

# LINEARE ALGEBRA 1

<https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ws2122/lina1>

Fachbereich Mathematik  
Arbeitsbereich Algebra  
Wintersemester 2021/22

---

## BLATT 11

Abgabe: Donnerstag, den 20.01.2022, 10:00 Uhr

---

- ⊗ **Aufgabe 1.** Es sei  $V := \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Abbildungen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (mit den punktweisen Verknüpfungen) und es seien

$$V^+ := \{f \in V; f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\},$$

$$V^- := \{f \in V; f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Nach Blatt 4 sind die Teilmengen  $V^+, V^- \subseteq V$  Untervektorräume. Zeige: Es gilt  $V = V^+ \oplus V^-$ .

**Aufgabe 2.** Es seien  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\varphi_1, \dots, \varphi_k: V \rightarrow V$  lineare Abbildungen mit

$$\varphi_j \circ \varphi_i = 0, \text{ falls } i \neq j, \quad \varphi_1 + \dots + \varphi_k = \text{id}_V.$$

Zeige: Es gilt  $V = \varphi_1(V) \oplus \dots \oplus \varphi_k(V)$ .

**Aufgabe 3** (Ein alternativer Beweis für 7.2.14). Es seien  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $U, W \leq_{\mathbb{K}} V$  Untervektorräume und  $(v_1, \dots, v_k)$  eine Basis für  $U \cap W$ .

- (i) Zeige: Es gibt Basen  $(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n)$  für  $U$  und  $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m)$  für  $W$ .
- (ii) Zeige: Die Familie  $(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m)$  ist eine Basis für die Summe  $U + W$ .

**Aufgabe 4.** Es seien  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $U \leq_{\mathbb{K}} V$  ein Untervektorraum. Weiter sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis für  $V$  mit  $\text{Lin}(v_1, \dots, v_k) \cap U = \{0_V\}$  und  $v_{k+1}, \dots, v_n \in U$ . Zeige, dass  $(v_1 + U, \dots, v_k + U)$  eine Basis für  $V/U$  ist.

---

Die mit ⊗ gekennzeichnete Aufgabe ist zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.