

LINEARE ALGEBRA 1

<https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ws2122/lina1>

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra
Wintersemester 2021/22

BLATT 5

Abgabe: Donnerstag, den 25.11.2021, 10:00 Uhr

⊛ **Aufgabe 1.** Zeige, dass die folgenden Familien \mathcal{B} Basen der jeweiligen Vektorräume sind und berechne die Koordinatenvektoren $x_{\mathcal{B}}(v)$ bezüglich dieser Basen

(i) $\mathcal{B} := ((1, 1, -1), (3, -1, 2), (2, 0, 1))$ in \mathbb{R}^3 mit $v := (2, 2, 1)$,

(ii) $\mathcal{B} := ((\bar{1}, \bar{2}, -\bar{1}), (\bar{2}, -\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{1}, \bar{0}))$ in C_5^3 mit $v := (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$.

Aufgabe 2. Betrachte den Untervektorraum $U := \text{Lin}(T^0, T^1, T^2)$ von $\mathbb{Q}[T]$ und zeige, dass

$$\mathcal{B} := (1 + 2T, 2 + 5T - 2T^2, -2 - 4T + T^2)$$

eine Basis von U ist. Berechne außerdem die Koordinatenvektoren $x_{\mathcal{B}}(v_i)$ von

$$v_1 := -1 - T^2 \quad \text{und} \quad v_2 := 5 - 12T - 3T^2.$$

Aufgabe 3. Es sei $U := \{x \in \mathbb{K}^n; x_1 + \dots + x_n = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$.

(i) Zeige, dass U ein Untervektorraum von \mathbb{K}^n ist.

(ii) Skizziere U für $n = 1, 2$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(iii) Bestimme eine Basis für U .

(iv) Bestimme die Dimension von U .

Aufgabe 4. Es seien \mathbb{K} ein Körper und X eine endliche Menge. Dann ist die Menge $\text{Abb}(X, \mathbb{K})$ zusammen mit den punktweisen Verknüpfungen

$$(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x), \quad (a \cdot \varphi)(x) := a \cdot \varphi(x)$$

ein \mathbb{K} -Vektorraum, siehe Satz 3.1.14. Für jeden Punkt $x \in X$ definieren wir eine Abbildung $\delta_x \in \text{Abb}(X, \mathbb{K})$ durch

$$\delta_x: X \rightarrow \mathbb{K}, \quad y \mapsto \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & y = x, \\ 0_{\mathbb{K}} & y \neq x. \end{cases}$$

Zeige, dass die Familie $(\delta_x)_{x \in X}$ eine Basis für $\text{Abb}(X, \mathbb{K})$ ist. Wozu wird die Endlichkeit von X dabei gebraucht?

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.