Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 1

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ws2122/lina1

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Wintersemester 2021/22

Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, den 02.12.2021, 10:00 Uhr

Aufgabe 1. Untersuche die folgenden Abbildungen auf Linearität:

(i) $\varphi_1\colon \mathrm{C}_5^2 \to \mathrm{C}_5^3$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, \overline{2}x_1 + \overline{3}x_2, \overline{0})$,

(ii) $\varphi_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2^3$,

(iii) $\varphi_3\colon \mathrm{C}_3^2 \to \mathrm{C}_3$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2^3$,

(iv) $\varphi_4\colon \mathbb{C}[T] \to \mathbb{C}$, $\sum a_\nu T^\nu \mapsto \sum a_\nu z^\nu$ für ein festes $z \in \mathbb{C}$.

⊛ **Aufgabe 2.** Beweise die folgenden Aussagen:

(i) Die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_3$ ist linear und es gilt $\mathrm{Kern}(\pi) = \mathrm{Lin}(e_1, e_2)$.

(ii) Ist $V \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, d. h., V ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, so gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Kern}(\varphi) = V$.

Aufgabe 3. Untersuche in den folgenden Fällen, ob die Vektorräume V_1 und V_2 isomorph sind:

(i) $V_1 \coloneqq \mathbb{Q}^2$ und $V_2 \coloneqq \mathrm{Lin}((7, 2), (0, 76)) \subseteq \mathbb{Q}^2$,

(ii) $V_1 \coloneqq \mathrm{Lin}(T^0, T^8, T^{15}) \subseteq \mathbb{R}[T]$ und $V_2 \coloneqq \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$, wobei $X = \{2, 4, 12, 2020\}$,

(iii) $V_1 \coloneqq \mathrm{Lin}(T^{2n};\ n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}) \subseteq \mathbb{Q}[T]$ und $V_2 \coloneqq \mathrm{Lin}(T^{2n+1};\ n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}) \subseteq \mathbb{Q}[T]$.

Aufgabe 4. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige:

$$\dim(V) \quad = \quad \max\{m \in \mathbb{Z}_{\ge 0};\ \text{es gibt eine Kette } V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_m \text{ mit } V_i \le_{\mathbb{K}} V\}.$$

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.