Übungen zur Vorlesung

# Lineare Algebra 1

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ws2122/lina1

**Prof. Dr. Jürgen Hausen**
Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra
Wintersemester 2021/22

## Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, den 11.11.2021, 10:00 Uhr

**Aufgabe 1.** Eine Gruppe $G = \{e_G, g_1, \ldots, g_r\}$ mit Verknüpfung "$*$" wird durch ihre *Verknüpfungstafel* beschrieben:

$$\begin{array}{c|cccc} (G,*) & e_G & g_1 & \cdots & g_r \\ \hline e_G & e_G * e_G & e_G * g_1 & \cdots & e_G * g_r \\ g_1 & g_1 * e_G & g_1 * g_1 & \cdots & g_1 * g_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_r & g_r * e_G & g_r * g_1 & \cdots & g_r * g_r \end{array}$$

(i) Bestimme die Einheitengruppe $C_{12}^*$ des Ringes $C_{12}$.

(ii) Stelle die Verknüpfungstafeln für $C_{12}^*$ und $C_4$ auf.

(iii) Beweise oder widerlege die folgende Aussage: Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $C_{12}^* \to C_4$.

**Aufgabe 2.** Zeige, dass die folgende Abbildung ein bijektiver Körperhomomorphismus ist:

$$\kappa\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad a_1 + a_2 \cdot I \mapsto a_1 - a_2 \cdot I.$$

Zeige weiter:

(i) Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann reell, d.h., von der Form $z = (a, 0)$ mit $a \in \mathbb{R}$, wenn $\kappa(z) = z$ gilt.

(ii) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist die Summe $z + \kappa(z)$ sowie das Produkt $z \cdot \kappa(z)$ reell.

⊛ **Aufgabe 3.** Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $C_7$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \overline{2}x_1 & + & x_2 & - & \overline{4}x_3 & = & \overline{2}, \\ x_1 & - & \overline{6}x_2 & - & \overline{3}x_3 & = & -\overline{2}, \\ & & -\overline{4}x_2 & + & \overline{2}x_3 & = & \overline{3}. \end{array}$$

**Aufgabe 4.** Es sei $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Bestimme zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $z^2 + az + b = 0$ gilt.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.