Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 1

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ws2122/lina1

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Wintersemester 2021/22

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, den 23.12.2021, 10:00 Uhr

Aufgabe 1. Es seien Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}(m, k; \mathbb{K})$ über einem Körper $\mathbb{K}$ gegeben. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gibt eine Matrix $X \in \mathrm{Mat}(n, k; \mathbb{K})$ mit $A \cdot X = B$.

(ii) Es gilt $\mathrm{Rang}(A, B) = \mathrm{Rang}(A)$.

Aufgabe 2. Betrachte die beiden Permutationen

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \tau := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

und berechne die folgenden Ausdrücke:

$$\sigma \circ \tau, \quad \tau \circ \sigma, \quad \sigma^{-1}, \quad \tau^{-1}, \quad \mathrm{sg}(\sigma), \quad \mathrm{sg}(\tau), \quad \mathrm{sg}(\sigma^{-1}), \quad \mathrm{sg}(\tau \circ \sigma).$$

Aufgabe 3 (Kleinsche Vierergruppe)**.** Zeige, dass folgende Teilmenge eine Untergruppe ist:

$$V_4 := \{\mathrm{id}_{X_4}, (1,2) \circ (3,4), (1,3) \circ (2,4), (1,4) \circ (2,3)\} \subseteq S_4.$$

⊛ **Aufgabe 4.** Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis für $\mathbb{K}^n$ und S_n die symmetrische Gruppe. Beweise folgende Aussagen:

(i) Zu jedem $\sigma \in S_n$ gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\varphi_\sigma \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit

$$\varphi_\sigma(e_i) \;=\; e_{\sigma(i)} \qquad \text{für } 1 \le i \le n.$$

Für je zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ gilt dabei $\varphi_{\sigma \circ \tau} \;=\; \varphi_\sigma \circ \varphi_\tau$.

(ii) Die darstellende Matrix A_σ von φ_σ bezüglich $\mathcal{E}$ ist invertierbar und es gilt

$$A_\sigma \;=\; M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi_\sigma) \;=\; (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}).$$

Für je zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ gilt dabei $A_{\sigma \circ \tau} \;=\; A_\sigma \cdot A_\tau$.

(iii) Die Abbildung $S_n \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $\sigma \mapsto A_\sigma$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.