Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 1

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ws2122/lina1

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Wintersemester 2021/22

Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, den 13.01.2022, 10:00 Uhr

In der Weihnachtspause (24. Dezember - 8. Januar) finden keine Vorlesungen und Übungsgruppen statt. Der Vorlesungs- und Übungsbetrieb beginnt wieder am Montag, den 10. Januar 2022.

Wir wünschen allen eine erholsame Zeit, frohe Festtage und alles Gute für das Jahr 2022!

Aufgabe 1. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zu $\sigma \in S_n$ sei $A_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ die zugehörige Permutationsmatrix. Zeige: Man hat ein kommutatives Diagramm von Gruppenhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
S_n \arrow[r, "\sigma \mapsto A_\sigma"] \arrow[d, "\sigma \mapsto \mathrm{sg}(\sigma)"'] & \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \arrow[d, "A \mapsto \det(A)"] \\
\{\pm 1\} \arrow[r, "\pm 1 \mapsto \pm 1_{\mathbb{K}}"'] & \mathbb{K}^*
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 2. Es sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Betrachte die Matrix

$$A_n := \begin{pmatrix}
\overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \ldots & \ldots & \ldots & \overline{0} \\
\overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \ldots & \ldots & \overline{0} \\
\overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \ldots & \overline{0} \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \overline{0} \\
\overline{0} & \ldots & \ldots & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\
\overline{0} & \ldots & \ldots & \ldots & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1}
\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, n; C_2),$$

deren Eintrage auf der Diagonalen sowie der oberen und unteren Nebendiagonalen gleich $\overline{1}$ und ansonsten $\overline{0}$ sind.

(i) Zeige: Für $n \geq 3$ gilt $\det(A_n) = \det(A_{n-1}) + \det(A_{n-2})$.

(ii) Für welche $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ist die Matrix A_n invertierbar?

⊛ **Aufgabe 3.** Bestimme die Determinante der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(4, 4; \mathbb{Q})$:

$$A \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{Z})$, d.h., alle Einträge von A seien ganze Zahlen. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gibt eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{Z})$ mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$.

(ii) Es gilt $\det(A) = \pm 1$.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.