Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 1

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ws2122/lina1

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Wintersemester 2021/22

Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, den 16.12.2021, 10:00 Uhr

⊛ **Aufgabe 1.** Bestimme den Rang folgender Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(3,5;C_5)$ und $B \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbb{Q})$:

$$A := \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{3} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 2 & 3 & e \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } ad \neq bc.$$

Aufgabe 2. Schreibe folgende Matrix als Produkt von Elementarmatrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbb{Q}).$$

Aufgabe 3. Bestimme die Inversen für folgende Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathrm{C}_7)$ und $B \in \mathrm{Mat}(4,4;\mathbb{C})$:

$$A := \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{5} & \overline{2} \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-I & 1 \\ -1 & 1 & I & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -I \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeige folgende Aussagen:

(i) φ ist genau dann injektiv, wenn φ^* surjektiv ist,

(ii) φ ist genau dann surjektiv, wenn φ^* injektiv ist.

Hinweis: Wähle Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ für V, W und vergleiche die Ränge der darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(\varphi^*)$.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.