

LINEARE ALGEBRA 1

BLATT 7

Abgabe: Donnerstag, den 09.12.2021, 10:00 Uhr

Aufgabe 1.

(i) Bestimme alle möglichen Produkte aus je zwei der folgenden drei Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachte die folgenden (3×3) -Matrizen über \mathbb{R} :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad E(\lambda; 3, 1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E(2, 3) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E(\lambda; 2) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Produkte

$$E(\lambda; 3, 1) \cdot A, \quad A \cdot E(\lambda; 3, 1), \quad E(2, 3) \cdot A, \quad A \cdot E(2, 3), \quad E(\lambda; 2) \cdot A, \quad A \cdot E(\lambda; 2).$$

Was passiert dabei mit Zeilen und Spalten von A ?

⊗ **Aufgabe 2.** Betrachte die Basen $\mathcal{B} := ((1, 2), (1, 1))$ und $\mathcal{C} := ((3, 1), (2, 1))$ von \mathbb{R}^2 und bestimme die Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ für die linearen Abbildungen

(i) $\varphi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2),$

(ii) $\varphi_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 2x_2),$

(iii) $\varphi_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_2).$

Aufgabe 3. Es seien \mathbb{K} ein Körper und $V := \text{Lin}(T^0, \dots, T^n) \subseteq \mathbb{K}[T]$ der Vektorraum aller Polynome in der Variablen T über \mathbb{K} vom Grad $\leq n$. Zeige, dass

$$D: V \rightarrow V, \quad \sum_{k=0}^n a_k T^k \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k T^{k-1}$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme die Matrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} := (T^0, \dots, T^n)$ von V für

$$\varphi = D, \quad \varphi = D \circ D, \quad \varphi = D \circ D - D.$$

Aufgabe 4. Es seien \mathbb{K} ein Körper und $\varphi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung von \mathbb{K} -Vektorräumen. Zeige: Ist φ bijektiv, so ist auch φ^* bijektiv und es gilt $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

Die mit ⊗ gekennzeichnete Aufgabe ist zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.