

$$\tilde{\mu} = \varrho\mu.$$

4.8 Bemerkung. Für $\varrho \equiv 1$ ist $\tilde{\mu} = \mu$. Man stellt sich $\tilde{\mu}$ so vor, dass im Vergleich zu μ nun jeder Punkt $x \in X$ das „Gewicht“ $\varrho(x) \geq 0$ bekommt.

Mit dieser Notation besagt die Transformationsformel für Maße gerade, dass

$$\Phi_*^{-1}\lambda_D = J_\Phi\lambda_G,$$

also, dass das Bildmaß von λ_D unter Φ^{-1} gerade das Maß λ_G mit Dichte J_Φ ist, denn

$$(\Phi_*^{-1}\lambda_D)(B) = \lambda_D(\Phi(B)) = \int_B J_\Phi \, d\lambda_G = (J_\Phi\lambda_G)(B),$$

für alle messbaren $B \subset G$.

4.9 Lemma. Satz 4.3 ist äquivalent zu seinem Korollar.

Beweis. Die Richtung „ $\Rightarrow$ “ ist bereits gezeigt. Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Transformationsformel für Maße (also für charakteristische Funktionen) die Trafo-Formel für messbare bzw. integrierbare Funktionen impliziert.

- (a) **Trafo für einfache Funktionen:**

Sei $g = \sum_{j=1}^r \alpha_j \chi_{A_j}$, $\alpha_j \geq 0$ und $A_j \subset D$ messbar, dann ist

$$g \circ \Phi = \sum_{j=1}^r \alpha_j \chi_{\Phi^{-1}(A_j)}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_D g(x) \, dx &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \lambda(A_j) \stackrel{\text{Kor. 4.6}}{=} \sum_{j=1}^r \alpha_j \int_{\Phi^{-1}(A_j)} J_\Phi \, dy \\ &= \int_G \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j \chi_{\Phi^{-1}(A_j)} \right) J_\Phi(y) \, dy = \int_G (g \circ \Phi) J_\Phi \, dy. \end{aligned}$$

- (b) **Trafo für positive messbare Funktionen $f : D \rightarrow [0, \infty]$:**

Sei (f_n) eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{T}(D)$ mit $(f_n) \nearrow f$. Dann gilt für $g_n := (f_n \circ \Phi) \cdot J_\Phi$, dass $g_n \geq 0$ und $(g_n) \nearrow g = f \circ \Phi \cdot J_\Phi$. Mit monotoner Konvergenz folgt also

$$\int_D f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n(x) \, dx \stackrel{(a)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G g_n(y) \, dy = \int_G g(y) \, dy.$$

4 Die Transformationsformel

(c) **Trafo für integrierbare Funktionen** $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$:

Mit f ist auch $g := f \circ \Phi \cdot J_\Phi$ messbar und es gilt $g_+ = (f_+ \circ \Phi) \cdot J_\Phi$ und $g_- = (f_- \circ \Phi) J_\Phi$. Also folgt mit Teil (b), dass mit f auch g integrierbar ist und

$$\int_D f \, dx = \int f_+ \, dx - \int f_- \, dx = \int g_+ \, dy - \int g_- \, dy = \int g \, dy.$$

□

Der schwierige Teil ist nun, die Transformationsformel für Maße zu zeigen. Dazu erinnern wir uns an die lineare Algebra und zeigen zunächst die Formel für lineare Abbildungen:

4.10 Lemma. Ist $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear, so gilt für jede Borel-Menge $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\lambda(TB) = |\det T| \cdot \lambda(B).$$

Beweis. Für $\det T = 0$ ist $T(B) \subset T(\mathbb{R}^n) =: H$ in einer Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ enthalten.

Um zu sehen, dass $\lambda(H) = 0$ gilt, sei $j \in \{1, \dots, n\}$ so, dass $e_j \notin H$. Dann ist

$$\lambda(H) = \int \underbrace{\lambda^1(H_{\hat{x}_j})}_{=0} \, d\lambda^{n-1} = 0,$$

wobei wir $x = (x_1, \dots, x_n)$ in $x_j \in \mathbb{R}$ und $\hat{x}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ aufgespalten haben. Da die Schnitte $H_{\hat{x}_j}$ jeweils nur aus einem Punkt bestehen, ist $\lambda^1(H_{\hat{x}_j}) = 0$.

Sei nun $\det T \neq 0$. Dann ist das Bildmaß $\mu(B) = \lambda(TB)$ offensichtlich σ -endlich und es genügt, gemäß Eindeutigkeitssatz, μ auf dem $\cap$ -stabilen Erzeuger der Rechtecke zu betrachten. Aufgrund der Translationsinvarianz von λ können wir uns auf Rechtecke der Form

$$R(a_1, \dots, a_n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_j \leq a_j\}$$

beschränken. Wir müssen also $\mu(R(a_1, \dots, a_n)) = \lambda(TR(a_1, \dots, a_n))$ bestimmen. Das haben wir aber bereits in der linearen Algebra (Satz 4.14 aus MaPhy 2) getan: Das von den Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ aufgespannte Parallelotop hat das „Volumen“ $V(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = |\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)|$. Dieser Volumenbegriff ist eindeutig durch die Forderungen nach

- (a) **Homogenität in jeder Richtung:** $V(\vec{v}_1, \dots, \alpha \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n) = |\alpha| V(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- (b) **Cavalierisches Prinzip:** $V(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j + \alpha \vec{v}_k, \dots, \vec{v}_n) = V(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \quad \forall k \neq j \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}$
- (c) **Normierung:** $V(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$

festgelegt. Da wir genau diese Eigenschaften auch vom Lebesguemaß λ gezeigt haben, muss aufgrund der Eindeutigkeit

$$\lambda(TR(a_1, \dots, a_n)) = V(a_1 T\vec{e}_1, \dots, a_n T\vec{e}_n) = \prod_{j=1}^n |a_j| \det |T| = \det |T| \lambda(R)$$

gelten. □

Damit ist klar, dass für nichtlineare Diffeomorphismen Φ die Determinante $J_\Phi = |\det D\Phi|$ der Linearisierung $D\Phi$ die neue Dichte liefert. Um das auch zu beweisen, brauchen wir folgendes Lemma.

4.11 Lemma. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K . Dann existiert ein $\lambda > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: für jedes $x \in K$ gibt es ein $i \in I$, so dass $B_\lambda(x) \subset U_i$. So ein λ heißt dann eine **Lebesgue-Zahl** von K für $\mathcal{U}$.

Beweis. Angenommen die Aussage gilt nicht. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \cap U_i^c \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Da K kompakt ist, hat die so definierte Folge (x_n) einen Häufungspunkt x in K . Da $\mathcal{U}$ das Kompaktum K überdeckt, gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da U_j offen ist, gilt $B_\varepsilon(x) \subset U_j$ für ein $\varepsilon > 0$. Nun sei n so, dass $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, also $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n) \subset U_j$ im Widerspruch zu $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \cap U_j^c \neq \emptyset$. $\square$

4.12 Lemma. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\varrho : G \rightarrow (0, \infty)$ eine stetige Funktion. Sei μ ein Maß auf der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}^n$. Dann sind äquivalent:

- (a) μ ist das Maß mit Dichte ϱ bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes λ .
- (b) Zu jedem $y_0 \in G$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subset G$ von y_0 , so dass für alle offenen $V \subset U_0$ gilt:

$$|\mu(V) - \varrho(y_0)\lambda(V)| < \varepsilon\lambda(V).$$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $y_0 \in G$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da ϱ stetig ist, gibt es eine Umgebung U_0 von y_0 mit $|\varrho(y) - \varrho(y_0)| < \varepsilon$ für alle $y \in U_0$. Für offenes $V \subset U_0$ gilt also:

$$|\mu(V) - \varrho(y_0)\lambda(V)| = \left| \int_V (\varrho(y) - \varrho(y_0)) d\lambda \right| \leq \int_V |\varrho(y) - \varrho(y_0)| d\lambda \leq \varepsilon \int_V d\lambda = \varepsilon\lambda(V).$$

(b) $\Rightarrow$ (a): Die abgeschlossenen Quader $\bar{Q} \subset G$ sind durchschnittsstabil und erzeugen die Borel- σ -Algebra auf G . Aufgrund des Eindeutigkeitsatzes reicht es daher zu zeigen, dass $(\varrho\lambda)(\bar{Q}) = \mu(\bar{Q})$ für alle abgeschlossenen Quader $\bar{Q}$ gilt. Sei nun $\bar{Q} \subset G$ ein Quader und $\varepsilon > 0$. Zu jedem $y \in \bar{Q}$ sei $U_y \subset G$ mit der Eigenschaft (b) gewählt und zusätzlich so, dass $|\varrho(x) - \varrho(y)| < \varepsilon$ für alle $x \in U_y$. Nach Lemma 4.11 gibt es eine Zahl $a > 0$ so, dass jeder Quader mit Kantenlängen kleiner gleich a ganz in einem U_y enthalten ist. Überdecke nun $\bar{Q}$ mit solchen (teilweise halboffenen) Quadern $Q_1, \dots, Q_m$,

$$\bar{Q} = Q_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} Q_m.$$

Es sei $Q_j \subset U_{y_j}$. Nun rechne:

$$\begin{aligned} |\mu(\bar{Q}) - \varrho\lambda(\bar{Q})| &= \left| \sum_{j=1}^m (\mu(Q_j) - \varrho\lambda(Q_j)) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left\{ |\mu(Q_j) - \varrho(y_j)\lambda(Q_j)| + |\varrho(y_j)\lambda(Q_j) - \int_{Q_j} \varrho(y) dy| \right\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^m \left\{ |\mu(Q_j^\circ) - \varrho(y_j)\lambda(Q_j^\circ)| + \int_{Q_j} |\varrho(y_j) - \varrho(y)| dy \right\} \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^m \lambda(Q_j^\circ) + \varepsilon \sum_{j=1}^m \lambda(Q_j) = 2\varepsilon\lambda(Q). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\mu(\bar{Q}) = \varrho\lambda(\bar{Q})$ und somit $\mu = \varrho\lambda$.

In (*) haben wir $\mu(Q_j) = \mu(Q_j^\circ)$ verwendet, was aus $\mu(\partial Q_j) = 0$ folgt. Letzteres folgt aus (b) und $\lambda(\partial Q_j) = 0$. $\square$

4.13 Bemerkung. Absolutstetigkeit und der Satz von Radon-Nikodym

Falls $\tilde{\mu} = \varrho\mu$ mit $\varrho : X \rightarrow [0, \infty]$ messbar, so gilt

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mu}(A) = \int_A \varrho d\mu = 0.$$

4 Die Transformationsformel

Sind ν und μ Maße auf $(X, \mathcal{A})$ und gilt

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

so nennt man ν absolutstetig bzgl. μ und $\mathcal{A}$ und schreibt

$$\nu \ll_{\mathcal{A}} \mu.$$

Der Satz von Radon-Nikodym besagt nun, dass für σ -endliche Maße ν und μ gilt: Falls $\nu \ll_{\mathcal{A}} \mu$, dann existiert eine messbare, fast überall eindeutig bestimmte Dichte $\varrho : X \rightarrow [0, \infty]$ so, dass

$$\nu(A) = \int_A \varrho \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Diese Dichte ϱ heißt dann Radon-Nikodym-Ableitung und man schreibt

$$\varrho = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

4.14 Lemma. Seien $G, D \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und $\Phi : G \rightarrow D$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann gilt: Für jedes $y_0 \in G$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Umgebung $U_0 \subset G$ von y_0 , so dass für jedes offene $V \subset U_0$

$$|\lambda_D(\Phi(V)) - J_\Phi(y_0)\lambda_G(V)| < \varepsilon\lambda_G(V)$$

gilt.

4.15 Bemerkung. Zusammen mit Lemma 4.12 beweist Lemma 4.14 das Korollar 4.6 und somit auch den Transformationssatz.

Beweis. (von Lemma 4.14). Sei $y_0 \in G$, $\varepsilon > 0$ und $T = D\Phi(y_0)$. Angenommen, Lemma 4.14 wäre für den Fall $T = E_n$ schon bewiesen. Für den Fall $T \neq E_n$ setze man dann $\tilde{D} = T^{-1}(D)$ und

$$\tilde{\Phi} : G \rightarrow \tilde{D}, \quad \tilde{\Phi} = T^{-1} \circ \Phi.$$

Dann ist $D\tilde{\Phi}(y_0) = T^{-1} \cdot D\Phi(y_0) = T^{-1}T = E_n$, und nach Annahme existiert für $\tilde{\Phi}$ zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{|\det T|}$ eine geeignete Umgebung U_0 von y_0 . Es gilt also für jedes offene $V \subset U_0$, dass

$$\begin{aligned} |\lambda_D(\Phi(V)) - J_\Phi(y_0)\lambda_G(V)| &= |\lambda_D(T(\tilde{\Phi}(V)) - J_{T \circ \tilde{\Phi}}(y_0)\lambda_G(V)| \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.10}}{=} \left| |\det T| \lambda_{\tilde{D}}(\tilde{\Phi}(V)) - |\det T| \cdot J_{\tilde{\Phi}}(y_0) \lambda_G(V) \right| \\ &\leq |\det T| \tilde{\varepsilon} \lambda_G(V) = \varepsilon \lambda_G(V). \end{aligned}$$

Wir haben hier

$$J_{T \circ \tilde{\Phi}} = |\det D(T \circ \tilde{\Phi})| = |\det T D\tilde{\Phi}| = |\det T| \det D\tilde{\Phi} = |\det T|$$

verwendet.

Es bleibt also der Fall $D\Phi(y_0) = 1$ zu zeigen. Sei dazu $\varepsilon' > 0$ so klein, dass $(1 + \varepsilon')^n \leq 1 + \varepsilon$ ist. Da $y \mapsto D\Phi(y)$ stetig ist, gibt es eine Umgebung $U_1 \subset G$ von y_0 , so dass $\|D\Phi(y)\| < 1 + \varepsilon'$ ist für $y \in U_1$. (Hier bezeichnet $\|\cdot\|$ die Operatornorm bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm auf $\mathbb{R}^n$: Es gilt also $\|D\Phi(y)z\|_\infty \leq (1 + \varepsilon')\|z\|_\infty$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$ und $y \in U_1$). Also gilt mit dem Mittelwertsatz auf jedem Würfel $W \subset U_1$

$$\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\|_\infty = \|D\Phi(\xi) \cdot (z_1 - z_2)\|_\infty \leq (1 + \varepsilon')\|z_1 - z_2\|_\infty$$

für $z_1, z_2 \in W$ und $\xi \in [z_1, z_2]$.

Für jeden Würfel $W \subset U_1$ mit Kantenlänge $a \geq 0$ ist also $\Phi(W)$ in einem Würfel der Kantenlänge $(1 + \varepsilon')a$ enthalten. Insbesondere gilt

$$\lambda_D(\Phi(W)) \leq (1 + \varepsilon')^n \lambda_G(W) \leq (1 + \varepsilon) \lambda_G(W)$$

für jeden Würfel W in U_1 . Da jedes offene $V \subset U_1$ abzählbare disjunkte Vereinigung von halboffenen Würfeln ist, folgt

$$(*) \quad \lambda_D(\Phi(V)) \leq (1 + \varepsilon) \lambda_G(V)$$

für alle offenen $V \subset U_1$.

Die gleiche Argumentation wendet man auf $\Phi^{-1} : D \rightarrow G$ in $x_0 = \Phi(y_0)$ an und findet ein offenes $A \subset D$ mit $x_0 \in A$, so dass für alle offenen $B \subset A$ gilt:

$$\lambda_G(\Phi^{-1}(B)) \leq (1 + \varepsilon) \lambda_D(B).$$

Setzt man schließlich $U_0 := U_1 \cap \Phi^{-1}(A)$, so gilt für alle $V \subset U_0$ offen sowohl $(*)$ als auch

$$\lambda_D(\underbrace{\Phi(V)}_{\subset A}) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \lambda_G(V) \geq (1 - \varepsilon) \lambda_G(V),$$

also insgesamt $|\lambda_D(\Phi(V)) - \lambda_G(V)| \leq \varepsilon \lambda_G(V)$. □

4.16 Bemerkung. Etwas Terminologie aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die in den bisherigen Kapiteln vorgestellten Begriffe tauchen teilweise unter etwas anderen Namen auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie auf. An dieser Stelle sollen einige von Ihnen zumindest kurz erwähnt werden.

Eine Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit einem normierten Maß $\mu(X) = 1$ heißt **Wahrscheinlichkeitsraum** und μ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**. Die Punkte in X heißen **Elementarereignisse**, die messbaren Teilmengen $A \in \mathcal{A}$ heißen **Ereignisse**. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis $A \in \mathcal{A}$ eintritt ist dann durch $\mu(A)$ gegeben.

Sei $(Y, \mathcal{C})$ ein weiterer Messraum. Eine messbare Abbildung $F : X \rightarrow Y$ wird **Zufallsvariable** genannt und das Bildmaß $F_*\mu$ auf $(Y, \mathcal{C})$ ihre **Verteilung**. Wegen $F_*\mu(Y) = \mu(F^{-1}(Y)) = \mu(X) = 1$ ist auch $F_*\mu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Sei beispielsweise $X^{(1)} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der Raum der möglichen Ergebnisse beim Würfeln mit einem Würfel. Ein fairer Würfel ist durch das W'Maß $\mu^{(1)} = \frac{1}{6}\nu$ beschrieben, wobei ν das Zählmaß bezeichne. Das zweimalige Würfeln mit einem solchen Würfel ist dann auf dem W'raum $X^{(2)} = X^{(1)} \times X^{(1)}$ mit $\mu^{(2)} = \mu^{(1)} \otimes \mu^{(1)} = \frac{1}{36}\nu$ beschrieben. Wieder hat jedes Elementarereignis $(x_1, x_2) \in X^{(2)}$ die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $\frac{1}{36}$. Eine in vielen Spielen relevante Zufallsvariable ist die Summe der beiden Würfelresultate, also

$$S : X^{(2)} \rightarrow \{2, 3, \dots, 11, 12\}, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2.$$

Die Verteilung dieser Zufallsvariable ist das W'Maß $S_*\mu^{(2)}$ auf $\{2, \dots, 12\}$ gegeben durch

$$S_*\mu^{(2)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{falls } y \in \{2, 12\} \\ \frac{2}{36} & \text{falls } y \in \{3, 11\} \\ \frac{3}{36} & \text{falls } y \in \{4, 10\} \\ \frac{4}{36} & \text{falls } y \in \{5, 9\} \\ \frac{5}{36} & \text{falls } y \in \{6, 8\} \\ \frac{6}{36} & \text{falls } y = 7. \end{cases}$$

Als weiteres, physikalisch relevantes Beispiel sei $X = [0, L]^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ der klassische Phasenraum eines Systems aus N Teilchen in einer Box mit Seitenlänge $L > 0$ und Hamiltonfunktion $H :$

4 Die Transformationsformel

$X \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist die kanonische Verteilung μ_β (oft auch kanonisches Ensemble) zur Temperatur $T = \beta^{-1}$ das Maß mit der Dichte

$$\rho(q, p) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(q, p)}$$

relativ zum Lebesguemaß λ^{6N} auf X , also $\mu_\beta = \rho \lambda$. Beispiele für physikalisch relevante Zufallsvariablen wären dann die Gesamtenergie H , der mittlere Impuls $\bar{P} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(q, p) \mapsto \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_j$ oder bei identischen Teilchen auch der Impuls eines beliebigen Teilchens, z.B. des Ersten: $P : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(q, p) \mapsto p_1$. Für ein freies Gas mit Hamiltonfunktion $H(q, p) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^N |p_j|^2$ ist die Verteilung von P dann durch die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung gegeben,

$$P_* \mu_\beta(A) = \frac{1}{Z} \int_{[0, L]^{3N}} d^{3N} q \int_A d^3 p \int_{\mathbb{R}^{3(N-1)}} d^3 p_2 \dots d^3 p_N e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} e^{-\beta \frac{1}{2m} \sum_{j=2}^N |p_j|^2} = C \int_A e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} d^3 p,$$

wobei C wieder die Normierung sicherstellt. Betrachtet man nun noch $|P| : X \rightarrow [0, \infty)$, so ergibt sich

$$|P|_* \mu_\beta(A) = 4\pi C \int_A y^2 e^{-\frac{\beta y^2}{2m}} dy.$$

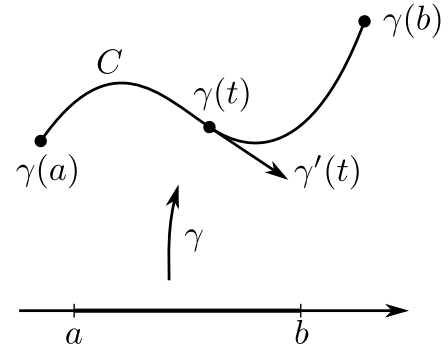
5 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Eine **regulär parametrisierte Kurve** ist gegeben durch eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$. Ist $C := \gamma((a, b)) \subset \mathbb{R}^n$ und $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so setzt man in Verallgemeinerung der Transformationsformel für $n = 1$

$$\int_C f(s) ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{|\gamma'(t)| dt}_{\text{“Längenelement“}}.$$



Dieses Wegintegral ist unabhängig von der Parametrisierung: Sei $\tilde{\gamma} : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere Parametrisierung von C , so ist $\varphi = \gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ ein Diffeomorphismus und

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\tilde{\gamma}(t)) |\tilde{\gamma}'(t)| dt &= \int_c^d f(\gamma(\varphi(t))) |\gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t)| dt \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\gamma(\tau)) |\gamma'(\tau)| \frac{|\varphi'(t)|}{\varphi'(t)} d\tau = \int_a^b f(\gamma(\tau)) |\gamma'(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Die Bogenlänge von C ist gegeben durch

$$L(C) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Wir definieren im Folgenden analog regulär parametrisierte Flächen $S \subset \mathbb{R}^n$ oder allgemeiner regulär parametrisierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$.

Da wir stetige Funktionen auf S bzw. M betrachten wollen, vorher ein paar topologische Vorüberlegungen:

5.1 Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **offen in M** oder **relativ offen bzgl. M** , wenn es eine offene Menge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, mit $U = M \cap \tilde{U}$.

5.2 Beispiel. • Wegen $M = M \cap \mathbb{R}^n$ ist jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ offen in sich selbst.

- $[0, \frac{1}{2})$ ist offen in $[0, 1]$.

Die offenen Mengen in $M \subset \mathbb{R}^n$ bilden eine Topologie $O(M)$, die so genannte Relativtopologie. Sie macht M zu einem topologischen Raum:

- (i) $\emptyset, M \in O(M)$ (= sind offen in M)
- (ii) $U_1, U_2 \in O(M) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in O(M)$, da $U_1 = \tilde{U}_1 \cap M$ und $U_2 = \tilde{U}_2 \cap M$ impliziert, dass $U_1 \cap U_2 = (\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2) \cap M \in O(M)$, wobei $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist.
- (iii) $(U_j)_{j \in I}$ offen in $M \Rightarrow \bigcup U_j = \bigcup (\tilde{U}_j \cap M) = (\bigcup \tilde{U}_j) \cap M \in O(M)$.

5.3 Erinnerung. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **stetig**, falls Urbilder offener Mengen offen sind. Sie heißt ein **Homöomorphismus**, wenn sie stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion ist.

5.4 Definition. Regulär parametrisierte Untermannigfaltigkeit

Sei $1 \leq k \leq n$ und $V \subset \mathbb{R}^k$ ein Gebiet (also offen und wegzusammenhängend). Eine **regulär parametrisierte Untermannigfaltigkeit der Dimension k des $\mathbb{R}^n$** ist gegeben durch eine stetig partiell differenzierbare Abbildung

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

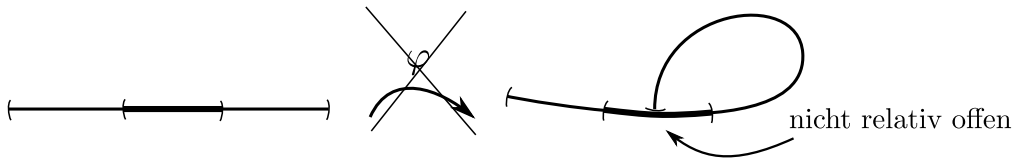
so dass gilt:

- (a) Ist $M = \varphi(V)$, so ist $\varphi : V \rightarrow M$ ein Homöomorphismus (insbesondere ist φ injektiv).
- (b) Für alle $t \in V$ ist $\text{rang}(D\varphi(t)) = k$.

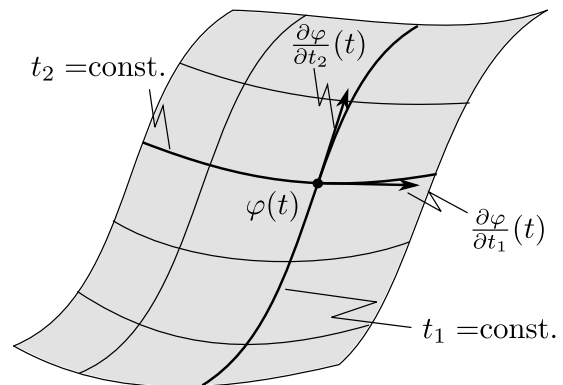
Für $k = 1$ nennt man φ eine Kurve, für $k = 2$ eine Fläche und für $k = n - 1$ eine Hyperfläche.

5.5 Bemerkung. Die Bedingungen in Definition 5.4 haben die folgenden direkten Konsequenzen bzw. Bedeutungen:

- (a) $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig $\Rightarrow M$ ist wegzusammenhängend
- (b) φ injektiv $\Rightarrow M$ hat keine Selbstüberschneidungen
- (c) $\varphi^{-1} : M \rightarrow V$ stetig $\Rightarrow$ keine Selbstberührungspunkte, da Bilder offener Mengen dann relativ offen sein müssen



- (d) $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow M$ ist glatt, hat also keine Ecken und Kanten
- (e) $\text{rang}(D\varphi(t)) = k \Rightarrow$ die partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}\right)$ sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$ und der von ihnen aufgespannte Tangentialraum hat Dimension k .



5.6 Beispiel. (a) Ebene: Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und $E = \text{span}(u, v) \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$, $(t_1, t_2) \mapsto t_1 u + t_2 v$ eine regulär parametrisierte Fläche.

(b) Zylinder: Durch

$$\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t_1, t_2) \mapsto (\cos(t_1), \sin(t_1), t_2)$$

wird der Kreiszylinder $Z = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ ohne die Mantellinie $\{(1, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$ regulär parametrisiert: mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} = (-\sin(t_1), \cos(t_1), 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} = (0, 0, 1)$$

sind $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right)$ linear unabhängig für alle t .

(c) Sphäre: Durch

$$\varphi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t_1, t_2) \mapsto (\sin(t_1) \cos(t_2), \sin(t_1) \sin(t_2), \cos(t_1))$$

wird die Sphäre

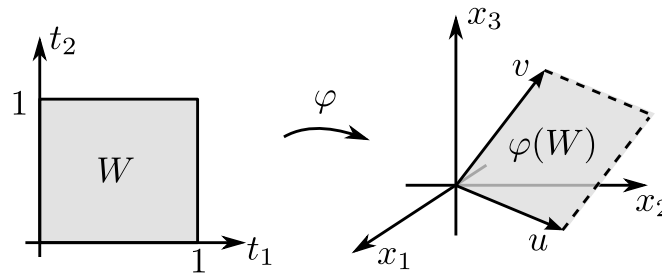
$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

ohne den Nullmeridian regulär parametrisiert.

5.7 Bemerkung. Die ganze Sphäre kann nicht homöomorphes Bild einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^2$ sein, denn sie ist kompakt als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ und somit auch relativ-kompakt. Und Homöomorphismen bilden Kompakta auf Kompakta ab. Aber S^2 ist, wie wir sehen werden, trotzdem eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Bevor wir den allgemeineren Mannigfaltigkeitsbegriff einführen, wollen wir uns zunächst überlegen, wie man auf regulär parametrisierten Untermannigfaltigkeiten integriert. Was ist also die richtige Verallgemeinerung des „Längenelements“ $|\gamma'(t)| dt$ für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten?

Beginnen wir mit linearen Flächen: Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t_1, t_2) \mapsto t_1 u + t_2 v$. Wie groß ist dann der „Flächeninhalt“ des Parallelogramms $\varphi(W) \subset \mathbb{R}^3$ für $W = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$?



Die ganz naive Antwort $\text{Vol}_2(\varphi(W)) = „\det(u, v)“$ funktioniert nicht, da $(u \ v) \in \text{Mat}(3 \times 2)$ nicht quadratisch ist. Wir müssen $\varphi(W)$ wieder in die Ebene zurückholen: Sei $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Transformation so, dass für $E = \text{span}(u, v)$ gilt $S(E) = \{x_3 = 0\}$. Sei weiter $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$ und setze $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A = \pi \circ S \circ \varphi$. Nun ist

$$\text{Vol}_2(\varphi(W)) = \text{Vol}_2(A(W)) = \lambda^2(AW) = |\det A| \lambda^2(W) = \sqrt{\det A^T A} = \sqrt{\det((D\varphi)^T D\varphi)},$$

da

$$A^T A = (D\varphi)^T S^T \pi^T \pi S D\varphi = (D\varphi)^T S^T S D\varphi = (D\varphi)^T D\varphi.$$

Wir haben verwendet, dass $\pi^T \pi = E_3$ auf dem Bild von $S \circ \varphi$ und $S^T S = E_3$. Mit

$$D\varphi = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \quad \text{ergibt sich} \quad (D\varphi)^T \cdot D\varphi = \begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix}.$$

Allgemein stellen wir also fest: Für $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ transformiert sich das Volumenelement mit $J_\varphi = |\det D\varphi|$. Für $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ verallgemeinert sich das zu $J_\varphi = \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi)}$.

5.8 Definition. Maßtensor, Gramsche Determinante und Jakobische

Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ ein Gebiet und $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Untermannigfaltigkeit. Für jedes $t \in V$ nennt man

$$G(t) = (D\varphi(t))^T \cdot D\varphi(t) \in \text{Mat}(k, \mathbb{R})$$

5 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

den **Maßtensor von φ in t** . Es heißt

$$g(t) = \det G(t)$$

die **Gramsche Determinante von φ in t** und

$$J_\varphi(t) = \sqrt{g(t)}$$

die **Jacobische von φ in t** .

5.9 Bemerkung. $G(t)$ ist offensichtlich symmetrisch und auch positiv definit, denn für $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ ist

$$\langle x, Gx \rangle_{\mathbb{R}^k} = \langle x, D\varphi^T \cdot D\varphi x \rangle_{\mathbb{R}^k} = \langle D\varphi x, \underbrace{D\varphi x}_{\neq 0} \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0,$$

da $D\varphi$ vollen Rang hat. Insbesondere wird durch $\langle x, y \rangle_{G(t)} = \langle x, G(t)y \rangle_{\mathbb{R}^k}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^k$ definiert.

5.10 Definition. Das Integral auf regulär parametrisierten Untermannigfaltigkeiten

Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ ein Gebiet und $\varphi : V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Untermannigfaltigkeit. Man nennt eine Funktion $f : M \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ **messbar** bzw. **integrierbar**, wenn $h : V \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$,

$$h(t) = (f \circ \varphi(t)) \cdot J_\varphi(t)$$

es ist. Im integrierbaren Fall setzt man nun:

$$\int_M f \, dS := \int_V f \circ \varphi \cdot J_\varphi \, dt,$$

wobei dt die Integration bezüglich des k -dimensionalen Lebesguemaßes bezeichne. Insbesondere heißt eine Menge $B \subset M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, wenn $\varphi^{-1}(B) \subset V$ messbar ist und ihr k -dimensionales Volumen $\text{Vol}_k(B)$ ist gegeben durch

$$\text{Vol}_k(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} J_\varphi(t) \, dt.$$

5.11 Bemerkung. Man kann zeigen, dass $B \subset M$ genau dann messbar ist, wenn B bzgl. des k -dimensionalen Hausdorff-Maßes auf $\mathbb{R}^n$ messbar ist, und dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass

$$\text{Vol}_k(B) = c\mathcal{H}^k(B) \quad \text{für alle messbaren } B \subset M$$

ist. Das zeigt schon, dass $\text{Vol}_k(B)$ unabhängig von der Parametrisierung φ sein muss.

5.12 Proposition. Unabhängigkeit des Integrals von der Parametrisierung, Teil 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und seien $V, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^k$ Gebiete und $\varphi : V \rightarrow M$ und $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow M$ reguläre Parametrisierungen von M derart, dass der Parameterwechsel $\tau : V \rightarrow \tilde{V}$, $\tau = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist. Dann ist für $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion $h : V \rightarrow \mathbb{R}$, $h = f \circ \varphi \cdot J_\varphi$ genau dann messbar bzw. integrierbar, wenn $\tilde{h} = f \circ \tilde{\varphi} \cdot J_{\tilde{\varphi}}$ es ist und im integrierbaren Fall gilt

$$\int_V h(t) \, dt = \int_{\tilde{V}} \tilde{h}(\tilde{t}) \, d\tilde{t}.$$

5.13 Bemerkung. Wir werden später zeigen, dass der Parameterwechsel zwischen regulären Parametrisierungen immer ein C^1 -Diffeomorphismus ist. Somit ist der Wert von $\int_M f \, dS$ unabhängig von der Parametrisierung.

Beweis. (von Proposition 5.12) Mit $\tilde{\varphi} \circ \tau = \varphi$ ist $D\varphi = D\tilde{\varphi} \circ \tau \cdot D\tau$ und somit

$$(D\varphi)^T D\varphi = (D\tau)^T (D\tilde{\varphi} \circ \tau)^T (D\tilde{\varphi} \circ \tau) D\tau.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Determinante, so ergibt sich $J_\varphi^2 = J_\tau^2 J_{D\tilde{\varphi} \circ \tau}^2$. Also ist

$$\begin{aligned} \int_V h(t) dt &= \int_V f \circ \varphi \cdot J_\varphi dt = \int_V (f \circ \tilde{\varphi} \circ \tau) J_\tau J_{D\tilde{\varphi} \circ \tau} dt = \int_V (f \circ \tilde{\varphi} \cdot J_{\tilde{\varphi}}) \circ \tau \cdot J_\tau dt \\ &\stackrel{\text{Trafo-Satz}}{=} \int_{\tilde{V}} f \circ \tilde{\varphi} \cdot J_{\tilde{\varphi}} d\tilde{t} = \int_{\tilde{V}} \tilde{h}(\tilde{t}) d\tilde{t}. \end{aligned}$$

□

5.14 Beispiel. Flächeninhalt der Einheitssphäre

Es ist

$$\varphi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t_1, t_2) \mapsto (\sin(t_1) \cos(t_2), \sin(t_1) \sin(t_2), \cos(t_1))$$

eine reguläre Parametrisierung der Einheitssphäre bis auf den Nullmeridian, da

$$\partial_1 \varphi = \begin{pmatrix} \cos(t_1) \cos(t_2) \\ \cos(t_1) \sin(t_2) \\ -\sin(t_1) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_2 \varphi = \begin{pmatrix} -\sin(t_1) \sin(t_2) \\ \sin(t_1) \cos(t_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Die Komponenten des Maßtensors sind also

$$G_{11}(t) = \langle \partial_1 \varphi, \partial_1 \varphi \rangle(t) = 1, \quad G_{12}(t) = G_{21}(t) = 0, \quad G_{22}(t) = \sin^2(t_1)$$

und das “Flächenelement” ist

$$dS(t) := J_\varphi(t) dt = \sin(t_1) dt_1 dt_2.$$

Für die Oberfläche der Einheitssphäre S^2 ergibt sich also

$$\text{Vol}_2(S^2) = \int_{S^2} dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sin(t_1) dt_1 \right) dt_2 = 4\pi.$$

Wir wollen nun unseren Mannigfaltigkeitsbegriff erweitern: Mit einer einzigen Parametrisierung erreicht man nicht immer die gesamte Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$. Beispiele sind die Sphäre und der Torus, die als relativ kompakte Mengen nicht homöomorphes Bild offener Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sein können.

Deshalb fordert man von einer Mannigfaltigkeit nur, dass sie sich lokal regulär parametrisieren lässt, nicht notwendigerweise global.

5.15 Definition. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Sei $1 \leq k \leq n-1$. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **k -dimensionale Untermannigfaltigkeit**, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine relativ-offene Umgebung $U \subset M$ von p , eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^k$ sowie eine reguläre Parametrisierung $\varphi : V \rightarrow U \subset M \subset \mathbb{R}^n$ gibt. Ein solches φ heißt **lokales Koordinatensystem oder Karte auf M** .

Der Satz über implizite Funktionen erlaubt eine äquivalente Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten als Nullstellengebilde.

5.16 Satz. Untermannigfaltigkeiten als Nullstellenmengen

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ von p und ein stetig differenzierbares $F : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ gibt, so dass gilt:

5 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

- (a) $\text{rang}(DF)(p) = n - k$, d.h. $(\nabla F_1(p), \dots, \nabla F_{n-k}(p))$ ist linear unabhängig.
- (b) $M \cap \tilde{U} = \{x \in \tilde{U} \mid F(x) = 0\}$.

5.17 Beispiel. Die Einheitssphäre S^n

Die n -dimensionale Einheitssphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1\}$$

ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Es ist nämlich $S^n = F^{-1}(0)$ für

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$$

und $\text{grad}F(x) = 2x \neq 0$ für alle $x \in S^n$.

5.18 Erinnerung. Der Satz über implizite Funktionen

Sei $G \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^k \times \mathbb{R}_y^{n-k}$ ein Gebiet $F : G \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar. Sei $p = (p_x, p_y) \in G$ mit $F(p) = 0$ und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(p) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial y_{n-k}} \end{pmatrix}(p)$$

sei invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen $U_x \subset \mathbb{R}^k$ von p_x und $U_y \subset \mathbb{R}^{n-k}$ von p_y mit $U_x \times U_y \subset G$ und eine C^1 -Funktion $g : U_x \rightarrow U_y$ so, dass für alle $(x, y) \in U_x \times U_y$ gilt

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x).$$

Beweis. (von Satz 5.16) „ $\Leftarrow$ “: Sei $p \in M$ und $F : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ mit $\text{rang}(DF)(p) = n - k$ und $M \cap \tilde{U} = \{F(z) = 0\}$. Mit $z = (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ sei o.B.d.A.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(p) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n-k}$$

von vollem Rang, also invertierbar. Der Satz über implizite Funktionen liefert also die Existenz von Umgebungen U_x, U_y mit $p \in U_x \times U_y \subset \tilde{U}$ und $g : U_x \rightarrow U_y$ mit

$$(x, y) \in M \cap (U_x \times U_y) \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x).$$

Setze nun $V = U_x$ und $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto (t, g(t))$. Dann ist φ offenbar injektiv und $\text{rang} D\varphi = n - k$. Weiterhin ist φ ein Homöomorphismus auf sein Bild $U := \varphi(V)$, denn die Einschränkung $\pi|_U : U \rightarrow V$ der Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, (x, y) \rightarrow x$ ist die stetige Inverse von φ . Also ist φ eine Karte.

„ $\Rightarrow$ “: Sei $p \in M$ und $\varphi : V \rightarrow U \subset M$ eine Karte. O.B.d.A. sei $\varphi(0) = p$. Da $\text{rang} D\varphi(t) = k$, können wir

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \right) \quad \text{geeignet zu einer Basis} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}, \underbrace{a_1, \dots, a_{n-k}}_{=A} \right)$$

des $\mathbb{R}^n$ ergänzen. Sei

$$\Phi : V \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, t') \mapsto \varphi(t) + A t'.$$

Dann ist $D\Phi(0, 0) = (D\varphi, A)(0, 0)$ regulär. Wegen des Umkehrsatzes gibt es eine Umgebung $\tilde{V}$ von $(0, 0)$, so dass $\Phi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U} := \Phi(\tilde{V})$ ein C_1 -Diffeomorphismus ist und es gilt für $(t, t') \in \tilde{V}$

$$\Phi(t, t') \in M \quad \Leftrightarrow \quad t' = 0.$$

Sei $\tilde{F} : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $(t, t') \mapsto t'$, dann ist $F := \tilde{F} \circ \Phi^{-1} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ stetig partiell differenzierbar und erfüllt $\text{rang} DF = \text{rang} D\tilde{F} = n - k$ und für alle $x \in \tilde{U}$ gilt:

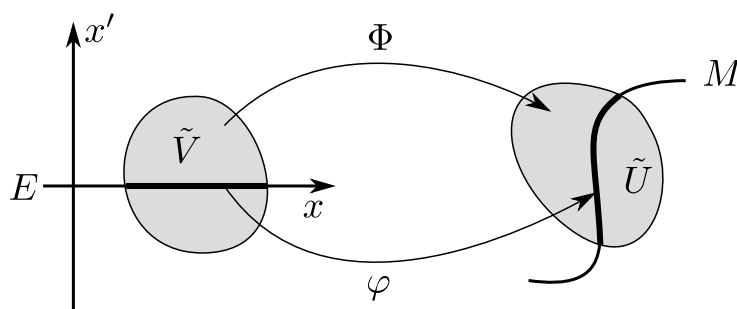
$$F(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi^{-1}(x) = (t, 0) \quad \Leftrightarrow \quad x \in M.$$

□

5.19 Korollar. “Glattbügeln”

Sei $E = \{(x, x') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid x' = 0\} \subset \mathbb{R}^n$. Es ist M genau dann eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn jedes $p \in M$ eine Umgebung $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ besitzt und es eine offene Menge $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ gibt, so dass

$$\Phi^{-1}(M \cap \tilde{U}) = E \cap \tilde{V}.$$

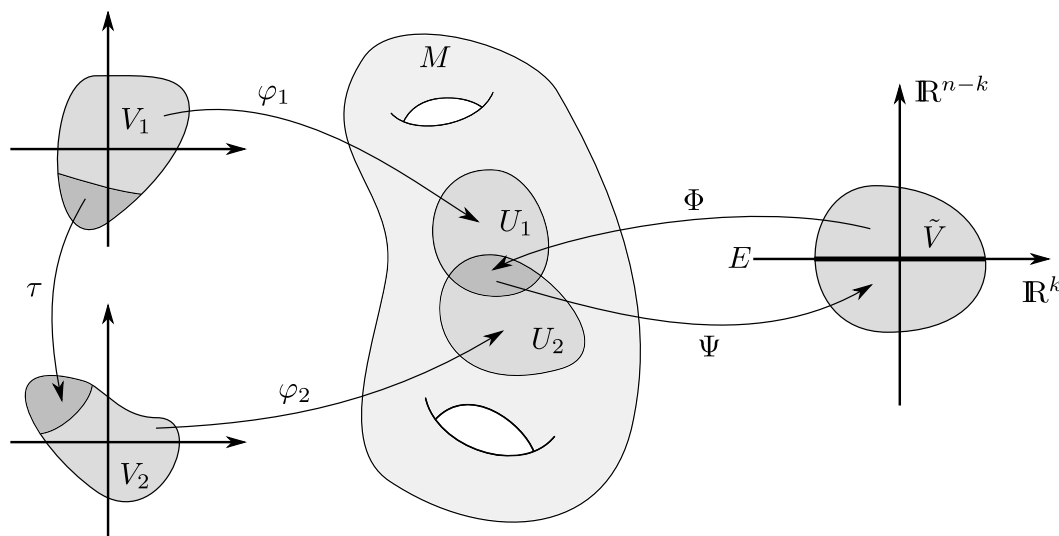


Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Wurde im „ $\Rightarrow$ “-Teil von Satz 5.16 gezeigt.

„ $\Leftarrow$ “: Sei Φ wie oben, dann ist $V := \tilde{V} \cap E \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi := \Phi|_V : V \rightarrow M \cap \tilde{U}$ ist injektiv, stetig, stetig partiell differenzierbar und wegen $\varphi^{-1} = \Phi^{-1}|_{\Phi(V)}$ ein Homöomorphismus. □

5.20 Satz. Kartenwechsel sind Diffeomorphismen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und seien $\varphi_1 : V_1 \rightarrow U_1 \subset M$ und $\varphi_2 : V_2 \rightarrow U_2 \subset M$ zwei Karten auf M , so dass $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Es sind dann $T_1 = \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ und $T_2 = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ offen und $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : T_1 \rightarrow T_2$ ist ein C^1 -Diffeomorphismus.



Beweis. Weil φ_1, φ_2 stetig sind, folgt $T_1 \subset V_1$ und $T_2 \subset V_2$ sind offen. Durch Einschränken von φ_1 und φ_2 auf $U = U_1 \cap U_2$ dürfen wir annehmen, dass $U_1 = U_2 = U$, also $T_1 = V_1$ und $T_2 = V_2$.

5 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Es ist τ als Komposition von Homöomorphismen ein Homöomorphismus. Es bleibt also zu zeigen, dass τ stetig differenzierbar ist. Denn dann folgt durch Vertauschen der Rollen von φ_1 und φ_2 , dass auch τ^{-1} stetig differenzierbar ist, also, dass τ ein Diffeomorphismus ist.

Sei $p \in U$ beliebig. Zu zeigen: τ ist in einer Umgebung von $\varphi_1^{-1}(p)$ stetig differenzierbar. Gemäß Korollar 5.19 existieren eine Umgebung $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ von p mit $\tilde{U} \cap M \subset U$, eine offenes $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\Phi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$, so dass

$$\Phi^{-1}(\tilde{U} \cap M) = \tilde{V} \cap E.$$

Setze nun $\Psi := \Phi^{-1}$ und $\Psi := (\Psi', \Psi'')$, $\Psi' := \Phi|_{E \cap \tilde{V}}$. Dann ist

$$\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = (\varphi_2^{-1} \circ \Phi') \circ (\Psi' \circ \varphi_1).$$

Es sind nun $\Psi' \circ \varphi_1$ und $\Psi' \circ \varphi_2$ stetig differenzierbar. Außerdem ist

$$D(\Psi' \circ \varphi_2) = D\Psi' \circ \varphi_2 \cdot D\varphi_2$$

von vollem Rang, da sowohl $D\Psi$ und somit $D\Psi'$ als auch $D\varphi_2$ injektiv sind. Mit dem Umkehrsatz gilt also, dass (nach evtl. weiteren Verkleinerungen) $\Psi' \circ \varphi_2$ ein Diffeomorphismus ist. Damit ist $\varphi_2^{-1} \circ \Phi' = (\Psi' \circ \varphi_2)^{-1}$ stetig differenzierbar und somit auch τ . $\square$

5.21 Definition. Differenzierbare Funktionen auf Mannigfaltigkeiten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$. Es heißt f differenzierbar, falls

$$f \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$$

für jede Karte $\varphi : V \rightarrow U \subset M$ differenzierbar ist.

In diesem Sinne ist also mit Satz 5.20 für jede Karte $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ die Inverse $\tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine differenzierbare Funktion auf dem Kartengebiet $\tilde{U}$.

5.22 Bemerkung. Atlas und Kartenwechsel

Man kann also eine Untermannigfaltigkeit M mit einer Familie von Karten $\{\varphi_i : V_i \rightarrow U_i \subset M\}_{i \in I}$ überdecken, $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, so dass die Übergänge

$$\tau_{ij} : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j), \quad \tau_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$$

alle Diffeomorphismen sind. Man nennt eine solche Familie von Karten einen **Atlas** für M und die Diffeomorphismen $\{\tau_{ij}\}$ die **Kartenwechsel**.

Es stellt sich nun die Frage, wie man das Integral $\int_M f \, dS$ definiert, wenn sich M nicht mit nur einer Karte darstellen lässt.

Einfacher Fall: „ f lebt nur auf einer Karte“

Definiere den **Träger (support) von $f : M \rightarrow \mathbb{R}$** durch

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}} \subset M.$$

Sei $\varphi : V \rightarrow U \subset M$ eine Karte mit $\text{supp}(f) \subset U$. Setze dann wie zuvor

$$\int_M f \, dS := \int_V f \circ \varphi \cdot J_\varphi \, dt.$$

Verallgemeinerung: Sei M Vereinigung endlich vieler Karten (geht z.B. immer, wenn M kompakt ist), $M = \bigcup_{j=1}^r U_j$ und $\varphi_j : V_j \rightarrow U_j \subset M$.

Um nun $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ zu integrieren, zerlege f in eine Summe $f = f_1 + \dots + f_r$ mit $\text{supp}(f_j) \subset U_j$ und definiere

$$\int_M f \, dS := \sum_{j=1}^r \int_{U_j} f_j \, dS = \sum_{j=1}^r \int_{V_j} f_j \circ \varphi_j \cdot J_{\varphi_j} \, dt.$$

Man bekommt eine solche Zerlegung für jedes f , sobald man eine „Zerlegung der Eins“ hat.

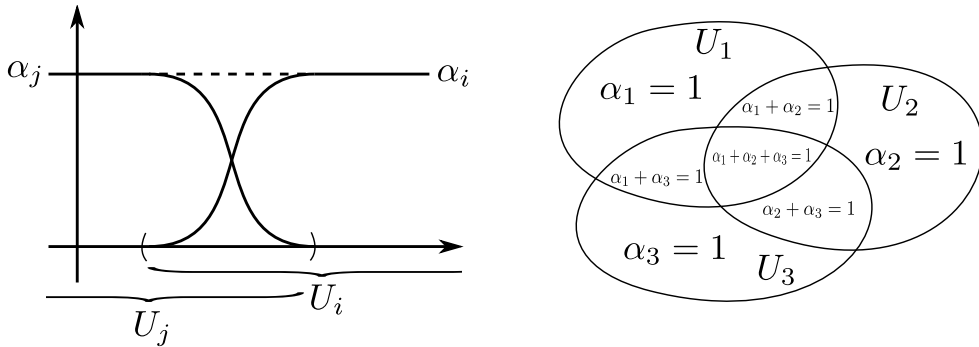
5.23 Definition. Zerlegung der Eins

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $(U_j)_{j \in I}$ eine lokal-endliche offene Überdeckung von M (d.h. für jedes $p \in M$ existiert eine Umgebung W , so dass $W \cap U_j \neq \emptyset$ für endlich viele $j \in I$).

Eine Familie von Funktionen $\{\alpha_j : M \rightarrow [0, 1]\}_{j \in I}$ heißt stetige bzw. differenzierbare **Zerlegung der Eins bzgl.** (U_j) , falls alle $\alpha_j : M \rightarrow [0, 1]$ stetig bzw. differenzierbar sind und

- (a) $\text{supp}(\alpha_j) \subset U_j$ für alle $j \in I$,
- (b) $1 = \sum_{j \in I} \alpha_j(x)$ für alle $x \in M$.

Die Summe in (b) enthält wegen der lokalen Endlichkeit der Überdeckung nur endlich viele Terme ungleich Null.



5.24 Bemerkung. Jede Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ besitzt einen abzählbaren lokal-endlichen Atlas, also eine abzählbare Menge von Karten $\varphi_j : V_j \rightarrow U_j$ mit $\bigcup_{j \in I} U_j = M$ und die Überdeckung ist lokal-endlich.

Beweis. Übung. □

Wir zeigen in Proposition 5.27, dass zu jedem lokal endlichen Atlas auch eine differenzierbare Zerlegung der Eins existiert. Zunächst wollen wir diese aber zur Definition des Integrals auf Untermannigfaltigkeiten verwenden.

5.25 Definition. Das Integral über Untermannigfaltigkeiten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\{\varphi_j : V_j \rightarrow U_j\}_{j \in I}$ ein abzählbarer lokal-endlicher Atlas. Es sei $(\alpha_j)_{j \in I}$ eine Zerlegung der Eins bzgl. der Überdeckung $(U_j)_{j \in I}$ und es sei $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion auf M .

Es heißt nun f **integrierbar auf M** , wenn jedes $\alpha_j f : U_j \rightarrow \mathbb{R}$ auf der parametrisierten Fläche $\varphi_j : V_j \rightarrow U_j$ integrierbar ist und falls $\sum_j \int_{U_j} \alpha_j f \, dS$ endlich ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_M f \, dS := \sum_{j \in I} \int_{U_j} \alpha_j f \, dS.$$

Zu prüfen ist die „Wohldefiniertheit“, d.h. die Unabhängigkeit der Definition sowohl vom Atlas als auch von der Zerlegung der Eins. Sei also

$$M = \bigcup_{j \in I} U_j = \bigcup_{i \in \tilde{I}} \tilde{U}_i, \quad \varphi_j : V_j \rightarrow U_j, \quad \tilde{\varphi}_i : \tilde{V}_i \rightarrow \tilde{U}_i,$$

und seien (α_j) bzw. (β_i) Zerlegungen der Eins bzgl. (U_j) und $(\tilde{U}_i)$. Dann gelten offensichtlich

$$\alpha_j = \alpha_j \sum_i \beta_i = \sum_i \alpha_j \beta_i, \quad \beta_i = \beta_i \sum_j \alpha_j = \sum_j \alpha_j \beta_i \quad \text{und} \quad \text{supp}(\alpha_j \beta_i) \subset U_j \cap \tilde{U}_i.$$

5 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Also ist

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in I} \int_{U_j} |\alpha_j f| dS &= \sum_j \int_{U_j} \sum_i \alpha_j \beta_i |f| dS = \sum_j \int_{V_j} \sum_i |(\alpha_j \beta_i f) \circ \varphi_j \cdot J_{\varphi_j}| dt \\
&= \sum_{j,i} \int_{\varphi_j^{-1}(U_j \cap \tilde{U}_i)} |(\alpha_j \beta_i f) \circ \varphi_j \cdot J_{\varphi_j}| dt \stackrel{5.12}{=} \sum_{j,i} \int_{\tilde{\varphi}_i^{-1}(U_j \cap \tilde{U}_i)} |(\alpha_j \beta_i f) \circ \tilde{\varphi}_i \cdot J_{\tilde{\varphi}_i}| dt \\
&= \sum_i \int_{\tilde{V}_i} \sum_j |(\alpha_j \beta_i f) \circ \tilde{\varphi}_i \cdot J_{\tilde{\varphi}_i}| dt = \sum_i \int_{\tilde{U}_i} \sum_j \alpha_j \beta_j |f| dS = \sum_{i \in \tilde{I}} \int_{\tilde{U}_i} |\beta_i f| dS.
\end{aligned}$$

Da alle Terme positiv sind, ist die Vertauschung von Summen und Integralen hier kein Problem. Somit ist Integrabilität von f unabhängig von Atlas und Zerlegung der Eins. Die gleiche Rechnung ohne Betragsstriche liefert Wohldefiniertheit von $\int_M f dS$ für integrierbares f .

Es bleibt zu zeigen, dass zu lokal-endlichen Atlanten immer eine Zerlegung der Eins existiert.

5.26 Lemma. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt. Dann existiert eine unendlich oft differenzierbare Funktion $h : U \rightarrow [0, 1]$ mit

- (i) $h|_K \equiv 1$
- (ii) $\text{supp}(h) \subset U$ ist kompakt.

Beweis. Übungen (siehe auch Forster, Analysis 3, Seite 22-23). □

5.27 Proposition. Existenz einer Zerlegung der Eins

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\{\varphi_j : V_j \rightarrow U_j\}_{j \in I}$ ein lokal-endlicher Atlas. Dann existiert zur Überdeckung $(U_j)_{j \in I}$ von M eine differenzierbare Zerlegung der Eins.

Beweis. O.B.d.A. seien alle U_j beschränkt. Zu jedem U_j existiert dann ein kompaktes $K_j \subset U_j$, sodass $(K_j^\circ)_{j \in I}$ immer noch M überdeckt, $M = \bigcup_{j \in J} K_j^\circ$.

[Das sieht man so: zu jedem $p \in M$ wähle eine kompakte Kugel B_p^j um p so, dass B_p^j ganz in U_j liegt. Falls p in mehreren U_j liegt, wähle j beliebig. Die $(B_p^{i\circ})_{i \in I, p \in M}$ bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\bar{U}_j$ und wir wählen eine endliche Teilüberdeckung $(B_p^{i\circ})_{i \in I_j, p \in P_j}$. Mache das für alle U_j und setze $K_j = \bigcup \{B_p^j \mid j \in I_i \text{ und } p \in P_i \text{ für ein } i \in I\}$. Wegen der lokalen Endlichkeit ist die Vereinigung immer nur über endlich viele Mengen und K_j ist kompakt.]

Sei $L_j = \varphi_j^{-1}(K_j)$, dann ist auch $L_j \subset V_j$ kompakt, da φ_j^{-1} stetig ist. Mit Lemma 5.26 existiert ein differenzierbares $h_j : V_j \rightarrow [0, 1]$ mit $h|_{L_j} \equiv 1$ und $\text{supp}(h) \subset V_j$ kompakt. Setze $\tilde{\alpha}_j : M \rightarrow [0, 1]$,

$$\tilde{\alpha}_j(x) = \begin{cases} h_j \circ \varphi_j^{-1}(x) & \text{falls } x \in U_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{\alpha}_j$ differenzierbar, $\text{supp}(\tilde{\alpha}_j) \subset U_j$ und $\tilde{\alpha}_j|_{K_j} \equiv 1$. Außerdem ist

$$1 \leq \tilde{\alpha}(x) := \sum_{j \in J} \tilde{\alpha}_j(x) < \infty \quad \text{für alle } x \in M,$$

denn (K_j°) ist eine lokal endliche Überdeckung von M . Dann ist $\alpha_j := \tilde{\alpha}_j / \tilde{\alpha}$ die gewünschte Zerlegung der Eins. □

6 Der Divergenzsatz von Gauß

6.1 Definition. Vektorfelder und Divergenz

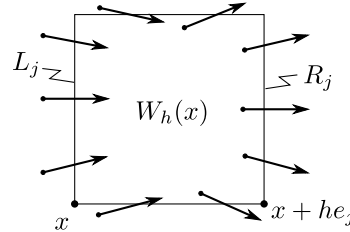
- (a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, so heißt eine Abbildung $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld auf A** .
 (b) Sei A offen und $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so heißt

$$\operatorname{div}(v) : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div}(v)(x) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x) = \operatorname{Spur}(Dv)(x)$$

die **Divergenz des Vektorfeldes v** .

6.2 Motivation. Fluss eines Vektorfeldes in einen kleinen Würfel und die Divergenz

Wir berechnen den „Nettofluss“ des Vektorfeldes v in den Würfel $W_h(x) := \prod_{j=1}^n [x_j, x_j+h]$ für $h \rightarrow 0$, wobei wir Fluss in den Würfel negativ und Fluss aus dem Würfel positiv werten.



Der „Fluss“ durch L_j ist für differenzierbares v gegeben durch $-v_j(x)h^{n-1} + o(h^{n-1})$ und der „Fluss“ durch R_j durch $v_j(x + e_j h)h^{n-1} + o(h^{n-1})$. Damit ergibt sich für den Nettofluss durch die Oberfläche geteilt durch das Volumen des Würfels

$$\sum_j \frac{(v_j(x + e_j h) - v_j(x)) h^{n-1}}{h^n} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \operatorname{div}(v)(x).$$

Die Divergenz $\operatorname{div}(v)(x)$ ist also die „Quellstärke“ des Vektorfeldes v bei x . Der Satz von Gauß besagt, dass man den Fluss durch die Oberfläche ∂K eines Volumens K berechnen kann, indem man die Quellstärke, also die Divergenz, des Vektorfeldes über das ganze Volumen integriert:

$$\int_K \operatorname{div}(v)(x) \, dx = \int_{\partial K} \langle v, n \rangle \, dS$$

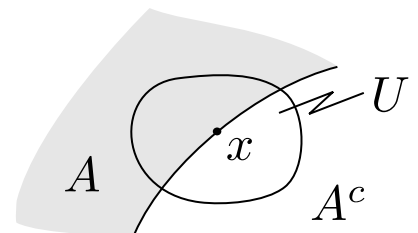
Die verwendeten Begriffe werden wir in diesem Kapitel präzisieren und dann den Satz von Gauß beweisen.

6.3 Erinnerung. Der Rand einer Menge im $\mathbb{R}^n$

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt $x \in \mathbb{R}^n$ Randpunkt von A , falls für jede offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x gilt:

$$U \cap A \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U \cap A^c \neq \emptyset.$$

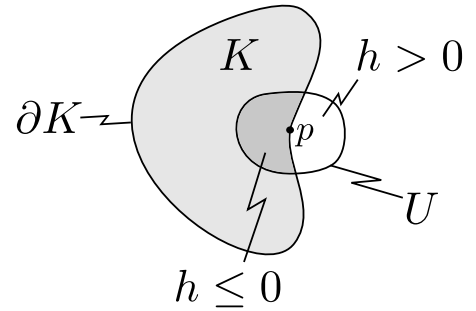
Die Menge der Randpunkte $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ ist Randpunkt von } A\}$ heißt der Rand von A .



6.4 Definition. Kompaktum mit glattem Rand

Eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ hat einen **glatten Rand**, wenn es zu jedem $p \in \partial K$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt und ein stetig differenzierbares $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

- (i) $K \cap U = \{x \in U \mid h(x) \leq 0\}$
- (ii) $\text{grad}h(p) \neq 0$.



6.5 Beispiel. Die Einheitskugel $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ ist ein Kompaktum mit glattem Rand, denn $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = \|x\|^2 - 1$$

erfüllt $B^n = \{h \leq 0\}$ und für $p \in \partial B^n = S^{n-1}$ ist $\text{grad}h(p) = 2p \neq 0$.

6.6 Satz. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist der Rand $M = \partial K$ von K eine Hyperfläche, d.h. eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei $p \in M = \partial K$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von p so, dass eine beschreibende Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ für $K \cap U$ existiert. Da $\text{grad}h(p) \neq 0$ und $\text{grad}(h)$ stetig ist, können wir annehmen, dass $\text{grad}(h)(x)$ auf ganz U ungleich Null ist (sonst verkleinere U).

Wir zeigen nun, dass h auch für $M \cap U$ eine beschreibende Funktion ist, d.h.

$$M \cap U = \{x \in U \mid h(x) = 0\}. \quad (*)$$

Es ist M dann nach Satz 5.16 eine Hyperfläche.

Es bleibt $(*)$ zu zeigen:

„ $\subset$ “: K ist als Kompaktum abgeschlossen und enthält somit seinen Rand, $M \subset K$. Also ist $h(x) \leq 0$ für alle $x \in M \cap U$. Angenommen es gilt $h(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in M \cap U$, dann muss aufgrund der Stetigkeit schon $h(x) < 0$ für x aus einer Umgebung V von x_0 gelten. Da $V \subset \{h \leq 0\}$ ist $V \subset K$ und somit x_0 doch kein Randpunkt von K . Also gilt $h(x) = 0$ für alle $x \in U \cap M$.

„ $\supset$ “: Für $x \in U$ mit $h(x) = 0$ ist

$$h(x + \varepsilon) = \underbrace{\langle \text{grad}(h)(x), \varepsilon \rangle}_{=: v \neq 0} + o(\varepsilon).$$

Setzen wir $\varepsilon = tv$, so ergibt sich

$$h(x + tv) = t\|v\|^2 + o(t).$$

Also gibt es in jeder Umgebung von x Punkte mit $h < 0$ und Punkte mit $h > 0$, also Punkte in K und Punkte in K^c . Damit muss x ein Randpunkt sein. $\square$

6.7 Definition. Tangentialvektoren und der Tangentialraum

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Es heißt $v \in \mathbb{R}^n$ ein **Tangentialvektor an M in p** , wenn es eine regulär parametrisierte Kurve

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

gibt mit

$$\alpha(0) = p \quad \text{und} \quad \alpha'(0) = v.$$

Der **Tangentialraum von M in p** ist

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } p\}.$$

6.8 Satz. Eigenschaften und Charakterisierung des Tangentialraums

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$.

Dann gilt

- (a) $T_p M \subset \mathbb{R}^n$ ist ein k -dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.
- (b) Sei $\varphi : V \rightarrow U \subset M$ eine Karte und $\varphi(s) = p$. Dann ist $(D_1\varphi, \dots, D_k\varphi)(s)$ eine Basis von $T_p M$ und

$$T_p M = \text{Bild}(D\varphi(s)).$$

- (c) Ist $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ Umgebung von p und $F : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ eine beschreibende Funktion für $M \cap \tilde{U}$, so gilt

$$T_p M = \text{Kern}(DF(p)).$$

Beweis. Sei $T_1 = \text{Bild}(D\varphi(s))$ und $T_2 = \text{Kern}(DF(p))$. Da $D\varphi$ injektiv und DF surjektiv ist, sind T_1 und T_2 k -dimensionale Untervektorräume. Wir zeigen

$$T_1 \subset T_p M \subset T_2,$$

also $T_1 = T_p M = T_2$, woraus (a), (b) und (c) folgen.

„ $T_1 \subset T_p M$ “: Sei $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i D_i\varphi(s) \in T_1$ beliebig. Setze $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \in M$ definiert ist,

$$\alpha(\tau) := \varphi(s + \tau\lambda).$$

Dann gilt $\alpha(0) = \varphi(s) = p$ und $\alpha'(0) = D\varphi(s) \cdot \lambda = \sum \lambda_i D_i\varphi = v$. Also ist $v \in T_p M$.

„ $T_p M \subset T_2$ “: Sei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = p$ und $v = \alpha'(0)$. Zu zeigen ist $DF(p) \cdot v = 0$. Da für alle $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt $F \circ \alpha(\tau) = 0$ gilt, folgt das sofort (wie bei „der Gradient steht senkrecht auf den Höhenlinien“),

$$0 = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} F \circ \alpha(\tau) = DF(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = DF(p) \cdot v.$$

□

6.9 Definition. Normalenvektor und Einheitsnormale

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Es heißt $\nu \in \mathbb{R}^n$ ein **Normalenvektor** an M in p , wenn $\nu \in T_p M^\perp$ ist, also $\langle \nu, w \rangle = 0$ für alle $w \in T_p M$ gilt. Falls zusätzlich $\|\nu\| = 1$ ist, so heißt ν eine **Einheitsnormale**.

6.10 Bemerkung. Einheitsnormale an Hyperflächen

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, $p \in M$ und $h : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschreibende Funktion für $M \cap \tilde{U}$. Dann ist

$$\nu = \frac{\text{grad}(h)(p)}{\|\text{grad}(h)(p)\|}$$

eine Einheitsnormale an M in p . Die einzige andere Einheitsnormale ist $-\nu$.

Beweis. Nach Satz 6.8 liegt jedes $v \in T_p M$ in $\text{Kern grad}(h)(p)$, also $\langle \text{grad}(h)(p), v \rangle = 0$. Da jede Basis von $T_p M$ zusammen mit ν bereits eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet, kann es keine weiteren, von ν linear unabhängigen Normalenvektoren geben. □

6.11 Beispiel. (a) Für $M = S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$ ist $\nu(p) = \frac{p}{r}$ Einheitsnormale, denn $F(x) = \|x\|^2 - r^2$ ist beschreibende Funktion für M und $\text{grad}(F)(p) = 2p$. Also ist

$$\nu(p) = \frac{2p}{2\|p\|} = \frac{p}{r}.$$

6 Der Divergenzsatz von Gauß

(b) Sei $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei

$$M = \text{graph}(g) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Es ist dann für $p \in M$ und $p = (p', p_n)$

$$\nu(p) = \frac{(-D_1 g, \dots, -D_{n-1} g, 1)(p')}{\|\dots\|}$$

Einheitsnormale an M in p , denn $F : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x', x_n) \mapsto x_n - g(x')$ ist beschreibende Funktion für M .

6.12 Satz. Einheitsnormale an ein Kompaktum mit glattem Rand

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $p \in \partial K = M$. Es gibt dann genau eine Einheitsnormale ν_p an M in p mit der Eigenschaft, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$p + t\nu_p \notin K \quad \text{für alle } 0 < t < \varepsilon.$$

Es zeigt also ν_p nach außen.

Beweis. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von p und $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschreibende Funktion für $U \cap K$, also $U \cap K = \{x \in U \mid h(x) \leq 0\}$. Setze $\nu_p = \frac{\text{grad}(h)(p)}{\|\dots\|}$, dann ist ν_p Einheitsnormale und wegen

$$h(p + t\nu_p) = h(p) + t\|\text{grad}(h)(p)\| + o(t) = t\|\text{grad}(h)(p)\| + o(t),$$

gilt $h(p + t\nu_p) > 0$ für $0 < t < \varepsilon$ und $\varepsilon > 0$ klein genug. Für die einzig andere Einheitsnormale $\tilde{\nu}_p := -\nu_p$ ergibt sich sofort $h(p + t\tilde{\nu}_p) = h(p - t\nu_p) > 0$ für $0 < t < \varepsilon$ und $\varepsilon > 0$ klein genug, also $p + t\tilde{\nu}_p \in K$. Damit ist ν_p durch die Bedingung "nach außen zu zeigen" eindeutig festgelegt. $\square$

6.13 Definition. Das äußere Normalenfeld

- (a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand $M = \partial K$. Dann heißt $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p \mapsto \nu_p$ das **äußere Normalenfeld an K** , wobei ν_p die eindeutige äußere Normale an M in p aus Satz 6.12 ist.
- (b) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt f differenzierbar, wenn es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von A gibt und ein differenzierbares $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}|_A = f$.

6.14 Satz. Der Divergenzsatz von Gauß-Ostrogradski

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand $\partial K = M$ und sei $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ sein äußeres Einheits-Normalenfeld. Sei $w : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf K . Dann gilt

$$\int_K \text{div}(w) \, d\lambda = \int_{\partial K} \langle w, \nu \rangle \, dS$$

Die linke Seite ist das Volumenintegral über die Quellstärke im Inneren von K . Die rechte Seite ist das Oberflächenintegral über den Fluss des Vektorfeldes w durch die Oberfläche von K .

6.15 Bemerkung. Zusammenhang mit dem Hauptsatz in einer Dimension

Ist $n = 1$, so ist $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Kompaktum mit glattem Rand $M = \{a, b\}$. Die äußere Einheitsnormale $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist $n(a) = -1$, $n(b) = +1$. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist

$$\int_M \langle f, \nu \rangle \, dS = f(b) - f(a).$$

Da $\text{div} f(x) = f'(x)$ ist, liefert der Gaußsche Satz also einfach den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a).$$

6.16 Lemma. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger $\text{supp}(f) = K \subset U$. Dann gilt für alle $j = 1, \dots, n$, dass

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx = 0.$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $U = \mathbb{R}^n$ (setze $f = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus U$). Ebenfalls ohne Einschränkung sei $j = n$ und setze $x' := (x_1, \dots, x_{n-1})$. Wähle $R > 0$ so, dass $\text{supp}(f) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [-R, R]$. Dann folgt aus dem Hauptsatz

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_n} f(x', x_n) dx_n = \int_{-R}^R \frac{\partial}{\partial x_n} f(x', x_n) dx_n = f(x', R) - f(x', -R) = 0,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_n} f(x', x_n) dx_n \right) dx' = 0.$$

□

Komponentenweise lautet die Aussage des Gaußschen Satzes ja

$$\sum_{j=1}^n \int_K D_j w_j d\lambda = \sum_{j=1}^n \int_{\partial K} w_j \nu_j dS.$$

Wir werden sehen, dass hier nicht nur die Summen sondern sogar die entsprechenden Summanden gleich sind. Dazu rechnen wir im folgenden Lemma den Gaußschen Satz zunächst für den Fall nach, dass der Rand M durch den Graphen einer Funktion gegeben ist und nehmen an, dass $w_j = f$ kompakten Träger hat.

6.17 Lemma. Sei $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und $u : V \rightarrow I$ stetig differenzierbar. Sei

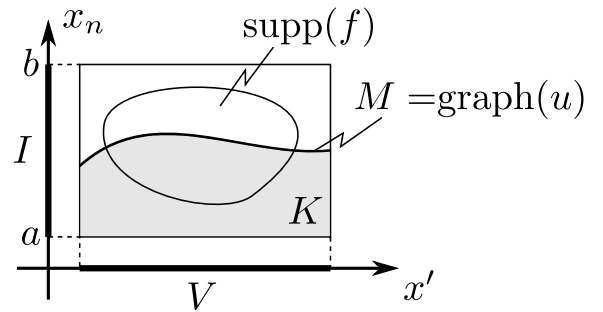
$$\begin{aligned} K &:= \{(x', x_n) \in V \times I \mid x_n \leq u(x')\} \subset \mathbb{R}^n \\ M &= \{(x', x_n) \in V \times I \mid x_n = u(x')\} \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Es sei weiter $f : V \times I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompakten Träger in $V \times I$. Dann gilt für alle $j = 1, \dots, n$

$$\int_K D_j f d\lambda = \int_M f \cdot \nu_j dS$$

mit

$$\begin{aligned} \nu_j(x', x_n) &= \frac{-D_j u(x')}{(1 + |\nabla u(x')|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{für } j = 1, \dots, n-1 \\ \nu_n(x', x_n) &= \frac{+1}{(1 + |\nabla u(x')|^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$



Beweis. 1. Fall: $j = 1, \dots, n-1$: Setze $F : V \times I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x', x_n) := \int_a^{x_n} f(x', z) dz,$$

und betrachte die Abbildung $x' \mapsto F(x', u(x'))$. Dann ist

$$\begin{aligned} D_j F(x', u(x')) &= (D_j F)(x', u(x')) + (D_n F)(x', u(x')) \cdot D_j u(x') \\ &= \int_a^{u(x')} D_j f(x', z) dz + f(x', u(x')) \cdot D_j u(x'). \end{aligned}$$

6 Der Divergenzsatz von Gauß

Da $F(x', u(x'))$ kompakten Träger in V hat, folgt mit Lemma 6.16, dass

$$\int_K D_j f(x) \, dx = \int_V \left(\int_a^{u(x')} D_j f(x', z) \, dz \right) dx' = - \int_V f(x', u(x')) \cdot D_j u(x') \, dx'.$$

Für die Karte $\varphi : V \rightarrow M$, $x' \mapsto (x', u(x'))$ gilt nun

$$\sqrt{g_\varphi(x')} = \sqrt{1 + |\nabla u(x')|^2}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_M f \cdot \nu_j \, dS &= \int_V f(x', u(x')) \cdot \nu_j(x', u(x')) \cdot \sqrt{1 + |\nabla u(x')|^2} \, dx' \\ &= - \int_V f(x', u(x')) \cdot D_j u(x') \, dx' = \int_K D_j f(x) \, dx. \end{aligned}$$

2. Fall: $j = n$:

$$\begin{aligned} \int_K D_n f(x) \, dx &= \int_V \left(\int_a^{u(x')} D_n f(x', z) \, dz \right) dx' = \int_V \left(f(x', u(x')) - \underbrace{f(x', a)}_{=0} \right) dx' \\ &= \int_V f(x', u(x')) \cdot \nu_n(x, u(x')) \cdot \sqrt{g_\varphi(x')} \, dx' = \int_M f \cdot \nu_n \, dS. \end{aligned}$$

□

Beweis. Beweis des Gaußschen Satzes: Da $M = \partial K$ eine Hyperfläche ist, gibt es zu jedem $p \in M$ ein $k \in \{1, \dots, n\}$, eine Umgebung $I = (a, b)$ von p_k und eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von $p' := (p_1, \dots, \hat{p}_k, \dots, p_n)$ so, dass

$$M \cap (V \times I) = \text{graph}(u)$$

für ein stetig differenzierbares $u : V \rightarrow I$.

Also existiert eine Überdeckung $(U_j)_{j=0}^r$ von K mit

(1) $U_0 \subset K \setminus M$

(2) $U_j = V_j \times (a_j, b_j)$ und $U_j \cap K = \{(x', x_{k(j)}) \mid x_{k(j)} \leq u_j(x')\}$ für ein $u_j : V_j \rightarrow (a_j, b_j)$.

Betrachte nun eine Zerlegung der Eins (α_j) zu (U_j) mit $\text{supp}(\alpha_j) \subset U_j$ und.

$$\sum_{j=0}^r \alpha_j(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \bigcup_{j=0}^r U_j.$$

Fügen wir auf beiden Seiten des Gaußschen Satzes diese Zerlegung der Eins ein, so ergibt sich

$$\int_K \text{div}(w) \, d\lambda = \int_K \text{div}\left(\sum_j \alpha_j w\right) \, d\lambda = \sum_j \int_K \text{div}(\alpha_j w) \, d\lambda$$

und

$$\int_{\partial K} \langle w, \nu \rangle \, dS = \int_{\partial K} \left\langle \sum_j \alpha_j w, \nu \right\rangle \, dS = \sum_j \int_{\partial K} \langle \alpha_j w, \nu \rangle \, dS.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass der Gaußsche Satz jeweils lokal gilt, also für jedes Vektorfeld w mit $\text{supp}(w) \subset U_j$ für ein $j \in \{0, \dots, r\}$.

Im Fall $j = 0$, also $\text{supp}(w) \subset U_0$, haben die Funktionen w_k , $k = 1, \dots, n$, kompakten Träger in U_0 . Mit Lemma 6.16 ist dann

$$\int_K \text{div}(w) \, d\lambda = 0.$$

Andererseits ist $w|_{\partial K} = 0$ und somit

$$\int_{\partial K} \langle w, \nu \rangle \, dS = 0.$$

Im Fall $j \in \{1, \dots, r\}$ liefert Lemma 6.17 sofort, dass

$$\int_K \text{div}(w) \, d\lambda = \sum_{k=1}^n \int_K D_k w_k \, d\lambda = \sum_{k=1}^n \int_{\partial K} w_k \nu_k \, dS = \int_{\partial K} \langle w, \nu \rangle \, dS.$$

□

6.18 Definition. Der Laplace-Operator

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Laplace-Operator $\Delta : C^2(U) \rightarrow C(U)$ ordnet jedem $f \in C^2(U)$ die Funktion

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^n D_k D_k f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) = \text{Spur}(\text{Hess} f)(x) = \text{div} \circ \text{grad}(f)(x)$$

zu.

6.19 Definition. Normalenableitung

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $U \supset \partial K$ eine Umgebung von ∂K und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Sei $p \in M := \partial K$.

Die **Normalen-Ableitung** von f in p ist die Richtungsableitung von f in Richtung der äußeren Normalen ν_p von K , d.h.

$$D_\nu f(p) = \frac{\partial f}{\partial \nu}(p) := \langle \nu_p, Df(p) \rangle.$$

6.20 Korollar. Satz von Green

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $f, g \in C^2(K)$. Dann gilt

$$\int_K f \Delta g \, d\lambda = \int_{\partial K} f \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS - \int_K \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\lambda$$

und somit

$$\int_K (f \Delta g - g \Delta f) \, d\lambda = \int_{\partial K} \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) \, dS.$$

Man beachte hier die Analogie zur partiellen Integration.

Beweis. Betrachte $w := f \nabla g$. Da $\text{div}(f \nabla g) = f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$ ist und

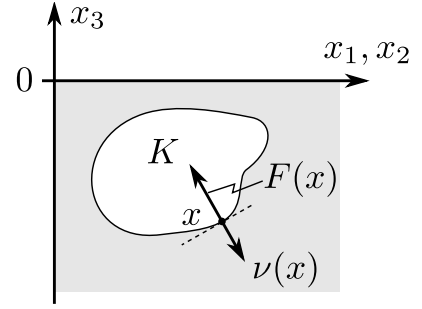
$$\langle w, \nu \rangle = \langle f \nabla g, \nu \rangle = f \frac{\partial g}{\partial \nu},$$

folgt die Behauptung aus dem Gaußschen Satz. □

6.21 Beispiel. Archimedisches Prinzip

In einer Flüssigkeit der Dichte $\varrho > 0$ befinde sich ein Körper der das Volumen K einnehme. In jedem Punkt $x \in \partial K$ übt die Flüssigkeit eine Kraft $F(x)$ aus, die senkrecht zu $T(\partial K)_x$ wirkt und proportional zur Höhe x_3 und nach innen gerichtet ist ($x_3 < 0$),

$$F(x) = \varrho x_3 \nu(x).$$



Die gesamte **Auftriebskraft** ist also

$$F = (F_1, F_2, F_3) = \int_{\partial K} F(x) \, dS = \int_{\partial K} \varrho x_3 \nu(x) \, dS.$$

Setzte $w_1 := (x_3, 0, 0)$, dann ist

$$F_1 = \langle F, e_1 \rangle = \int_{\partial K} \varrho x_3 \langle \nu, e_1 \rangle \, dS = \varrho \int_{\partial K} \langle \nu, w_1 \rangle \, dS = \varrho \int_K \operatorname{div}(w_1) \, d\lambda = 0.$$

Analog sieht man, dass $F_2 = 0$ gilt. Für $w_3 = (0, 0, x_3)$ ist hingegen $\operatorname{div}(w_3) = 1$ und daher

$$F_3 = \varrho \int_{\partial K} \langle \nu, w_3 \rangle \, dS = \varrho \int_K d\lambda = \varrho \operatorname{Vol}(K).$$

Der Auftrieb wirkt also in x_3 -Richtung und ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

7 Differentialformen

Motivation

Bisher haben wir $\mathbb{R}^n$ als Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ betrachtet. Durch das Skalarprodukt hatten wir einen natürlichen Längenbegriff und, als Konsequenz, auch einen natürlichen Volumenbegriff.

Jetzt sei W ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum ohne Skalarprodukt (allgemeiner eine Mannigfaltigkeit ohne Metrik). Auch wollen wir im folgenden keine Basis in W auszeichnen. Offene Mengen, Stetigkeit und Differenzierbarkeit betreffend identifizieren wir aber W wieder mit $\mathbb{R}^n$ (allgemein betrachtet man Mannigfaltigkeiten mit differenzierbarer Struktur).

7.1 Beispiele. Vektorräume ohne natürliches Skalarprodukt ($\equiv$ Metrik)

- (a) Der Minkowski-Raum $(\mathbb{R}^4, \ll \cdot, \cdot \gg)$ mit

$$\ll x, y \gg = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

ist zwar ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum, trägt aber kein natürliches Skalarprodukt.

- (b) Der Phasenraum der klassischen Mechanik für N -Teilchen ist der $6N$ -dimensionale Vektorraum

$$W = \{(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \mid q_j \in \mathbb{R}^3, p_j \in \mathbb{R}^3\}.$$

Auch hier gibt es kein natürliches Skalarprodukt, da z.B.

$$\langle (q, p), (q, p) \rangle = \sum_{j=1}^n (\|q_j\|^2 + \|p_j\|^2)$$

schon aufgrund der unterschiedlichen physikalischen Dimension von Ort und Impuls keinen Sinn macht.

- (c) Der Raum der thermodynamischen Gleichgewichtszustände lässt sich zwar z.B. durch die "Koordinaten" Volumen V und Entropie S mit $[0, \infty) \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$ identifizieren. Das entsprechende Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ hat aber keinerlei physikalische Bedeutung.

Unser Ziel in diesem Kapitel ist die Integration über Untermannigfaltigkeit von W . Bisher haben wir skalare Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ über Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ integriert, indem wir letztendlich mit Hilfe des Skalarprodukts Volumen- und Flächenelemente konstruiert haben.

Die Objekte, die man ohne Skalarprodukt bzw. Metrik integrieren kann, sind die **Differentialformen**. Wir erklären die grundlegende Idee zunächst ohne mathematische Details:

Eine Differentialform vom Grad k oder kurz **k -Form** auf einer offenen Teilmenge $U \subset W$ ist eine Abbildung ω von U in die alternierenden k -Linearformen auf W , d.h.

$$\omega_p : \underbrace{W \times W \times \dots \times W}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für jedes } p \in U.$$

Zur Erinnerung, eine alternierende Form erfüllt

$$\omega_p(v_1, \dots, v_k) = \text{sgn}(\pi) \omega_p(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \quad \text{für jede Permutation } \pi \in S_k.$$

7 Differentialformen

Eine k -Form ω kann man nun über eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit M integrieren, indem man ω verwendet um das Flächenelement zu definieren. Wir werden sehen, dass die Setzung

$$\int_M \omega := \int_V \omega(D_1\varphi(t), \dots, D_k\varphi(t)) dt$$

einen kartenunabhängigen Integrationsbegriff liefert, wobei $\varphi : V \rightarrow M$ eben eine Karte sei. Die Kartenunabhängigkeit wird aus dem Transformationsverhalten von alternierenden Formen unter linearen Abbildungen folgen: Sei $L : W \rightarrow W$ linear und invertierbar, dann ist

$$\omega(Lv_1, \dots, Lv_k) = \det(L) \omega(v_1, \dots, v_k).$$

Wir merken uns also, dass wir die k -Form ω verwenden, um auf dem k -dimensionalen Tangentialraum an eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit das Flächenelement $\omega(D_1\varphi(t), \dots, D_k\varphi(t))$ zu definieren. Da ω alternierend ist, liefert eine andere Reihenfolge der Basisvektoren allerdings möglicherweise ein anderes Vorzeichen. Der Wert des Integrals hängt also von der Orientierung ab.

7.2 Definition. Orientierung

Eine **Orientierung** Ω auf einem Vektorraum W ist eine der beiden Äquivalenzklassen der Menge aller geordneten Basen von W modulo der Relation

$$(v_1, \dots, v_n) \sim (w_1, \dots, w_n) \quad :\Leftrightarrow \quad \det(a_{ij}) > 0, \quad \text{wobei} \quad w_i = \sum_j a_{ij} v_j.$$

Die Basen in Ω heißen **positiv orientiert**, die anderen **negativ orientiert**. Ein Isomorphismus $\tau : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **positiv orientiert**, wenn

$$(\tau^{-1}(e_1), \dots, \tau^{-1}(e_n)) \in \Omega,$$

wobei $e_j \in \mathbb{R}^n$ den j -ten kanonischen Basisvektor bezeichne.

7.3 Definition. Glattheit, Integrierbarkeit und Messbarkeit von Formen

Die k -Form ω auf $U \subset W$ heißt **glatt, integrierbar oder messbar**, wenn für einen (und damit für jeden) Isomorphismus $\tau : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ und für alle $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ die Abbildung

$$U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \rightarrow \omega_p(\tau^{-1}(e_{j_1}), \dots, \tau^{-1}(e_{j_k}))$$

glatt, integrierbar bzw. messbar ist. Die Menge der glatten k -Formen auf U bezeichnen wir mit $\mathcal{E}^{(k)}(U)$. Die glatten 1-Formen heißen Pfaffsche Formen und die n -Formen heißen Volumenformen.

Wir überlegen uns zunächst, wie man n -Formen über offene Gebiete in W integriert.

7.4 Satz. und Definition. Integration von n -Formen

Sei Ω eine Orientierung auf W , $U \subset W$ offen und ω eine integrierbare n -Form auf U . Dann hat

$$\int_U \omega := \int_{\tau^{-1}(U)} \omega_{\tau(y)}(\tau(e_1), \dots, \tau(e_n)) dy$$

für jeden positiv orientierten Isomorphismus $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow W$ denselben Wert, das **Integral von ω über U** .

Beweis. Ist $\tilde{\tau}$ ein anderer positiv orientierter Isomorphismus, so ist $\tilde{\tau}^{-1} \circ \tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $\det(\tilde{\tau}^{-1} \circ \tau) > 0$. Insbesondere ist $\tilde{\tau}^{-1} \circ \tau$ ein Diffeomorphismus, und die Transformationsformel sagt

$$\int_{\tilde{\tau}^{-1}(U)} \omega_{\tilde{\tau}(x)}(\tilde{\tau}(e_1), \dots, \tilde{\tau}(e_n)) dx = \int_{\tau^{-1}(U)} \omega_{\tau(y)}(\tilde{\tau}(e_1), \dots, \tilde{\tau}(e_n)) \det(\tilde{\tau}^{-1} \circ \tau) dy.$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$\omega_{\tau(y)}(\tilde{\tau}(e_1), \dots, \tilde{\tau}(e_n)) = \det(\tilde{\tau}^{-1} \circ \tau) \omega_{\tau(y)}(\tau(e_1), \dots, \tau(e_n)).$$

Da ω alternierend ist, gilt, wie oben bemerkt, für jeden Isomorphismus $L : W \rightarrow W$

$$\omega_p(Lv_1, \dots, Lv_n) = \det(L) \omega_p(v_1, \dots, v_n).$$

Hier ist $p = \tau^{-1}(y)$, $v_i = \tau^{-1}(e_i)$, $L = \tilde{\tau}^{-1} \circ \tau$ und

$$\det(L) = \det(\tilde{\tau}^{-1} \circ \tau) = \det(\tilde{\tau} \circ \tilde{\tau}^{-1} \circ \tau \circ \tilde{\tau}^{-1}) = \det(\tau \circ \tilde{\tau}^{-1}) = \det(\tilde{\tau} \circ \tau^{-1})^{-1}.$$

□

Die anschauliche Bedeutung von $\omega_p(v_1, \dots, v_n)$ ist das „signierte Volumen“ des von den Vektoren $v_1, \dots, v_n$ aufgespannten Parallelepipeds. Man nennt deshalb eine n -Form auf dem $\mathbb{R}^n$ Volumenform. Es bringt also ω seinen eigenen Volumenbegriff mit.

Wir führen zunächst noch ein paar weitere Begriffe aus der Differentialgeometrie ein.

7.5 Definition. Das Tangentialbündel und Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten

Sei M eine Untermannigfaltigkeit von W und

$$T_p M = \{(p, \alpha'(0)) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ differenzierbar mit } \alpha(0) = p\} \subset \{p\} \times W$$

der **Tangentialraum von M in p** . Die disjunkte Vereinigung der Tangentialräume

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \subset M \times W$$

heißt **Tangentialbündel von M** . Eine Abbildung

$$v : M \rightarrow TM \quad \text{mit} \quad v(p) \in T_p M$$

heißt **Vektorfeld auf M** .

7.6 Bemerkung. (a) Allgemein nennt man Mengen der Form

$$E = \bigcup_{p \in M} E_p \quad \text{wobei } E_p \text{ eine Menge der Form } \{p\} \times \tilde{E}_p \text{ ist}$$

Bündel über M , und Abbildungen der Form

$$s : M \rightarrow E \quad \text{mit} \quad s(p) \in E_p$$

Schnitte durch das Bündel E .

(b) Ein Vektorfeld ist also ein Schnitt durchs Tangentialbündel.

(c) Ist $M = U$ offen, d.h. $\dim M = n = \dim W$, dann ist $TU_p = \{p\} \times W$ und $TU = U \times W$.

(d) Daher stimmt die bisherige Definition eines Vektorfeldes auf offenem $U \subset \mathbb{R}^n$, also $\tilde{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, mit der neuen Definition überein, indem man $v(p) = (p, \tilde{v}(p))$ setzt.

7.7 Definition. Der Cotangentialraum

Der Dualraum $T_p M^* = \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R})$ von $T_p M$ heißt der **Cotangentialraum an M in p** , seine Elemente **Co(tangential)vektoren** und $TM^* = \bigcup_{p \in M} T_p M^*$ das **Cotangentialbündel**. Die Schnitte durch das Cotangentialbündel sind dann die **Covektorfelder**.

7.8 Bemerkung. (a) Die 1-Formen auf $U \subset W$ offen sind also genau die Covektorfelder auf U .

7 Differentialformen

- (b) Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass der Dualraum V^* eines Vektorraums V ebenfalls ein Vektorraum ist mit $\dim V^* = \dim V$. Insbesondere ist also für $\omega, \tilde{\omega} \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ und glattes $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auch

$$\omega_p + f(p)\tilde{\omega}_p$$

wieder eine glatte 1-Form.

- (c) Ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem Vektorraum V definiert einen kanonischen Isomorphismus in den Dualraum,

$$V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle v, \cdot \rangle.$$

Mit Hilfe eines Skalarprodukts (=Metrik) lassen sich also Vektoren und Covektoren identifizieren.

- (d) Covektoren w stellt man sich manchmal graphisch als Schar paralleler (Hyper-)Ebenen mit gleichen Abständen vor. Es ist dann $w(v) = \text{„Anzahl“}$ der vom Vektor v durchstoßenen Ebenen.

7.9 Definition. Das totale Differential als 1-Form

Sei $U \subset W$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Das **totale Differential** df von f ist folgende 1-Form auf U : für $p \in U$ und $\xi \in TU_p$ setze

$$df_p(\xi) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + t\xi).$$

Es ist also $df_p(\xi)$ die Richtungsableitung $D_\xi f(p)$ von f am Punkt p in Richtung ξ .

7.10 Bemerkung. 1-Formen und Vektorfelder

Hat man ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf W , so gibt es zu jeder 1-Form ω_p einen eindeutigen Vektor $F \in W$ mit

$$\omega_p(\xi) = \langle F, \xi \rangle \quad \text{für alle } \xi \in W.$$

Das zu der 1-Form df assoziierte Vektorfeld ist der Gradient $\text{grad} f$,

$$df_p(\xi) = D_\xi f(p) =: \langle \text{grad} f(p), \xi \rangle.$$

7.11 Bemerkung. über Koordinaten

Sei $U \subset W$ offen und $x : U \rightarrow G \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus.

- (a) Die j -te Komponente $x_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ von x liefert die 1-Form dx_j . Für $p \in U$ bilden $(dx_1(p), \dots, dx_n(p))$ eine Basis von TU_p^* .
- (b) Für glattes $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Vektorfeld v auf U gilt

$$\begin{aligned} df_p(v(p)) &= \left. \frac{d}{dt} f(p + tv(p)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (f \circ x^{-1}) \left(x(p + tv(p)) \right) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p)) \left. \frac{d}{dt} x_j(p + tv(p)) \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) dx_j(v(p)). \end{aligned}$$

Man kürzt hier

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \quad \text{für} \quad \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p)).$$

ab.

- (c) Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion und v ein Vektorfeld auf $U \subset W$, kann man sich wegen

$$df(v) = v(f) = D_v f$$

auch vorstellen, dass v als Differentialoperator D_v auf f operiert. In diesem Sinne sind Vektorfelder Differentialoperatoren erster Ordnung. Insbesondere ist $\frac{\partial}{\partial x_j}$ ein Vektorfeld auf W , nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p = \left(p, \frac{d}{dt} x^{-1} \left(x(p) + t e_j \right) \Big|_{t=0} \right),$$

also das j -te **Koordinatenvektorfeld**. Es ist $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right)$ eine Basis von TU_p , die **duale Basis** zu $(dx_1(p), \dots, dx_n(p))$. Das bedeutet

$$dx_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \delta_{ij}.$$

Zu jedem Vektorfeld v und jeder 1-Form ω auf $U \subset W$ offen gibt es also n Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \omega = \sum_{i=1}^n \beta_i dx_i.$$

Wir kommen nun zur Integration von 1-Formen und schreiben im Folgenden wieder $\mathbb{R}^n$ statt W . Damit haben wir Zugriff auf die kanonischen Basen (dx_i) von TU^* und $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ von TU .

7.12 Definition. Das Integral über 1-Formen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ und $\gamma : (a, b) \rightarrow U$ eine glatte Kurve. Man setzt

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \underbrace{w_{\gamma(t)}}_{\in TU_{\gamma(t)}^*} \left(\underbrace{\gamma'(t)}_{\in TU_{\gamma(t)}} \right) dt$$

7.13 Bemerkung. Man nennt eine Umparametrisierung $\tau : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ **orientierungserhaltend**, wenn $\tau'(s) > 0$ für alle $s \in (\alpha, \beta)$ ist, also $\tau(\alpha) = a$ und $\tau(\beta) = b$. Wenn $\tau'(s) < 0$ für alle $s \in (\alpha, \beta)$ ist, so heißt τ **orientierungsumkehrend**.

Das oben definierte Integral ist invariant unter orientierungserhaltenden Parameterwechseln, denn ist $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \tau$, so ist für $\omega = \sum a_j dx_j$

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\alpha}^{\beta} \omega_{\tilde{\gamma}(s)}(\tilde{\gamma}'(s)) ds = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} a_j(\tilde{\gamma}(s)) dx_{j, \tilde{\gamma}(s)}(\tilde{\gamma}'(s)) ds = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} (a_j \circ \tilde{\gamma})(s) \tilde{\gamma}'_j(s) ds.$$

Mit $\frac{d}{ds}(\gamma_j \circ \tau)(s) = \gamma'_j(\tau(s)) \cdot \tau'(s)$ ergibt sich

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} (a_j \circ \gamma \circ \tau)(s) (\gamma'_j \circ \tau)(s) \cdot \tau'(s) ds = \sum_{j=1}^n \int_a^b (a_j \circ \gamma)(t) \gamma'_j(t) dt = \int_{\gamma} \omega.$$

Für $\tau(\alpha) = b$ und $\tau(\beta) = a$ ist dagegen

$$\int_{\gamma \circ \tau} \omega = - \int_{\gamma} \omega.$$

Frage: Wenn $\gamma : (a, b) \rightarrow U$ eine regulär parametrisierte Kurve ist, $C = \gamma((a, b))$, und $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, wie hängt dann obiger Integralbegriff mit $\int_C f dS$ aus Kapitel 5 zusammen?

7.14 Definition. Einheitstangentenfeld an eine Kurve

Sei $\gamma : (a, b) \rightarrow U$ eine regulär parametrisierte Kurve und $C = \gamma((a, b)) \subset U$ die entsprechende eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Man nennt dann

$$\tau : C \rightarrow TC, \quad \gamma(t) \mapsto \tau(\gamma(t)) := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

das **Einheitstangentenfeld** an C entlang von γ .

7.15 Bemerkung. Man beachte, dass $\tau : C \rightarrow TC$ nur von C und der Orientierung von C abhängt, d.h. sich unter orientierungserhaltenden Uparametrisierungen nicht ändert.

7.16 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ und $\gamma : (a, b) \rightarrow C \subset U$ eine regulär parametrisierte Kurve mit Einheitstangentenfeld τ . Dann gilt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_C \omega(\tau) \, dS.$$

Beweis.

$$\int_C \omega(\tau) \, dS = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\tau(t)) |\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b \omega_{\gamma(t)} \left(\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right) |\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \, dt = \int_{\gamma} \omega.$$

□

7.17 Bemerkung. Falls $\omega = df$, so hängt das Integral

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} df = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \, dt = \int_a^b \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

nur von den Endpunkten von γ ab und für geschlossene Wege γ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist

$$\oint_{\gamma} df = 0.$$

Frage: Wann ist $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ totales Differential einer Funktion $f \in \mathcal{E}^{(0)}(U)$, also $\omega = df$? Falls $\omega = df$ für ein $f \in C^2(U)$ ist, so gilt

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j =: \sum_{j=1}^n F_j dx_j$$

mit

$$(*) \quad \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad \text{da} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

7.18 Definition. Geschlossene und exakte 1-Formen, Stammfunktion

(a) Man nennt eine glatte 1-Form $\omega = \sum a_j dx_j \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ auf $U \subset \mathbb{R}^n$ **geschlossen**, wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt:

$$D_i a_j = D_j a_i.$$

(b) Es heißt $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ **exakt**, wenn es ein $f \in \mathcal{E}^{(0)}(U)$ gibt, so dass $\omega = df$ ist. Es heißt f dann eine **Stammfunktion** für ω .

7.19 Bemerkung. Mit (*) ist also jede exakte 1-Form auch geschlossen.

7.20 Definition. Sternförmige Gebiete

Ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, wenn es einen Punkt $p \in U$ gibt (einen **Sternpunkt**), so dass für alle $x \in U$ die gesamte Verbindungsstrecke $[p, x] = \{p + t(x - p) \mid t \in [0, 1]\}$ ganz in U liegt.

7.21 Satz. von Poincaré

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet. Ist $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ geschlossen, so ist ω bereits exakt.

Beweis. Sei o.B.d.A. $p = 0$. Sei $\omega = \sum a_j dx_j$ und $D_j a_i = D_i a_j$. Setze

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\gamma_x} \omega \quad \text{mit} \quad \gamma_x : [0, 1] \rightarrow U, \quad t \mapsto \gamma_x(t) = tx.$$

Wir zeigen nun, dass $D_j f = a_j$, also $\omega = df$:

$$\begin{aligned} D_j f(x) &= D_j \left(\int_0^1 \omega_{\gamma(t)}(\underbrace{\gamma'(t)}_{=x}) dt \right) = D_j \left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 a_i(tx) \underbrace{dx_i(x)}_{=x_i} dt \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 D_j (a_i(tx) x_i) dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 ((D_j a_i)(tx) t x_i + \delta_{ij} a_i(tx)) dt \\ &= \int_0^1 (a_j(tx) + \sum_{i=1}^n (D_i a_j)(tx) t x_i) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t a_j(tx)) dt = t a_j(tx) \Big|_0^1 = a_j(x). \end{aligned}$$

□

7.22 Bemerkung. Also gilt

$$\omega \text{ geschlossen} \Rightarrow \omega \text{ lokal integrierbar} = \omega \text{ lokal exakt.}$$

Völlig analog zum Cauchy-Integralsatz in der Funktionentheorie zeigt man nun:

7.23 Satz. Einfach zusammenhängend: geschlossen $\Rightarrow$ exakt

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ geschlossen. Dann ist ω exakt, also $\omega = df$ für ein $f \in \mathcal{E}^{(0)}$.

7.24 Bemerkung. Integrierbarkeit von Vektorfeldern

Mit Hilfe des Skalarprodukts können wir diesen Satz von 1-Formen auf Vektorfelder übersetzen.

- (a) Sei $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Wann ist v Gradient einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, also $v = \nabla f$?
Mit $\omega = \langle v, \cdot \rangle = \sum_{j=1}^n v_j dx_j$ ist

$$v = \nabla f \Leftrightarrow \omega = df.$$

Damit erhalten wir die folgende notwendige Bedingung an v ,

$$D_i v_j = D_j v_i \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n \quad (\text{Integrierbarkeitskriterium}).$$

Ist U einfach zusammenhängend, so ist dieses Kriterium mit Satz 7.23 auch hinreichend.

- (b) Speziell für $n = 3$ setzt man

$$\text{rot}(v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{rot}(v) = \begin{pmatrix} D_2 v_3 - D_3 v_2 \\ D_3 v_1 - D_1 v_3 \\ D_1 v_2 - D_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also:

- (i) $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ für alle $f \in C^2(U)$.
- (ii) $\operatorname{rot}(v) = 0$ und U einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ es gibt ein $f \in C^2(U)$ mit $v = \nabla f$.

7.25 Beispiel. 1-Formen in der Thermodynamik

Für ein System mit fester Teilchenzahl kann man den Gleichgewichtszustand eindeutig durch Angabe des Volumens V und der Entropie S charakterisieren. Die Energie E kann man dann als Funktion $E(S, V)$ auf der Menge der Gleichgewichtszustände auffassen. Die zugehörige 1-Form

$$dE = \frac{\partial E}{\partial S} dS + \frac{\partial E}{\partial V} dV =: T dS - p dV = \delta Q + \delta W$$

spaltet man in die zwei 1-Formen

$$\text{Wärme} = \delta Q = T dS \quad \text{und} \quad \text{Arbeit} = \delta W = -p dV$$

auf. Arbeit und Wärme sind also keine Funktionen des Zustands, sondern 1-Formen. Es macht nur Sinn, nach der in einem Prozess geleisteten Arbeit/entstandenen Wärme zu fragen, d.h. die entsprechenden 1-Formen entlang eines Weges im Raum der Gleichgewichtszustände zu integrieren. Da δW und δQ nicht geschlossen sind, werden Arbeit und Wärme im Allgemeinen nicht nur von Anfangs- und Endzustand abhängen, sondern vom gewählten Weg. Im Gegensatz dazu ist dE exakt und man liest die Energiedifferenz einfach an Anfangs- und Endzustand ab. Bei einem Kreisprozess ändert sich die Energie des Systems also nicht. Allerdings sind Wärme und Arbeit entlang eines geschlossenen Weges typischerweise nicht Null, was den Bau von Wärmekraftmaschinen ermöglicht.

Man beachte auch, dass die Gleichung $TdS = \delta Q$ eine Gleichung für 1-Formen ist und somit Multiplikation beider Seiten mit der Funktion $1/T$ wieder eine Gleichung für 1-Formen liefert,

$$dS = \frac{1}{T} \delta Q.$$

Die Form $\delta Q/T$ ist also exakt und man nennt $1/T$ dann einen integrierenden Faktor für die Form δQ .

Wir kommen nun wieder zu den k -Formen und wollen zunächst einige Grundbegriffe aus der multilinearen Algebra bereitstellen.

7.26 Definition. Alternierende Multilinearformen

Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n und $V^* = \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$ sein Dualraum. Sei $1 \leq k \leq n$. Eine **alternierende k -Form auf V** ist eine k -lineare Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R},$$

so dass $\omega(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\omega(\dots, w, \dots, v, \dots)$ für alle $v, w \in V$ ist.

7.27 Bemerkung. (a) Die Menge aller alternierenden k -Formen ist selbst ein Vektorraum und wird mit

$$\Lambda^k(V^*)$$

bezeichnet. Für $k = 1$ ist $\Lambda^1(V^*) = V^*$. Für $k = 0$ setzt man $\Lambda^0(V^*) := \mathbb{R}$.

(b) Für Linearformen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in V^*$ setzt man $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k \in \Lambda^k V^*$ fest durch

$$\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k(v_1, \dots, v_k) := \det(\lambda_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq k}.$$

- (c) Sei $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine Basis von V^* . Für jedes geordnete k -Tupel $I = (i_1, \dots, i_k)$ aus $\{1, \dots, n\}$, d.h. $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, setze man

$$\lambda_I := \lambda_{i_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{i_k}.$$

Dann ist

$$\{\lambda_I \mid I \text{ ist geordnetes } k\text{-Tupel in } \{1, \dots, n\}\}$$

eine Basis von $\Lambda^k V^*$. Insbesondere ist

$$\Lambda^k V^* = \{0\} \text{ für } k > n \quad \text{und} \quad \dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k} \text{ für } 0 \leq k \leq n.$$

- (d) Für $k = n$ ist also $\Lambda^n V^*$ 1-dimensional und wird von $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_n$ aufgespannt.
(e) Für $k = n - 1$ ist $\Lambda^{n-1} V^*$ n -dimensional und wird von

$$w_i = \lambda_1 \wedge \dots \wedge \hat{\lambda}_i \wedge \dots \wedge \lambda_n \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

aufgespannt. Der Hut auf $\hat{\lambda}_i$ bedeutet wie immer, dass dieser Faktor ausgelassen wird.

7.28 Bemerkung. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n und $0 \leq k, l \leq n$. Dann gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \rightarrow \Lambda^{k+l} V^*, \quad (\omega, \sigma) \mapsto \omega \wedge \sigma$$

so, dass gilt: ist $\omega = \lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in V^*$ und $\sigma = \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_l$ für $\mu_1, \dots, \mu_l \in V^*$, so ist

$$\omega \wedge \sigma = \lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k \wedge \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_l. \quad (*)$$

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt, da $(*)$ die Abbildung $\wedge$ auf einer Basis von $\Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^*$ festlegt. Die Existenz wurde in den Übungen gezeigt. $\square$

7.29 Bemerkung. Die Abbildung $\wedge$ wird als **äußeres Produkt, Dachprodukt oder Keilprodukt** bezeichnet und hat die folgenden Eigenschaften:

- (1) $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$
- (2) Für $\omega \in \Lambda^k V^*$ und $\sigma \in \Lambda^l V^*$ ist

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \sigma \wedge \omega.$$

Das Dachprodukt $\wedge$ macht

$$\bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V^*$$

zu einer Algebra, der sogenannten äußeren Algebra oder Graßmann-Algebra von V .

7.30 Definition. Differentialformen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $0 \leq k \leq n$. Eine **Differentialform der Ordnung k** (kurz k -Form) ist eine Abbildung

$$\omega : U \rightarrow \bigcup_{p \in U} \Lambda^k T U_p^*,$$

so dass für alle $p \in U$

$$\omega(p) \in \Lambda^k T U_p^*$$

gilt.

7.31 Bemerkung. (a) Seien $x = (x_1, \dots, x_n)$ die kanonischen Koordinaten auf $U \subset \mathbb{R}^n$. Wir wissen bereits, dass $(dx_1, \dots, dx_n)|_p$ eine Basis von TU_p^* ist und mit Bemerkung 7.27 (c) bilden

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad I \text{ ist geordnetes } k\text{-Tupel aus } \{1, \dots, n\},$$

für jedes $p \in U$ eine Basis von $\Lambda^k TU_p^*$. Also gibt es zu jeder k -Form ω auf U eindeutig bestimmte Funktionen $a_I : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt

$$\omega = \sum_I a_I(x) dx_I.$$

Es heißt ω glatt (stetig, usw.), falls die Koeffizientenfunktionen a_I es sind.

(b) Oft wählt man auch die alternative Darstellung

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{1}{k!} a_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

in der man über alle k -Tupel summiert und nicht nur über die geordneten. Man verteilt also das Gewicht a_I gleichmäßig auf alle Permutationen des geordneten Tupels I . Die Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_k}(x)$ wechseln ihr Vorzeichen bei Vertauschung zweier Indizes.

(c) Der Vektorraum der glatten k -Formen auf U wird mit $\mathcal{E}^{(k)}(U)$ bezeichnet.

Das bilineare **Dachprodukt** $\wedge : \mathcal{E}^{(k)}(U) \times \mathcal{E}^{(l)}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{(k+l)}(U)$ ist punktweise definiert

$$(\omega \wedge \sigma)(p) := \omega(p) \wedge \sigma(p)$$

und macht auch

$$\mathcal{E}(U) := \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{E}^{(k)}(U)$$

zu einer Algebra.

7.32 Definition. Integration von k -Formen

Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Untermannigfaltigkeit. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von M und ω eine glatte k -Form auf U . Man setzt dann für jedes Kompaktum $K \subset M$

$$\int_K \omega := \int_{\varphi^{-1}(K)} \omega_{\varphi(t)}(D_1\varphi(t), \dots, D_k\varphi(t)) dt.$$

Die k -Form ω ordnet also dem Spat $(D_1\varphi, \dots, D_k\varphi)$ „sein signiertes Volumen“ zu.

Wir müssen wieder zeigen, dass die Definition nicht von der Wahl der Karte abhängt. Sei also $\tau : \tilde{V} \rightarrow V$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung, so ist zu zeigen, dass für $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \tau$

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} \omega_{\varphi(t)}(D_1\varphi(t), \dots, D_k\varphi(t)) dt = \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(K)} \omega_{\tilde{\varphi}(s)}(D_1\tilde{\varphi}(s), \dots, D_k\tilde{\varphi}(s)) ds$$

gilt.

7.33 Definition. Der Pullback von Differentialformen

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : V \rightarrow U$ glatt. Sei $0 \leq k \leq n$ und $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$. Der **Pullback** (oder **Rücktransport**) von ω unter f ist die k -Form $f^*\omega$ auf V , welche für $q \in V$ und $\xi_1, \dots, \xi_k \in TV_q$ so definiert ist:

$$(f^*\omega)_q(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega_{f(q)}(Df_q(\xi_1), \dots, Df_q(\xi_k)).$$

Hier fasst man das Differential Df_q in natürlicher Weise als eine lineare Abbildung

$$Df_q : TV_q \rightarrow TU_{f(q)}$$

auf, wobei die Verallgemeinerung auf (Unter-)Mannigfaltigkeiten durch

$$\dot{\alpha}(0) \mapsto \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (f \circ \alpha)(t)$$

gegeben ist. Man nennt $f_* = Df : TV \rightarrow TU$ auch den **Push-forward**.

7.34 Bemerkung. Nach Definition 7.4 (mit $\tau = \text{Id}$) ist für eine n -Form $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ auf $U \subset \mathbb{R}^n$ für jedes Kompaktum $K \subset U$

$$\int_K \omega = \int_K f(x) dx.$$

Mit obiger Notation des Pullbacks ist für eine k -Form ω auf U und jedes Kompaktum $K \subset M$ und jede Karte $\varphi : V \rightarrow M$

$$\int_K \omega = \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \omega.$$

Auf der rechten Seite steht hier das Integral einer k -Form über eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^k$.

7.35 Bemerkung. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ und $f : V \rightarrow U$ glatt. Dann gilt für jede k -Form $\omega = \sum \alpha_I dx_I$ auf U , dass $f^* \omega = \sum \beta_J dy_J$ mit

$$\beta_J(q) = \sum_I \det(A_{JI}(q)) \alpha_I(f(q)),$$

wobei $A_{JI}(q)$ der I - J -Minor der $n \times m$ -Matrix

$$A(q) = \left(\underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(q)}_{a_{ij}} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

ist. (D.h. streiche aus A alle Zeilen mit $i \notin I$ und alle Spalten mit $j \notin J$ um A_{JI} zu erhalten.)

Beweis. Mit

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \bigg|_q \right) = Df_q \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \bigg|_q \right) = \sum_{i=1}^n a_{ji}(q) \frac{\partial}{\partial x_i} \bigg|_{f(q)}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \beta_J(q) &= (f^* \omega)_q \left(\frac{\partial}{\partial y_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{j_k}} \right) \\ &= \omega_{f(q)} \left(f_* \left(\frac{\partial}{\partial y_{j_1}} \bigg|_q \right), \dots, f_* \left(\frac{\partial}{\partial y_{j_k}} \bigg|_q \right) \right) \\ &= \omega_{f(q)} \left(\sum_{i_1=1}^n a_{j_1 i_1}(q) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \bigg|_{f(q)}, \dots, \sum_{i_k=1}^n a_{j_k i_k}(q) \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \bigg|_{f(q)} \right) \\ &= \sum_{|I|=k} \omega_{f(q)} \left(\sum_{i_1 \in I} a_{j_1 i_1}(q) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \bigg|_{f(q)}, \dots, \sum_{i_k \in I} a_{j_k i_k}(q) \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \bigg|_{f(q)} \right). \end{aligned}$$

□

7.36 Lemma. Transformationssatz für Volumenformen

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi : V \rightarrow U$ glatt. Dann gilt für jede n -Form $\omega = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ auf U , dass $\Phi^*\omega = b dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ mit

$$b(q) = (a \circ \Phi)(q) \cdot \det(D\Phi(q)).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} b(q) &= \Phi^*(\omega)_q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \omega|_{\Phi(q)} \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \Phi_* \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \\ &= a(\Phi(q)) (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \left(D\Phi(q) \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, D\Phi(q) \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \\ &= a(\Phi(q)) \det(D\Phi(q)) \cdot (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)}_{=1}. \end{aligned}$$

□

7.37 Lemma. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ und $W \in \mathbb{R}^p$ offen, $f : V \rightarrow U$, $g : W \rightarrow V$ glatt, sowie $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$, $\sigma \in \mathcal{E}^{(l)}(U)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- (a) $f^*(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2) = \alpha_1 f^*\omega_1 + \alpha_2 f^*\omega_2$
- (b) $f^*(\omega \wedge \sigma) = f^*\omega \wedge f^*\sigma$
- (c) $g^*f^*(\omega) = (f \circ g)^*(\omega)$

Beweis. Sei $q \in V$ und $p := f(q)$.

- (a) $f^*(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2)(\xi_1, \dots, \xi_k) = (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2)(f_*\xi_1, \dots, f_*\xi_k) = \alpha_1\omega_1(\dots) + \alpha_2\omega_2(\dots) = \alpha_1 f^*\omega_1(\dots) + \alpha_2 f^*\omega_2(\dots)$.
- (b) Für $k = l = 1$ ist

$$f^*(\omega \wedge \sigma)(\xi, \eta) = \omega \wedge \sigma(f_*\xi, f_*\eta) = \omega(f_*\xi)\sigma(f_*\eta) - \omega(f_*\eta)\sigma(f_*\xi) = f^*\omega \wedge f^*\sigma(\xi, \eta).$$

Für $\omega = \lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k$ und $\sigma = \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_l$ ganz analog und dann mit (a) für alle ω und σ .

- (c) Mit der Kettenregel ist $(f \circ g)_* = f_*g_*$ also

$$(f \circ g)^*\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(f_*g_*\xi_1, \dots, f_*g_*\xi_k) = g^*f^*\omega(k_1, \dots, \xi_k).$$

□

7.38 Definition. Seien $\tilde{V}, V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Untermannigfaltigkeit. Eine Umparametrisierung $\tau : \tilde{V} \rightarrow V$ heißt orientierungserhaltend, wenn $D\tau(p) : T\tilde{V}_{\tilde{t}} \rightarrow TV_{\tau(\tilde{t})}$ es für jedes $\tilde{t} \in \tilde{V}$ ist, also wenn $\det(D\tau)(\tilde{t}) > 0$ für alle $\tilde{t} \in \tilde{V}$.

7.39 Satz. Kartenunabhängigkeit des Integrals über k -Formen

Sei $\tau : \tilde{V} \rightarrow V$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung der regulär parametrisierten Untermannigfaltigkeit $\varphi : \mathbb{R}^k \supset V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ und $K \subset M$ kompakt. Dann gilt für $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \tau : \tilde{V} \rightarrow M$ und jedes $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ mit U Umgebung von M , dass

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^*\omega = \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(K)} \tilde{\varphi}^*\omega.$$

Beweis. Sei $\varphi^*\omega = \alpha(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$ dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(K)} \tilde{\varphi}^*\omega &= \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(K)} \tau^*\varphi^*\omega \stackrel{7.36}{=} \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(K)} (\alpha \circ \tau)(\tilde{t}) \det(D\tau(\tilde{t})) d\tilde{t} \\ &\stackrel{\det(D\tau) > 0}{=} \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(K)} (\alpha \circ \tau)(\tilde{t}) J_\tau(\tilde{t}) d\tilde{t} \stackrel{\text{Trafo-Satz}}{=} \int_{\varphi^{-1}(K)} \alpha(t) dt \\ &= \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^*\omega. \end{aligned}$$

□

Wir definieren nun das Analogon des totalen Differentials $d : \mathcal{E}^{(0)}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{(1)}(U)$, $f \mapsto df$ auch für k -Formen.

7.40 Definition. Die äußere Ableitung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$, $\omega = \sum_I a_I dx_I$. Man definiert dann die **äußere Ableitung** $d\omega \in \mathcal{E}^{(k+1)}(U)$ von ω durch

$$d\omega = \sum_{|I|=k} da_I \wedge dx_I$$

also

$$d\omega = \sum_{|I|=k} \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j}_{da_I} \wedge \underbrace{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}}_{dx_I}.$$

7.41 Beispiel. (a) Für $k = 0$ ist df genau das totale Differential und für $k = n$ gilt $d\omega = 0$ für alle $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(U)$.

(b) $k = 1$: Sei $\omega = \sum_{j=1}^n a_j dx_j$, dann ist

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j = \sum_{i < j} (D_i a_j - D_j a_i) dx_i \wedge dx_j.$$

Für $n = 3$ ist

$$d\omega = \text{rot}(a) \cdot d\vec{S},$$

mit $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und dem vektoriellen Oberflächenelement

$$d\vec{S} = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2).$$

(c) Für $k = n - 1$ setzt man allgemeiner

$$dS_i = (-1)^{(i-1)} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

und

$$d\vec{S} = (dS_1, \dots, dS_n).$$

Da die dS_i eine Basis von $\Lambda^{n-1}TU_p$ bilden, gibt es zu jeder $(n - 1)$ -Form ω genau ein Vektorfeld $a = (a_1, \dots, a_n)$ auf U , mit

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dS_i =: a \cdot d\vec{S}.$$

7 Differentialformen

Es ist nun

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_j a_i dx_j \wedge (-1)^{(i-1)} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \operatorname{div}(a) dV, \end{aligned}$$

wenn man mit $dV := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ das Volumenelement bezeichnet.

7.42 Satz. Eigenschaften der äußeren Ableitung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ und $\sigma \in \mathcal{E}^{(l)}(U)$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : V \rightarrow U$ glatt und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- (a) $d(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2) = \alpha_1 d\omega_1 + \alpha_2 d\omega_2$
- (b) $d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma$
- (c) $d(f^* \omega) = f^*(d\omega)$
- (d) $d(d\omega) = 0$

Beweis. Man rechnet alle Behauptungen einfach nach. Zu (d) findet man, dass für $\omega = a dx_I$

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \right) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_l \partial x_j} dx_l \wedge dx_j \wedge dx_I \\ &= \sum_{l < j} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_l} \right) dx_l \wedge dx_j \wedge dx_I = 0. \end{aligned}$$

□

7.43 Definition. Geschlossene und exakte k -Formen

Sei $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$.

- (a) Die k -Form ω heißt **geschlossen**, wenn $d\omega = 0$ ist.
- (b) Die k -Form ω heißt **exakt**, wenn $\omega = d\sigma$ für ein $\sigma \in \mathcal{E}^{(k-1)}(U)$ ist.

7.44 Bemerkung. Mit Satz 7.42 (d) ist jede exakte Form geschlossen.

7.45 Satz. Lemma von Poincaré

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ geschlossen. Dann ist ω bereits exakt.

Beweis. Ähnlich zum Fall $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ in Satz 7.21 (siehe z.B. Forster, Seite 229). □

7.46 Warnung. Für $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ mit $d\omega = 0$ gilt **nicht mehr**:

$$U \text{ einfach zusammenhängend} \Rightarrow \omega \text{ exakt.}$$

Jetzt muss man nicht nur geschlossene Wege, sondern auch geschlossene k -Mannigfaltigkeiten auf einen Punkt zusammenziehen können.

Beispielsweise ist $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ zwar einfach zusammenhängend, aber $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ läßt sich nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen.

8 Der Satz von Stokes

8.1 Definition. Orientierung

- (a) Eine Orientierung o auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Familie von Orientierungen $(o_p)_{p \in M}$ auf $(T_p M)$ so, dass gilt:

Für jedes $p \in M$ existiert eine Umgebung U von p in M und eine Karte $\varphi : V \rightarrow U \subset M$, $V \subset \mathbb{R}^k$ offen, so dass $(D_1\varphi(t), \dots, D_k\varphi(t))$ für alle $t \in V$ eine positiv-orientierte Basis von $T_{\varphi(t)}M$ ist, d.h. $(D_1\varphi(t), \dots, D_k\varphi(t)) \in o_{\varphi(t)}$.

- (b) Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **orientierbar**, wenn es eine Orientierung o auf M gibt.

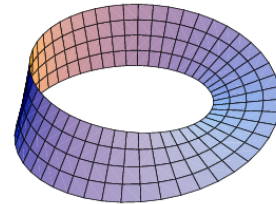
8.2 Beispiel. (a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand $M = \partial K$ und $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalfeld. Dann ist M orientierbar und es gibt genau eine Orientierung o auf M , die Folgendes erfüllt: für $p \in M$ und eine Basis $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ von $T_p M$ ist

$$(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in o_p \iff (\nu(p), \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \text{ ist positiv orientiert in } \mathbb{R}^n.$$

Wir verwenden immer die Standard-Orientierung von $\mathbb{R}^n$, bzgl. derer die kanonische Basis positiv orientiert ist.

Beweis. Sei $\varphi : V \rightarrow U \subset M$ eine Karte mit $p \in U$ und V zusammenhängend. Dann ist mit $A(t) = (\nu(\varphi(t)), D_1\varphi(t), \dots, D_{n-1}\varphi(t))$ wegen der Stetigkeit entweder $\det A(t) > 0$ für alle $t \in V$ oder $\det A(t) < 0$ für alle $t \in V$. Im ersten Fall definiere $o_{\varphi(t)}$ durch $(D_1\varphi(t), \dots, D_{n-1}\varphi(t)) \in o_{\varphi(t)}$. Im zweiten Fall ersetze φ durch $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow U$ mit $\tilde{V} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid (-x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in V\}$ und $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$. $\square$

- (b) Das Möbiusband ist nicht orientierbar:



8.3 Bemerkung. Existenz orientierter Atlanten

Sei (M, o) eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es einen Atlas von Karten $\{\varphi_i : V_i \rightarrow U_i\}$, so dass für alle Kartenwechsel $\tau_{ij} = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ gilt $\det(D\tau_{ij}) > 0$.

Beweis. Sei $\{\tilde{\varphi}_i : \tilde{V}_i \rightarrow U_i\}$ ein Atlas mit $V_i \subset \mathbb{R}^k$ zusammenhängend. Nun ist entweder $D\tilde{\varphi}_i(t) : (\mathbb{R}^k, o_{\text{Std}}) \rightarrow (T_{\tilde{\varphi}_i(t)}M, o_{\tilde{\varphi}_i(t)})$ für alle $t \in V_i$ orientierungserhaltend oder -umkehrend. Im ersten Fall setze $V_i = \tilde{V}_i$ und $\varphi_i = \tilde{\varphi}_i$. Im zweiten Fall setze $V_i = \{t \in \mathbb{R}^k \mid (-t_1, t_2, \dots, t_k) \in \tilde{V}_i\}$ und $\varphi_i(t) = \tilde{\varphi}_i(-t_1, t_2, \dots, t_k)$. Damit ist $\{\varphi_i : V_i \rightarrow U_i\}$ ein Atlas positiv orientierter Karten. Weil die Verknüpfung orientierungserhaltender Isomorphismen wieder orientierungserhaltend ist, folgt, dass $D\tau_{ij}(t) : (\mathbb{R}^k, o_{\text{Std}}) \rightarrow (\mathbb{R}^k, o_{\text{Std}})$ orientierungstreu ist. $\square$

8.4 Definition. Das Integral über k -Formen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}$. Sei $M \subset U$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, o eine

8 Der Satz von Stokes

Orientierung auf M und $K \subset M$ ein Kompaktum. Man wähle nun einen positiv-orientierten Atlas $\{\varphi_i : V_i \rightarrow U_i\}$ von M und eine (U_i) untergeordnete Zerlegung der Eins (α_i) . Dann ist

$$\int_K \omega := \sum_{i=1}^m \int_{U_i} \alpha_i \omega,$$

wobei $\alpha_i \omega \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ kompakten Träger hat und durch

$$\int_{U_i} \alpha_i \omega = \int_{V_i} \varphi_i^* \alpha_i \omega$$

gegeben ist.

8.5 Bemerkung. Man prüft wieder leicht nach, dass die Definition unabhängig von dem positiv-orientierten Atlas und der Zerlegung der Eins ist. Dabei verwendet man, dass $\det D\tau_{ij} = |\det D\tau_{ij}|$ für alle Kartenwechsel gilt.

8.6 Definition. Randpunkte von Untermannigfaltigkeiten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $K \subset M$ kompakt. Man nennt $p \in M$ einen **Randpunkt von K relativ zu M** , wenn gilt: für jede Umgebung $U \subset M$ von p ist

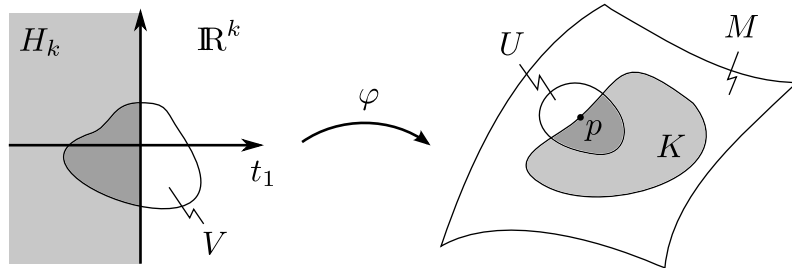
$$U \cap K \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U \cap (M \setminus K) \neq \emptyset.$$

8.7 Definition. Randadaptierte Karten

Ein Kompaktum $K \subset M$ hat **glatten Rand**, wenn gilt: Jeder Randpunkt $p \in \partial K$ besitzt eine Umgebung $U \subset M$ mit einer Karte $\varphi : V \rightarrow U$, für die mit $H_k := \{t \in \mathbb{R}^k \mid t_1 \leq 0\}$ gilt:

- (i) $\varphi(V \cap H_k) = U \cap K$
- (ii) $\varphi(V \cap \partial H_k) = U \cap \partial K$

Man nennt eine solche Karte **randadaptiert um p** .



8.8 Bemerkung. Sei (M, o) eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $K \subset M$ ein Kompaktum mit glattem Rand $C = \partial K$. Dann gilt

- (a) C ist eine $(k-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.
- (b) Auf C wird durch randadaptierte Karten eine Orientierung o_C definiert: Ist $p \in C$ und $\varphi : V \rightarrow U$ randadaptiert um p , so ist $\partial H_k \cong \mathbb{R}^{k-1}$ und es definiert $\varphi : V \cap \partial H_k \rightarrow U \cap C$ eine positiv orientierte Karte.

8.9 Theorem. Der Satz von Stokes

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq k \leq n$ und $\omega \in \mathcal{E}^{(k-1)}(U)$. Sei $M \subset U$ eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $K \subset M$ ein Kompaktum mit glattem Rand ∂K . Es trage ∂K die induzierte Orientierung. Dann gilt:

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega.$$

8.10 Bemerkung. (a) Ist $M = U$, also $k = n$ und $\omega = \sum a_i dS_i \in \mathcal{E}^{(n-1)}(U)$, dann gilt mit $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$

$$\int_{\partial K} \omega = \int_{\partial K} \langle \vec{a}, \nu \rangle dS$$

wobei $K \subset U$ und $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld ist (vgl. Übungen). Da aber $d\omega = \operatorname{div}(\vec{a})dV$ ist, folgt der Satz von Gauß als Spezialfall des Stokesschen Satzes,

$$\int_K \operatorname{div}(\vec{a}) dV = \int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega = \int_{\partial K} \langle \vec{a}, \nu \rangle dS.$$

(b) Im Falle $n = 3$ und $k = 2$ sei $\omega = \langle \vec{a}, \cdot \rangle$. Dann ist $d\omega = \operatorname{rot}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}$. Für eine orientierte Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ und ein Kompaktum $K \subset M$ mit glattem Rand $C = \partial K$ gilt dann der „klassische Satz von Stokes“:

$$\int_K \langle \operatorname{rot}(\vec{a}), \nu \rangle dS = \int_K \operatorname{rot}(\vec{a}) \cdot d\vec{S} = \int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega = \int_C \langle \vec{a}, \tau \rangle dS,$$

wobei τ das Einheitstangentenfeld an die Kurve C ist.

(c) Ist die k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ selbst kompakt, so ist $\partial M = \emptyset$ und der Satz von Stokes besagt: Für alle $\omega \in \mathcal{E}^{(k-1)}(U)$ ist

$$\int_M d\omega = 0.$$

Das Integral einer exakten Form über eine Mannigfaltigkeit ohne Rand verschwindet also immer.

8.11 Bemerkung. Wir haben also für den $\mathbb{R}^3$ die folgende Übersetzung in die Sprache der Vektoranalysis,

$\mathcal{E}^{(0)}(U)$	$\xrightarrow{d}$	$\mathcal{E}^{(1)}(U)$	$\xrightarrow{d}$	$\mathcal{E}^{(2)}(U)$	$\xrightarrow{d}$	$\mathcal{E}^{(3)}(U)$
$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$
$\omega = f$		$\omega = \langle \vec{a}, \cdot \rangle$		$\omega = \vec{a} \cdot d\vec{S}$		$\omega = f dV$
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
$C^\infty(U, \mathbb{R})$	$\xrightarrow{\operatorname{grad}}$	$C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$	$\xrightarrow{\operatorname{rot}}$	$C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$	$\xrightarrow{\operatorname{div}}$	$C^\infty(U, \mathbb{R})$

Wir beweisen nun den Satz von Stokes mit Hilfe des folgenden Lemmas, dessen Beweis später nachgereicht wird.

8.12 Lemma. Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\omega \in \mathcal{E}^{(k-1)}(V)$ mit kompaktem Träger in V . Dann gilt

$$\int_{V \cap H_k} d\omega = \int_{V \cap \partial H_k} \omega.$$

8 Der Satz von Stokes

Beweis. des Satzes von Stokes:

Überdecke $K \subset M$ mit randadaptierten Karten $\varphi_i : V_i \rightarrow U_i$, $i = 1, \dots, r$. Wähle eine (U_i) untergeordnete Zerlegung der Eins (α_i) . Dann ist

$$\int_K d\omega = \sum_{i=1}^r \int_{U_i \cap K} d(\alpha_i \omega) = \sum_{i=1}^r \int_{V_i \cap H_k} \varphi_i^* d(\alpha_i \omega) = \sum_{i=1}^r \int_{V_i \cap H_k} d(\varphi_i^* \alpha_i \omega).$$

Mit Lemma 8.12 ergibt sich

$$\int_K d\omega = \sum_{i=1}^r \int_{V_i \cap H_k} d(\varphi_i^* \alpha_i \omega) = \sum_{i=1}^r \int_{V_i \cap \partial H_k} \varphi_i^* (\alpha_i \omega) = \sum_{i=1}^r \int_{U_i \cap \partial K} \alpha_i \omega = \int_{\partial K} \omega.$$

□

Beweis. von Lemma 8.12

Betrachte die Karte

$$\beta : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \partial H_k \subset \mathbb{R}^k, \quad (s_1, \dots, s_{k-1}) \mapsto (0, s_1, \dots, s_{k-1}).$$

Jede $(k-1)$ -Form ω auf V kann man schreiben als

$$\omega = \sum_{j=1}^k a_j dS_j = \sum_{j=1}^k a_j (-1)^{j-1} dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \dots \wedge dt_k.$$

Es ist also

$$\int_{\partial H_k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \omega_{\beta(s)} (\beta_* e_1, \dots, \beta_* e_{k-1}) ds = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1(0, s) ds.$$

Andererseits ist

$$d\omega = \operatorname{div} \vec{a} dV = \sum_{j=1}^k \frac{\partial a_j}{\partial t_j} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k.$$

Da a kompakten Träger hat, folgt mit dem Hauptsatz

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial a_1}{\partial t_1}(t) dt_1 = a_1(0, t_2, \dots, t_k)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial a_j}{\partial t_j}(t) dt_j = 0 \quad \text{für } j \geq 2.$$

Fubini liefert dann

$$\int_{H_k} \frac{\partial a_1}{\partial t_1}(t) dt = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial a_1}{\partial t_1}(t) dt_1 \right) dt' = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1(0, s) ds$$

und entsprechend

$$\int_{H_k} \frac{\partial a_j}{\partial t_j}(t) dt = 0 \quad \text{für } j \geq 2.$$

Insgesamt ist also

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{H_k} \operatorname{div}(\vec{a}) dt = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1(0, s) ds = \int_{\partial H_k} \omega.$$

□

8.13 Bemerkung. Der Hodge-Isomorphismus

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein orientierter n -dimensionaler euklidischer Raum. Dann definiert man den Stern- oder Hodge-Isomorphismus

$$* : \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^{n-k} V^*$$

wie folgt. Für jede positiv-orientierte Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ setze

$$*\omega(v_{k+1}, \dots, v_n) := \omega(v_1, \dots, v_k).$$

Diesem Isomorphismus liegt zugrunde, dass das Skalarprodukt einen Isomorphismus von Vektoren und Formen liefert:

$$V \ni v \mapsto \omega = \langle v, \cdot \rangle \in V^*$$

und mit Multilinearität

$$V^n \cong V^{*n}.$$

Es gilt

$$** = (-1)^{k(n-k)} \text{Id}_{\Lambda^k V^*}$$

also von $\Lambda^{n-k} V^*$ nach $\Lambda^k V^*$

$$*^{-1} = (-1)^{k(n-k)} *.$$

Die äußere Ableitung $d : \mathcal{E}^{(k)} \rightarrow \mathcal{E}^{(k+1)}$ kann dann zur Coableitung umgedreht werden,

$$\delta : \mathcal{E}^{(k)} \rightarrow \mathcal{E}^{(k-1)}, \quad \delta = (-1)^k * d *^{-1},$$

im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{(k)} & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^{(k+1)} \\ * \downarrow & & \downarrow * \\ \mathcal{E}^{(n-k)} & \xrightarrow{(-1)^k \delta} & \mathcal{E}^{(n-k-1)} \end{array}$$

Mit Hilfe der Coableitung kann man schließlich einen Laplace-Operator auf k -Formen definieren, den Laplace-Beltrami-Operator,

$$\Delta : \mathcal{E}^{(k)} \rightarrow \mathcal{E}^{(k)}, \quad \Delta = d \delta + \delta d.$$

Die Formen im Kern von Δ heißen harmonische Formen und sind Gegenstand der Hodge-Theorie.

Als Einstieg in weiterführende Literatur sei hier noch das Buch *Vektoranalysis* von Klaus Jänich empfohlen.