Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 1

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ws2122/lina1

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Wintersemester 2021/22

Blatt 12

Abgabe: Donnerstag, den 27.01.2022, 10:00 Uhr

⊛ **Aufgabe 1.** Zeige, dass die folgenden Familien Basen des $V := \mathbb{R}^3$ sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &:= ((-2,2,1),\,(0,1,0),\,(1,1,-1)), \\ \mathcal{C} &:= ((1,1,-1),\,(-1,-1,2),\,(1,0,1)). \end{aligned}$$

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A{\cdot}x$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und bezeichne mit $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $V = \mathbb{R}^3$. Bestimme die folgenden Matrizen

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi), \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_V), \quad (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_V))^{-1}, \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_V),$$

$$(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_V))^{-1}, \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi), \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi), \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi).$$

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Untersuche, welche der folgenden Relationen Äquivalenzrelationen auf $\mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ sind:

(i) $A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; B = S \cdot A \cdot S^{-1}$ für ein $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$,

(ii) $A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; \det(A \cdot B) = 0$,

(iii) $A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; \ker(\mu_A) = \ker(\mu_B)$,

(iv) $A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; A^2 + B^2 = E_n$.

Aufgabe 3. Es sei $C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{nx}.$$

Zeige, dass $(f_1, \ldots, f_{999})$ eine linear unabhängige Familie in dem Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^n := \varphi \circ \cdots \circ \varphi = 0$ für ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zeige, dass φ genau dann diagonalisierbar ist, wenn $\varphi = 0$ gilt.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.