Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 1

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ws2122/lina1

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Wintersemester 2021/22

Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, den 04.11.2021, 10:00 Uhr

Aufgabe 1. Es seien X sowie Y Mengen, $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A \subseteq X$ sowie $B \subseteq Y$ Teilmengen. Zeige:

$$A \ \subseteq\ \varphi^{-1}(\varphi(A)), \qquad\qquad \varphi(\varphi^{-1}(B)) \ \subseteq\ B.$$

Zeige anhand von Beispielen, dass man bei keiner der beiden Aussagen Gleichheit erwarten darf. Zeige weiter

$$\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(A))) \ = \ \varphi(A).$$

Aufgabe 2. Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(i) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

(ii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, y, 0)$.

(iii) $\mathbb{R} \to \{2\}$, $x \mapsto 2$.

(iv) $C_3 \to C_3$, $x \mapsto x + x$.

Aufgabe 3. Berechne für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ den folgenden Ausdruck in der Gruppe $(C_n, +)$:

$$\overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \cdots + \overline{n-2} + \overline{n-1}.$$

⊛ **Aufgabe 4.** Beweise folgende Aussagen:

(i) Sind $\varphi\colon G \to H$ und $\psi\colon H \to F$ Gruppenhomomorphismen, so ist auch die Komposition $\psi \circ \varphi\colon G \to F$ ein Gruppenhomomorphismus.

(ii) Es seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $l \in \mathbb{Z}$. Dann ist die folgende Abbildung ein Gruppenhomomorphismus:

$$\mathbb{Z} \to C_n, \quad a \mapsto \overline{r(la; n)}.$$

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.