Lie-Algebren

Anton Deitmar

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlegendes

1.1 Definition

Definition 1.1.1. Eine **Algebra** ueber einem Koerper $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum A zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$b : A \times A \to A.$$

Die Algebra heisst **assoziativ**, falls gilt

$$b(b(x, y), z) = b(x, b(y, z)).$$

Wenn klar ist, welche bilineare Abbildung gemeint ist, schreibt man auch xy statt $b(x, y)$ und die Assoziativitaet schreibt sich dann in der gewohnten Form $(xy)z = x(yz)$.

Lie-Algebren sind eine besondere Klasse von nichtassoziativen Algebren.

Definition 1.1.2. Eine **Lie-Algebra** ueber einem Koerper $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{L}$ mit einer bilinearen Abbildung

$$[.,.] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L},$$

so dass fuer alle $X, Y, Z \in \mathcal{L}$ gilt:

(a) $[X, X] = 0$ und

(b) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$

Zur ersten Formel sagt man, dass $[.,.]$ **alternierend** ist. Die zweite heisst die **Jacobi-Identitaet**.

Beispiele 1.1.3. • Jeder Vektorraum $\mathcal{L}$ wird durch $[X, Y] = 0$ eine Lie-Algebra. In diesem Fall nennt man $\mathcal{L}$ eine **abelsche Lie-Algebra**.

- Der Vektorraum $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ aller $n \times n$ Matrizen ueber $\mathbb{K}$ wird eine Lie-Algebra durch die **Kommutatorklammer**:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

(Nachrechnen!)
Diese Lie-Algebra wird auch mit $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ bezeichnet.

- Der Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen A mit $\mathrm{tr}(A) = 0$ ist eine Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Diese Lie-Algebra wird mit $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ bezeichnet.

- Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein **Vektorfeld** ist ein glatter Schnitt in das Cotangentialbuendel, oder, was dasselbe ist, ein Differentialoperator der Ordnung 1, der konstante Funktionen anulliert. Sind X, Y Vektorfeld, dann ist der Differentialoperator $[X, Y] = XY - YX$ wieder ein Vektorfeld. Der Raum der Vektorfelder bildet eine Lie-Algebra ueber $\mathbb{R}$.

Definition 1.1.4. Eine **Unteralgebra** $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ einer Lie-Algebra $\mathcal{L}$ ist ein Untervektorraum, der mit $[.,.]$ selbst wieder eine Lie-Algebra wird. Dies ist aequivalent zu

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H},$$

wobei fuer einen Vektorraum $U \subset \mathcal{L}$ der Ausdruck $[U, U]$ fuer den Untervektorraum erzeugt von allen $[u, u']$ mit $u, u' \in U$ steht.

Beispiele 1.1.5. • Sind $\mathcal{L}, \mathcal{H}$ Lie-Algebren ueber $\mathbb{K}$, dann wird die **direkte Summe** $\mathcal{L} \oplus \mathfrak{h}$ durch die Vorschrift

$$[X + Y, X' + Y'] = [X, X'] + [Y, Y']$$

eine Lie-Algebra.

- Die Lie-Algebra aller Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ mit $A \in \mathrm{M}_k(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ist eine Unteralgebra von $\mathrm{M}_{k+n}(\mathbb{K})$.

Definition 1.1.6. Eine Lie-Algebra $\mathcal{L}$ heisst **kommutativ** oder **abelsch**, falls $[X, Y] = 0$ fuer alle $X, Y \in \mathcal{L}$ gilt.

Ein **Ideal** in einer Lie-Algebra $\mathcal{L}$ ist ein Untervektorraum I mit $[I, \mathcal{L}] \subset I$, also mit der Eigenschaft $[X, Y] \in I$ fuer alle $X \in I$, $Y \in \mathcal{L}$. Insbesondere ist jedes Ideal eine Unteralgebra.

Beispiele 1.1.7. • Sei B die Lie-Algebra aller oberen Dreiecksmatrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ & c \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{K})$. Dann ist $I = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ & 0 \end{smallmatrix}\right) \in B\}$ ein Ideal.

- Ist $S \subset \mathcal{L}$ ein Unterraum, dann ist der **Normalisator** von S definiert als

$$N_{\mathfrak{g}}(S) = \left\{X \in \mathfrak{g} : [X, S] \subset S\right\}.$$

Die Jacobi-Identitaet zeigt, dass $N_{\mathfrak{g}}(S)$ stets eine Unteralgebra in $\mathcal{L}$ ist. Ist S eine Unteralgebra, dann ist $N_{\mathfrak{g}}(S)$ die groesste Unteralgebra in der S ein Ideal ist.

Definition 1.1.8. Ein **Homomorphismus** von Lie-Algebren ist eine lineare Abbildung $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{H}$ mit

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$$

fuer alle $X, Y \in \mathcal{L}$. Ein **Isomorphismus** ist ein Homomorphismus, der bijektiv ist. In diesem Fall ist die Umkehrabbildung ebenfalls ein Homomorphismus.

Der Kern eines Homomorphismus ist ein Ideal.

Satz 1.1.9. *Zwei abelsche Lie-Algebren sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.*

Es gibt bis auf Isomorphie genau eine Lie-Algebra der Dimension 1, die abelsche.

In der Dimension zwei gibt es genau zwei Isomorphieklassen von Lie-Algebren, die abelsche und eine weitere, die eine Basis e, f hat mit $[e, f] = e$.

Beweis. Sind A und B abelsche Lie-Algebren und haben sie dieselbe Dimension, dann gibt es einen Isomorphismus von Vektorraeumen $\phi : A \xrightarrow{\cong} B$. Da beide abelsch sind, ist ϕ auch ein Isomorphismus von Lie-Algebren.

Ist $\mathcal{L}$ eindimensional und v eine Basis, dann ist $[v, v] = 0$, also ist $\mathcal{L}$ abelsch.

Sei $\dim \mathfrak{g} = 2$ und nimm an, dass $\mathcal{L}$ nicht abelsch ist. Ist v_1, v_2 eine Basis, wegen

$$[av_1 + bv_2, cv_1, dv_2] = (ad - bc)[v_1, v_2]$$

wird der Raum $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ von $[v_1, v_2]$ aufgespannt, ist also eindimensional. Sei e eine Basis dieses Raums, dann existiert ein f mit $[e, f] = e$ und dieses f ist linear unabhaengig von e. $\square$

Es gibt ein paar standard Unteralgebren von $\mathfrak{gl}_n$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{K}) &= \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{K}) :\}, \\ \mathfrak{o}_n(\mathbb{K}) &= \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) : X + X^t = 0\}, \\ \mathfrak{sp}_n(\mathbb{K}) &= \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) : JX + X^t J = 0\}, \quad J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \end{aligned}$$

Definition 1.1.10. Ist I ein Ideal in $\mathcal{L}$, dann definiert man auf dem Qutotientenvektorraum $\mathfrak{g}/I$ ein Produkt

$$[X + I, Y + I] = [X, Y] + I.$$

Satz 1.1.11. (a) *Die Lie-Klammer auf $\mathfrak{g}/I$ ist wohldefiniert und macht $\mathfrak{g}/I$ zu einer Lie-Algebra.*

(b) *Der Kern eines Lie-Homomorphismus $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{H}$ ist ein Ideal und jedes Ideal ist Kern eines Homomorphismus.*

(c) *Das Bild eines Lie-Homomorphismus $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{H}$ ist eine Unter-Lie-Algebra $\phi(\mathcal{L})$ und ϕ induziert einen Isomorphismus*

$$\mathfrak{g}/\ker(\phi) \cong \phi(\mathcal{L}).$$

(d) *Seien $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ Unteralgebren von L. Ist $[M, N] \subset N$, dann ist $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{L}$, $\mathfrak{n}$ ein Ideal in $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$ ist ein Ideal von $\mathfrak{m}$ und die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}/(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}) &\to (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})/\mathfrak{n}, \\ X + (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}) &\mapsto X + \mathfrak{n} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

(e) *Sind $I \subset J$ Ideale in $\mathcal{L}$, dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g}/I)/(J/I) &\to \mathfrak{g}/J, \\ X + I + (J) &\mapsto X + J \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Die Beweise seien dem Leser zur Uebung gelassen. □

1.2 Lie-Gruppen

In diesem Abschnitt wird die Sprache der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten benutzt. Es soll nur zur Illustration dienen und hat keine Verbindung mit dem Rest der Vorlesung. Es soll illustriert werden, welches Interesse die Analysis an Lie-Algebren hat.

Definition 1.2.1. Eine **Lie-Gruppe** ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G mit einer Gruppenstruktur, dergestalt dass die Strukturabbildungen

$$\begin{aligned} G \times G, &\to G \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} G &\to G, \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

unendlich oft differenzierbar sind.

Sei G eine Lie-Gruppe. Dann operiert G auf dem Menge $\mathrm{Vekt}(G)$ aller Vektorfelder durch

$$(g.X)_p = D(l_g)X_{g^{-1}p},$$

wobei $l_g : G \to G$ die Linkstranslation ist, also $l_g(x) = gx$ und $Dl_g(x)$ ist das Differential, also eine lineare Abbildung $T_xG \to T_{gx}G$. Eine andere Beschreibung derselben Operation geht so: Ein Vektorfeld kann auch als ein Differentialoperator der Ordnung 1 aufgefasst werden. Die Gruppe G operiert auf der Menge aller Differentialoperatoren durch

$$g.D = L_g D L_{g^{-1}},$$

wobei $L_g : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$, $L_g\phi(x) = \phi(g^{-1}x)$. Wir stellen fest, dass g durch Algebren-Homomorphismen operiert:

$$g.(DE) = L_g DE L_{g^{-1}} = L_g D L_{g^{-1}} L_g E L_{g^{-1}} = (g.D)(g.E).$$

Sei

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Vekt}(G)^G$$

die Menge aller G-invarianten Vektorfelder, also aller Vektorfelder X mit $g.X = X$ fuer alle $g \in G$.

Lemma 1.2.2. $\mathrm{Lie}(G)$ *ist eine reelle Lie-Unteralgebra von* $\mathrm{Vekt}(G)$ *der Dimension* $d = \dim(G)$.

Beweis. Anhand der ersten Beschreibung der Operation sehen wir, dass die Abbildung $X \mapsto X_e \in T_eG$ eine lineare Bijektion $\mathrm{Lie}(G) \xrightarrow{\cong} T_eG$ liefert, so dass $\dim \mathrm{Lie}(G) = \dim(G)$ folgt. Seien nun $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$. Fuer $g \in G$ gilt dann

$$g.[X, Y] = g.(XY - YX) = g.(XY) - g.(YX) = g.Xg.Y - g.Yg.X = XY - YX = [X, Y],$$

so dass $[X, Y]$ ebenfalls in $\mathrm{Lie}(G)$ liegt. □

Satz 1.2.3. *Seien G, H zwei zusammenhaengende Lie-Gruppen. Dann sind aequivalent:*

(a) *Die Lie-Algebren* $\mathrm{Lie}(G)$ *und* $\mathrm{Lie}(H)$ *sind isomorph.*

(b) *Es gibt eine Umgebungen $U \subset G$ und $V \subset H$ der jeweiligen Eins und einen Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ mit der Eigenschaft $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, falls $x, y, xy \in U$.*
Man sagt hierzu: G und H sind **lokal isomorph***.*

(c) *Die Universellen Ueberlagerungen $\tilde{G}$ und $\tilde{H}$ sind als Lie-Gruppen isomorph.*

Der Beweis findet sich in vielen Buechern ueber Lie-Gruppen, zum Beispiel in Frank Warner: Foundations of Lie Groups and Differentiable Manifolds.

1.3 Die adjungierte Darstellung

Definition 1.3.1. Eine **Darstellung** einer Lie-Algebra $\mathcal{L}$ auf einem Vektorraum V ist eine lineare Abbildung

$$\phi : \mathcal{L} \to \mathrm{End}(V)$$

mit der Eigenschaft

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X).$$

Satz 1.3.2 (Adjungierte Darstellung)**.** *Sei $\mathcal{L}$ eine Lie-Algebra. Die Abbildung $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathcal{L} \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$, gegeben durch*

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$$

ist eine Darstellung auf dem Vektorraum $\mathcal{L}$.

Beweis. Wir rechnen mit Hilfe der Jacobi-Identitaet:

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}([X,Z])(Y) &= [[X,Z],Y] \\ &= -[[Z,Y],X] - [[Y,X],Z] \\ &= [X,[Z,Y]] - [Z,[X,Y]] \\ &= \operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Z)Y - \operatorname{ad}(Z)\operatorname{ad}(X)Y \\ &= [\operatorname{ad}(X),\operatorname{ad}(Z)]Y.\end{aligned}$$ □

Definition 1.3.3. Der Kern der adjungierten Darstellung wird auch das **Zentrum** von $\mathcal{L}$ genannt:

$$Z(\mathcal{L}) = \left\{X \in \mathfrak{g} : [X,Y] = 0\,\forall_{Y\in\mathfrak{g}}\right\}.$$

1.4 Aufloesbarkeit und Nilpotenz

Definition 1.4.1. Sei $\mathcal{L}$ eine Lie-Algebra. Fuer beliebige Unterraeume $U, V \subset \mathcal{L}$ sei

$$[U,V]$$

der Raum, der von allen $[u,v]$ aufgespannt wird, wobei $u \in U$ und $v \in V$ ist.

Definiere $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathcal{L}$ und $\mathfrak{g}^{(j+1)} = [\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}^{(j)}]$. Man nennt die Reihe $\mathfrak{g}^{(0)} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \dots$ die **abgeleitete Reihe**. Die Lie-Algebra $\mathcal{L}$ heisst **aufloesbar**, falls $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ fuer ein $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele 1.4.2.
- Jede abelsche Algebra ist aufloesbar.
- Die Unteralgebra B von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ bestehend aus allen oberen Dreiecksmatrizen ist aufloesbar.

Proposition 1.4.3. (a) *Die $\mathfrak{g}^{(j+1)} \subset \mathfrak{g}^{(j)}$ sind Ideale in $\mathcal{L}$.*

(b) *Ist $\mathcal{L}$ aufloesbar, dann gilt dasselbe fuer alle Unteralgebren und Quotienten.*

(c) *Ist $I \subset \mathcal{L}$ ein aufloesbares Ideal so dass $\mathfrak{g}/I$ aufloesbar ist, dann ist auch $\mathcal{L}$ aufloesbar.*

(d) *Sind I, J aufloesbare Ideale von $\mathcal{L}$, dann ist auch $I + J$ aufloesbar.*

(e) *$\mathcal{L}$ ist genau dann aufloesbar, falls es eine absteigende Filtrierung von Unteralgebren gibt*

$$\mathfrak{g} = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k = 0$$

so dass jedes F_{j+1} ein Ideal in F_j ist und F_{j+1}/F_j abelsch.

Beweis. (a) $\mathfrak{g}^{(0)}$ ist ein Ideal. Sei nun $\mathfrak{g}^{(j)}$ bereits als Ideal erkannt und seien $X \in \mathcal{L}$, $Y \in \mathfrak{g}^{(j+1)}$. Wir wollen zeigen, dass $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{(j+1)}$ gilt. Hierzu reicht es, anzunehmen, dass $Y = [Y_1, Y_2]$ ist, wobei $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}^{(j)}$, da Y im Allgemeinen eine Linearkombination von solchen Elementen ist. Es gilt dann

$$\begin{aligned}[X, Y] &= [X, [Y_1, Y_2]] \\ &= -[Y_1, [Y_2, X]] - [Y_2, [X, Y_1]].\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind $[Y_2, X]$ und $[X, Y_1]$ in $\mathfrak{g}^{(j)}$ und damit ist $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{(j+1)}$.

(b) Ist $U \subset \mathcal{L}$ eine Unteralgebra, dann ist $U^{(j)} \subset \mathfrak{g}^{(j)}$ fuer jedes j. Ist also $\mathcal{L}$ aufloesbar, so auch U. Ist $I \subset \mathcal{L}$ ein Ideal, dann ist $(\mathfrak{g}/I)^{(j)} = \mathfrak{g}^{(j)}/I \cap \mathfrak{g}^{(j)}$ und damit ist $\mathfrak{g}/I$ aufloesbar, falls $\mathcal{L}$ es ist.

(c) Seien I und $\mathfrak{g}/I$ aufloesbar, also etwa $(\mathfrak{g}/I)^{(k)} = 0$. Das bedeutet $\mathfrak{g}^{(k)} \subset I$. Damit ist $\mathfrak{g}^{(k+j)} \subset I^{(j)}$, damit ist also auch $\mathcal{L}$ aufloesbar.

(d) Als Unter-Lie-Algebra von I ist $I \cap J$ aufloesbar. Es ist $(I + J)/J \cong I/I \cap J$ und da die rechte Seite nach (b) aufloesbar ist, ist nach Teil (c) auch $I + J$ aufloesbar.

(e) Ist $\mathcal{L}$ aufloesbar, so liefert $F_j = \mathfrak{g}^{(j)}$ eine solche Filtrierung. Die Rueckrichtung folgt durch iterierte Anwendung von (c). □

Korollar 1.4.4. *Sei $\mathcal{L}$ eine Lie-Algebra und sei*

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{L}) = \sum_I I,$$

wobei die Summe ueber alle aufloesbaren Ideale von $\mathcal{L}$ laeuft. Dann ist $\mathrm{Rad}(\mathcal{L})$ *ein aufloesbares Ideal, und zwar das groesste in $\mathcal{L}$. Man nennt es das* **Radikal** *von $\mathcal{L}$.*

Definition 1.4.5. Man nennt $\mathcal{L}$ **halbeinfach**, falls $\mathrm{Rad}(\mathcal{L}) = 0$.

Eine Lie-Algebra $\mathcal{L}$ ist genau dann halbeinfach, wenn sie kein abelsches Ideal $\neq 0$ hat.

Beweis. Hat $\mathcal{L}$ ein abelsches Ideal, dann auch ein aufloesbares, sie ist also nicht halbeinfach.

Habe umgekehrt $\mathcal{L}$ ein aufloesbares Ideal I, dann ist $I_1 = [I, I]$ wieder ein Ideal von $\mathcal{L}$ (Jacobi-Identitaet). Dann ist auch $I_2 = [I, I_1]$ ein Ideal von $\mathcal{L}$ und so weiter. Da diese Idealkette irgendwann Null wird ist das letzte nichtverschwindende Glied ein abelsches Ideal von $\mathcal{L}$. □

Definition 1.4.6. Sei $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_{j+1} = [\mathfrak{g}, \mathcal{L}_j]$ die **absteigende Zentralreihe**. Die Lie-Algebra L heisst **nilpotent**, falls $\mathcal{L}_k = 0$ fuer ein $k \in \mathbb{N}$.

Jede nilpotente Algebra ist aufloesbar.

Beispiele 1.4.7.

- Jede abelsche Algebra ist nilpotent.
- Die Algebra $N \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.
$$N = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$
bestehend aus allen oberen Dreiecksmatrizen mit Nullen auf der Diagonalen ist nilpontent.
- Die Algebra B der oberen Dreiecksmatrizen ist aufloesbar, aber nicht nilpotent.

Proposition 1.4.8. (a) *Es gilt $\mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \dots$ und die $\mathcal{L}_j$ sind Ideale in $\mathcal{L}$.*

(b) *Ist $\mathcal{L}$ nilpotent, so sind alle Unteralgebren und alle Quotienten nilpotent.*

(c) *Ist $\mathfrak{g}/Z(\mathcal{L})$ nilpotent, dann ist $\mathcal{L}$ nilpotent.*

(d) *Ist $\mathcal{L} \neq 0$ nilpotent, dann ist $Z(\mathcal{L}) \neq 0$.*

Beweis. (a) $\mathcal{L}_0$ ist ein Ideal und sei $\mathcal{L}_j$ bereits als Ideal erkannt, sowie $\mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \dots \supset \mathcal{L}_j$ bereits bewiesen. Dann folgt aus der Idealeigenschaft von $\mathcal{L}_j$, dass $\mathcal{L}_{j+1} = [\mathfrak{g}, \mathcal{L}_j] \subset \mathcal{L}_j$ und damit folgt wiederum

$$[\mathfrak{g}, \mathcal{L}_{j+1}] \subset [\mathfrak{g}, \mathcal{L}_j] = \mathcal{L}_{j+1},$$

so dass auch $\mathcal{L}_{j+1}$ ein Ideal ist.

(b) Aehnlich wie Teil (b) in Proposition 1.4.3.

(c) Ist $\mathfrak{g}/Z(\mathcal{L})$ nilpotent, dann ist $\mathcal{L}_k \subset Z(\mathcal{L})$ fuer ein $k \in \mathbb{N}$ und damit ist dann $\mathcal{L}_{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathcal{L}_k] \subset [\mathfrak{g}, Z(\mathcal{L})] = 0$.

(d) Sei $\mathcal{L}_k \neq 0$ und $\mathcal{L}_{k+1} = 0$, dann ist $0 = [\mathfrak{g}, \mathcal{L}_k]$, damit also $0 \neq \mathcal{L}_k \subset Z(\mathcal{L})$. □

Definition 1.4.9. Ein Element X einer Lie-Algebra $\mathcal{L}$ heisst **ad-nilpotent**, falls $\mathrm{ad}(X)^k = 0$ fuer ein $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.4.10. *Sei $X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ nilpotent. Dann ist X auch* ad-*nilpotent.*

Beweis. Seien $\mathcal{L}_X, R_X \in \mathrm{End}(\mathcal{L})$ die Links- und Rechtsmultiplikation mit X. Gilt $X^m = 0$, dann folgt $R_X^m = \mathcal{L}_X^m = 0$. Nun ist $\mathrm{ad}(X) = \mathcal{L}_X - R_X$ und daher

$$(\mathrm{ad}(X)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} R_X^k \mathcal{L}_X^{n-k}.$$

Ist nun $n \geq 2m$, dann ist stets $k \geq m$ oder $n - k \geq m$, so dass dann jeder Summand gleich Null ist. □

Satz 1.4.11 (Engel)**.** (a) *Sei* $0 \neq \mathcal{L} \subset \mathfrak{gl}(V)$ *eine Lie-Unteralgebra, wobei* $\dim V < \infty$. *Sind alle* $X \in \mathcal{L}$ *nilpotente Endomorphismen, dann existiert ein* $0 \neq v \in V$ *mit* $\mathfrak{g}.v = 0$.

(b) *Sei* $\mathcal{L}$ *eine endlich-dimensionale Lie-Algebra. Sind alle* $X \in \mathcal{L}$ *ad-nilpotent, dann ist* $\mathcal{L}$ *nilpotent.*

Beweis. (a) Induktion nach $\dim \mathcal{L}$. Der Fall $\dim \mathfrak{g} = 1$ ist klar. Sei $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ eine Unteralgebra $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$. Nach dem letzten Lemma operiert $\mathcal{L}'$ durch nilpotente Endomorphismen auf $\mathcal{L}$ und damit auch auf $\mathfrak{g}/\mathcal{L}'$. Da $\dim \mathcal{L}' < \dim \mathcal{L}$, gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein $X + \mathcal{L}' \neq 0 + \mathcal{L}' \in \mathfrak{g}/\mathcal{L}'$ mit $\mathrm{ad}(\mathcal{L}')X + \mathcal{L}' = \mathcal{L}'$, also liegt X im Normalisator von $\mathcal{L}'$, aber nicht in $\mathcal{L}'$, es folgt also $\mathcal{L}' \subsetneq N_{\mathfrak{g}}(\mathcal{L}')$.

Ist nun $\mathcal{L}'$ eine maximale echte Unteralgebra, dann folgt $\mathfrak{g} = N_{\mathfrak{g}}(\mathcal{L}')$, also ist $\mathcal{L}'$ ein Ideal in $\mathcal{L}$. Wir behaupten, dass $\mathcal{L}'$ Codimension 1 hat. Waere dies nicht der Fall, so waere das Urbild unter $\mathcal{L} \to \mathfrak{g}/\mathcal{L}'$ einer eindimensionalen Unteralgebra eine echte Unteralgebra, die $\mathcal{L}'$ enthaelt, was der Maximalitaet von $\mathcal{L}'$ widerspricht. Es folgt also $\mathfrak{g} = \mathcal{L}' + \mathbb{K}Z$ fuer ein $Z \in \mathcal{L}$. Nach Induktionsvorausssetzung ist $W = \{v \in V : \mathcal{L}'v = 0\}$ ungleich Null. Da $\mathcal{L}'$ ein Ideal ist, ist W stabil unter $\mathcal{L}$. Der nilpotente Endomorphismus Z hat einen Eigenvektor $0 \neq w \in W$ mit $Z.w = 0$, damit ist $\mathfrak{g}.w = 0$.

(b) Nach Teil (a) angewendet auf $\mathrm{ad}(\mathcal{L}) \subset \mathfrak{gl}(\mathcal{L})$, existiert ein $0 \neq Z \in \mathcal{L}$ mit $\mathrm{ad}(\mathcal{L})Z = 0$, also ist Z zentral, also ist $Z(\mathcal{L}) \neq 0$. Mit einer Induktion nach der Dimension ist $\mathfrak{g}/Z(\mathcal{L})$ nilpotent, damit auch $\mathcal{L}$. □

Definition 1.4.12. Sei $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ die Lie-Algebra aller oberen Dreiecksmatrizen mit Nullen auf der Diagonale. Diese ist nilpotent.

Korollar 1.4.13. *Sei* $\mathcal{L} \subset \mathfrak{gl}(V)$ *eine nilpotente Lie-Algebra mit* $n = \dim V$. *Dann existiert eine Basis bezueglich derer* $\mathcal{L}$ *eine Unteralgebra von* $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ *ist.*

Beweis. Induktion nach $n = \dim V$. Fuer $n = 1$ ist nach dem Satz $\mathfrak{g} = 0$. Sei also die Behauptung fuer $n-1$ bewiesen und sei $0 \neq v_1 \in V$ ein Vektor mit $\mathfrak{g}.v = 0$ und ergaenze v_1 zu einer Basis $v_1, v_2, \dots, v_n$ von V. In dieser Basis hat jedes $X \in \mathcal{L}$ eine Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$ mit $C \in M_{n-1}(\mathbb{K})$. Die Matrix C ist wieder nilpotent auf $W = \mathrm{Spann}(v_2, \dots, v_n)$, also gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Basis $w_2, \dots, w_n$ von W so dass jedes $X \in \mathcal{L}$ in dieser Basis obere Dreiecksgestalt mit Nullen auf der Diagonale hat. Die Basis $v_1, w_2, \dots, w_n$ erfuellt das Korollar. $\square$

Lemma 1.4.14. *Sei $\mathcal{L}$ nilpotent und $I \neq 0$ ein Ideal. Dann ist $I \cap Z(\mathcal{L}) \neq 0$.*

Beweis. $\mathcal{L}$ operiert auf I durch die adjungierte Darstellung. Nach Satz 1.4.11 existiert ein $X \in I$ mit $[\mathfrak{g}, X] = 0$. $\square$

1.5 Die universell einhuellende Algebra

Sei $\mathcal{L}$ eine Lie-Algebra ueber einem Koerper $\mathbb{K}$.

Satz 1.5.1. *Es existiert eine (assoziative) Algebra $U(\mathcal{L})$ mit Eins ueber $\mathbb{K}$ und eine lineare injektive Abbildung $\phi : \mathcal{L} \to U(\mathcal{L})$ so dass*

$$\phi([X,Y]) = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X)$$

fuer alle $X, Y \in \mathcal{L}$ gilt und die Algebra $U(\mathcal{L})$ von dem Bild $\phi(\mathcal{L})$ erzeugt wird.

Diese Algebra $U(\mathcal{L})$ hat die universelle Eigenschaft, dass es fuer jede Algebra $\mathcal{B}$ und jeden Lie-Homomorphismus $\eta : \mathcal{L} \to \mathcal{B}$ genau einen Algebrenhomomorphismus $\alpha : U(\mathcal{L}) \to \mathcal{B}$ gibt, der η fortsetzt, d.h., so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\eta"'] & U(\mathcal{L}) \arrow[d, dotted, "\exists!\alpha"] \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Diese Eigenschaft legt die Algebra $U(\mathcal{L})$ bis auf Isomorphie fest. Sie wird die **universell Einhuellende** *Algebra von $\mathcal{L}$ genannt.*

Beweis. Sei

$$T(\mathcal{L}) = \mathbb{K} \oplus \mathcal{L} \oplus (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}^{\otimes n} \oplus \cdots$$

die **tensorielle Algebra**. Dies ist eine assoziative Algebra ueber $\mathbb{K}$ mit dem Produkt

$$(v, w) \mapsto v \otimes w.$$

Sei $I \subset T(\mathcal{L})$ das zweiseitige Ideal erzeugt von allen Elementen der Form

$$[X, Y] - XY + YX$$

wobei X und Y durch alle Elemente von $\mathcal{L}$ laufen. Dann ist $U(\mathcal{L}) := T(\mathcal{L})/I$ eine Algebra und die natuerliche Einbettung $\mathcal{L} \to T\mathcal{L}$ liefert eine injektive lineare Abbildung $\phi : \mathcal{L} \to U(\mathcal{L})$. Ferner ist $U(\mathcal{L})$ vom Bild von ϕ erzeugt und die Eigenschaft

$$\phi([X, Y]) = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X)$$

folgt erzwungenermaßen.

Sei nun $\eta : \mathcal{L} \to \mathcal{B}$ ein Lie-Homomorphismus in eine assoziative Algebra $\mathcal{B}$. Die universelle Eigenschaft der tensoriellen Algebra liefert einen Algebrenhomomorphismus $t : T(\mathcal{L}) \to \mathcal{B}$, der η verlaengert. Da η ein Lie-Homomorphismus ist, ist $t(I) = 0$, damit faktorisiert t eindeutig ueber $U(\mathcal{L})$. □

Lemma 1.5.2. *Sei $I \subset T(L)$ das Ideal aus dem Beweis. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Basis von $\mathcal{L}$ und sei E die Menge aller $X_i \otimes X_j - X_j \otimes X_i - [X_i, X_j]$, $i < j$, in der tensoriellen Algebra $T\mathcal{L}$. Dann gilt*

$$I = (T\mathcal{L}) \otimes E \otimes (T\mathcal{L}),$$

d.h., I besteht aus den Linearkombinationen von Elementen der Form $\alpha \otimes f \otimes \beta$ mit $f \in E$ und $\alpha, \beta \in T\mathcal{L}$. Sei $W \subset T\mathcal{L}$ der Unterraum aufgespannt von allen Monomen $X_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes X_n^{\otimes k_n}$, dann folgt

$$W \cap I = 0.$$

Das bedeutet, dass die Projektion $\Pi : T(\mathcal{L}) \to U(\mathcal{L})$ eingeschraenkt auf W injektiv ist.

Proof. Sei $J = (T\mathcal{L}) \otimes E \otimes (T\mathcal{L})$, dann ist J ein Ideal in $T(\mathcal{L})$. Seien $X, Y \in \mathcal{L}$ beliebig. Schreibt man beide als Linearkombinationen der Basis, so sieht man, dass $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ in J liegt, also folgt $I \subset J$. Die Umgekehrte Inklusion gilt sowieso. Der Rest ist dann klar. □

Definition 1.5.3. Eine **Darstellung** einer assoziativen $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{A}$ (mit Eins) ist ein Algebrenhomomorphismus

$$\phi : \mathcal{A} \to \mathrm{End}(V),$$

wobei ein V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

Das heiss also, ϕ ist linear und erfuellt

$$\phi(1) = \mathrm{Id}_V, \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

fuer alle $a, b \in \mathcal{A}$.

Proposition 1.5.4. *Jede Darstellung $\phi : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V)$ dehnt aus zu einer (assoziativen) Darstellung von $U(\mathcal{L})$. Dies liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Darstellungen} \\ \textit{von } \mathcal{L} \\ \textit{auf } V \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Darstellungen} \\ \textit{von } U(\mathcal{L}) \\ \textit{auf } V \end{array} \right\}.$$

Beweis. Dies gibt die universelle Eigenschaft von $U(\mathcal{L})$. □

Satz 1.5.5 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Basis der Lie-Algebra $\mathcal{L}$. Dann sind die Monome der Form*

$$X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}$$

fuer $k \in \mathbb{N}_0^n$ eine Basis des Vektorraums $U(\mathcal{L})$.

Beweis. In $U(\mathcal{L})$ gilt $X_i X_j = X_j X_j + [X_i, X_j]$. Daher laesst sich jedes Monom $X_{i_1} \cdots X_{i_r}$ in die Form

$$X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n} + R$$

bringen, wobei R eine Summe von Monomen kleineren Grades ist. Man wiederholt dies fuer alle Monome in R und sieht so ein, dass die "geordneten" Monome der Form $X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}$ ein lineares Erzeugendensystem von $U(\mathcal{L})$ bilden.

Die Lineare Unabhaengigkeit folgt aus der Injektivitaet von Π auf W gemäß Lemma 1.5.2. □

Kapitel 2

Halbeinfache Lie-Algebren

Ab jetzt sei der Koerper $\mathbb{K}$ stets algebraisch abgeschlossen mit Charakteristik Null. Ferner sei $\mathcal{L}$ stets eine endlich-dimensionale Lie-Algebra ueber $\mathbb{K}$.

2.1 Der Satz von Lie

Satz 2.1.1 (Lie). *Sei $\mathcal{L}$ eine aufloesbare Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{gl}(V)$ fuer einen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $V \neq 0$. Dann gibt es in V einen gemeinsamen Eigenvektor aller Endomorphismen in $\mathcal{L}$.*

Beweis. Induktion nach $\dim \mathcal{L}$. Ist diese 0, sind wir fertig. Sei also $\dim \mathfrak{g} > 0$ und der Satz fuer alle kleineren Dimensionen bewiesen.

1. Beh: $\mathcal{L}$ enthaelt ein Ideal I von Codimension 1:
Da $0 \neq \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ abelsch ist, gibt es ein Ideal $J \subset \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ von Codimension 1. Sei I das Urbild von J in $\mathcal{L}$, dann ist $\dim(\mathfrak{g}/I) = 1$.

2. Nach Induktionsvoraussetzung hat I einen gemeinsamen Eigenvektor $0 \neq v_0 \in V$. Also gilt fuer jedes $X \in I$

$$Xv_0 = \lambda(X)v_0$$

fuer eine Abbildung $\lambda : I \to \mathbb{K}$. Sei V_λ der Raum aller $v \in V$ mit $Xv = \lambda(X)v$ fuer alle $X \in I$.

3. $\mathcal{L}$ stabilisiert den Raum V_λ und $\lambda([\mathfrak{g}, I]) = 0$:

Sei $v \in V_\lambda$ und $X \in \mathcal{L}$. Fuer $Y \in I$ und $v \in V_\lambda$ gilt dann

$$\begin{aligned} YXv &= \underbrace{[Y,X]}_{\in I} v + XYv \\ &= \lambda([Y,X])v + \lambda(Y)Xv \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass $\lambda([Y,X]) = 0$. (Dann folgt $\mathcal{L}V_\lambda \subset V_\lambda$.)
Sei $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl so dass $v, Xv, X^2v, \dots, X^n v$ linear abhaengig sind. Sei W_j der Raum aufgespannt von $v, Xv, \dots X^{j-1}v$. Dann ist $\dim W_n = n$ und $W_{n+i} = W_n$ fuer $i \geq 0$ und $XW_n \subset W_n$. Ist $Y \in I$, dann folgt induktiv $YW_j \subset W_j$, denn

$$YX^{j-1}v = [Y,X]X^{j-2}v + XYX^{j-2}v \in IW_{j-1} + XIW_{j-1} \subset W_j.$$

In der Basis $v, Xv, \dots, X^{n-1}v$ wird $Y \in I$ dargestellt durch eine obere Dreiecksmatrix. Wir behaupten, dass die Diagonaleintraege alle gleich $\lambda(Y)$ sind. Dies folgt induktiv aus der Kongruenz

$$YX^j v = \underbrace{[Y,X]X^{j-1}v}_{\in W_{j-1}} + XYX^{j-1}v \equiv \lambda(Y)X^j V \mod (W_{j-1})$$

Es folgt, dass

$$\operatorname{tr}(Y|W_n) = n\lambda(Y), \quad Y \in I.$$

Insbesondere ist $\operatorname{tr}([X,Y]|W_n) = n\lambda([X,Y])$. Da aber X und Y beide W_n stabilisieren, gilt

$$\operatorname{tr}([X,Y]|W_n) = \operatorname{tr}\left([X|_{W_n}, Y|_{W_n}]\right) = 0.$$

Damit folgt $\lambda([X,Y]) = 0$ und die Behauptung.

4. Finale: Sei nun $X \in \mathcal{L} \smallsetminus I$ und $v \in V_\lambda$ ein Eigenvektor von X, also etwa $Xv = \mu v$. Ist dann $Z \in \mathcal{L}$, so behaupten wir, dass Z den Eigenraum $\operatorname{Eig}(X,\mu)$ in sich ueberfuehrt. Induktiv finden wir dann einen gemeinsamen Eigenvektor. Da I Codimension 1 hat, ist $Z = aX + Y$ mit $a \in \mathbb{K}$ und $Y \in I$. Daher ist

$$\begin{aligned} XZv &= aX^2v + XYv \\ &= \mu aXv + [X,Y]v + YXv \\ &= \mu aXv + \underbrace{\lambda([X,Y])}_{=0} v + \mu Yv \\ &= \mu Zv. \end{aligned}$$

□

Definition 2.1.2. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Eine **Fahne** in V ist eine Folge von Unterraeumen:

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

mit $\dim V_j = j$ fuer jedes $j = 0, \ldots, n$.

Korollar 2.1.3. (a) *Sei $\mathcal{L} \subset \mathfrak{gl}(V)$ aufloesbar mit* $\dim V < \infty$*, dann stabilisiert $\mathcal{L}$ eine Fahne in V.*

(b) *Sei $\mathcal{L}$ eine endlich-dimensionale, aufloesbare Lie-Algebra ueber $\mathbb{K}$, dann existiert eine Kette von Idealen von $\mathcal{L}$:*

$$0 = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}_n = \mathfrak{g},$$

so dass $\dim \mathcal{L}_j = j$.

(c) *Ist $\mathcal{L}$ eine endlich-dimensionale, aufloesbare Lie-Algebra und ist $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, dann ist* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ *nilpotent. Insbesondere ist* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *nilpotent.*

Beweis. (a) Folgt aus dem Satz mit einer Induktion nach $\dim V$.

(b) Wende (a) auf die adjungierte Darstellung an.

(c) Finde eine Fahne von Idealen wie in (b). Bezueglich einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ so dass $\mathcal{L}_j = \mathrm{Spann}(v_1, \ldots, v_j)$, liegen die Matrizen von $\mathrm{ad}(\mathcal{L})$ in $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$, der Lie-Algebra aller oberen Dreiecksmatrizen. Daher liegt $[\mathrm{ad}(\mathcal{L}), \mathrm{ad}(\mathcal{L})] = \mathrm{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ in $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$, ist also nilpotent. □

2.2 Jordan-Zerlegung

Definition 2.2.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein $X \in \mathfrak{gl}(V)$ heisst **halbeinfach**, falls es diagonalisierbar ist.

Satz 2.2.2. *Sei $\mathbb{K}$ ein algberaisch abgeschlossener Koerper und V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $X \in \mathfrak{gl}(V)$*

(a) *Es existieren eindeutig bestimmte $X_h, X_n \in \mathfrak{gl}(V)$ so dass $X = X_h + X_n$, die Elemente X_s und X_n vertauschen miteinander, X_h ist halbeinfach und X_n ist nilpotent.*

(b) *Es existieren Polynome p, q mit $p(0) = q(0) = 0$ so dass $X_h = p(X)$, $X_n = q(X)$. Insbesondere vertauschen X_h und X_n mit allen Endomorphismen mit denen X kommutiert.*

(c) *Sind $A \subset B \subset V$ Unterraeume mit $X(B) \subset A$, dann folgt $X_h(B) \subset A$ und $X_n(B) \subset A$.*

Beweis. (a) Folgt aus dem Jordan-Normalform-Satz.

(b) Sei das charakteristische Polynom von X gleich $\prod_{j=1}^{k}(x-\lambda_j)^{m_j}$ mit verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Dann ist $V = \bigoplus_{j=1}^{k} V_j$ so dass $X - \lambda_j$ nilpotent auf V_j operiert. Nach dem Chinesischen Restsatz, angewendet auf den Ring $K[x]$ gibt es ein Polynom $p(x)$ mit

$$\begin{aligned} p(x) &\equiv \lambda_j && \mod (x-\lambda_j)^{m_j} \\ p(x) &\equiv 0 && \mod x. \end{aligned}$$

Sei $q(x) = x - p(x)$, dann folgt $p(0) = 0 = q(0)$. Setze $X_s = p(X)$ und $X_n = q(X)$. Dann operiert X_s auf V_j durch den Skalar λ_j und $X_n = X - X_s$ ist nilpotent. Ferner vertauschen X_s und X_n miteinander. Teil (c) folgt aus (b). □

Lemma 2.2.3. *Sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen und sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien $A \subset B$ zwei Unterraeume von $\mathfrak{gl}(V)$ und sei*

$$M = \Big\{X \in \mathfrak{gl}(V) : [X, B] \subset A\Big\}.$$

Sei $X \in M$ mit der Eigenschaft, dass $\operatorname{tr}(XY) = 0$ fuer alle $Y \in M$. Dann ist X nilpotent.

Beweis. Sei $X = H + N$ die Jordan-Zerlegung von X. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V bezueglich der H die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ hat. Sei $E \subset \mathbb{K}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aufgespannt durch die Eigenwerte $a_1, \dots, a_n$. Wir muessen zeigen, dass $E = 0$ ist. Da $\dim_{\mathbb{Q}}(E) < \infty$, reicht es zu zeigen, dass der Dualraum E^* gleich Null ist. Sei also $f : E \to \mathbb{Q}$ ein lineares Funktional. Sei $Y \in \mathfrak{gl}(V)$ gegeben in unserer Basis durch die Matrix $\operatorname{diag}(f(a_1), \dots, f(a_n))$. Ist $E_{i,j}$ die entsprechende Basis von $\mathfrak{gl}(V)$, dann folgt $\operatorname{ad} H(E_{i,j}) = (a_i - a_j)E_{i,j}$ und $\operatorname{ad} Y(E_{i,j}) = (f(a_i) - f(a_j))E_{i,j}$. Sei $r(x) \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom ohne konstanten Term mit $r(a_i - a_j) = f(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$ fuer alle i, j. Die Existenz eines solchen Polynoms ist klar nach dem Chinesischen Restsatz. Es folgt $r(\operatorname{ad} H) = \operatorname{ad} Y$. Nun ist $H = p(X)$ fuer ein Polynom p ohne konstnaten Term, daher ist $\operatorname{ad} Y = r(\operatorname{ad} H) = r(\operatorname{ad} p(X)) = r(p(\operatorname{ad} X))$. Nach voraussetzung wirft X dem Raum B nach A, also tut Y dasselbe, also $Y \in M$. Es folgt $0 = \operatorname{tr}(XY) = \sum_j a_j f(a_j)$. Dies ist eine $\mathbb{Q}$-Linearkombination von Elementen $a_j \in E$. Wendet man f an, folgt $\sum_j f(a_j)^2 = 0$. Da $f(a_j) \in \mathbb{Q}$, folgt $f(a_j) = 0$. □

Proposition 2.2.4 (Cartans Kriterium)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $\mathcal{L} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine Unter-Lie-Algebra. Es gelte* $\mathrm{tr}(XY) = 0$ *falls $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $Y \in \mathcal{L}$. Dann ist $\mathcal{L}$ aufloesbar.*

Beweis. Wir zeigen, dass $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist. Nach dem Satz von Engel reicht es zu zeigen, dass jedes $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist. Sei $A = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $B = \mathcal{L}$ und sei M wir im Lemma. Dann ist $\mathcal{L} \subset M$. Sei nun $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Wir zeigen, dass $\mathrm{tr}(XY) = 0$ fuer alle $Y \in M$ gilt. Nach dem Lemma folgt dann, dass X nilpotent ist. Sei also etwa $X = [Z, W]$ mit $Z, W \in \mathcal{L}$ und sei $Y \in M$, also $[Y, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dann folgt

$$\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}([Z, W]Y) = \mathrm{tr}(Z \underbrace{[W, Y]}_{\in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]})$$

Dies ist Null nach unserer Annahme. Die Behauptung folgt. □

2.3 Die Killing Form

Definition 2.3.1. Sei $\mathcal{L}$ eine Lie-Algebra. Die **Killing-Form** ist die Bilinearform

$$\begin{aligned} b : \mathcal{L} \times \mathcal{L} &\to \mathbb{K}, \\ (X, Y) &\mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)). \end{aligned}$$

Lemma 2.3.2. *Die Killing-Form ist symmetrisch. Sie ist* **assoziativ** *in dem Sinne, dass*

$$b([X, Y], Z) = b(X, [Y, Z]).$$

Ferner ist sie **invariant** *in dem Sinne, dass fuer jeden Lie-Algebren-Automorphismus $g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ gilt*

$$b(gX, gY) = b(X, Y).$$

Beweis. Symmetrie ist klar, da $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ fuer $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$.

Sind $A, B, C \in \mathfrak{gl}(V)$, so gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}([A, B]C) &= \mathrm{tr}(ABC - BAC) \\ &= \mathrm{tr}(ABC - ACB) = \mathrm{tr}(A[B, C]). \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} b([X,Y],Z) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}[X,Y]\,\mathrm{ad}\,Z) \\ &= \mathrm{tr}([\mathrm{ad}\,X,\mathrm{ad}\,Y],\mathrm{ad}\,Z) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X,[\mathrm{ad}\,Y,\mathrm{ad}\,Z]) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X,\mathrm{ad}[Y,Z]) = b(X,[Y,Z]). \end{aligned}$$

Ist nun g ein Lie-Automorphismus, also $g[X,Y] = [gX,gY]$, so folgt

$$\mathrm{ad}(gX)Z = [gX,Z] = g[X,g^{-1}Z] = g\,\mathrm{ad}(X)g^{-1}Z.$$

Also

$$\begin{aligned} b(gX,gY) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(gX)\,\mathrm{ad}(gY)) \\ &= \mathrm{tr}(g\,\mathrm{ad}\,Xg^{-1}g\,\mathrm{ad}\,Yg^{-1}) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y) = b(X,Y). \end{aligned}$$ □

Beispiel 2.3.3. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Dann ist

$$b(X,Y) = 2n\,\mathrm{tr}(XY).$$

Beweis. Uebungsaufgabe. □

Erinnerung: $\mathcal{L}$ heisst halbeinfach, wenn $\mathcal{L}$ kein aufloesbares Ideal hat, dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{L}$ kein abelsches Ideal hat.

Satz 2.3.4. *Eine Lie-Algebra $\mathcal{L}$ ueber einem Koerper $\mathbb{K}$ ist genau dann halbeinfach, wenn die Killing-Form nicht ausgeartet ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{L}$ halbeinfach und sei S der Nullraum der Killing-Form b, also

$$S = \left\{X \in \mathfrak{g} : b(X,\mathcal{L}) = 0\right\}.$$

Es folgt $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)) = 0$ fuer alle $X \in S$, $Y \in \mathcal{L}$. Nach Cartans Kriterium ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(S)$ aufloesbar. Wegen $b([A,B],C) = b(A,[B,C]$ ist S ein Ideal und daher ist $S \subset \mathrm{Rad}(\mathcal{L}) = 0$ und damit ist b nicht ausgeartet.

Sei umgekehrt $S = 0$. Um zu zeigen, dass $\mathcal{L}$ halbeinfach ist, reicht es, zu zeigen, dass jedes abelsche Ideal I von $\mathcal{L}$ in S enthalten ist. Sei also I ein abelsches Ideal von $\mathcal{L}$ und

seien $X \in I$, $Y \in \mathcal{L}$. Dann bildet $\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)$ ab: $\mathcal{L} \to \mathcal{L} \to [\mathfrak{g}, I] \subset I$ und $(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))^2$ bildet $\mathcal{L}$ nach $[I, I] = 0$ ab. Daher ist $\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)$ nilpotent, also
$0 = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(Y)\,\mathrm{ad}(Y)) = b(X, Y)$. Da Y beliebig ist, folgt $X \in S$. □

Satz 2.3.5. *Eine endlich-dimensionale Lie-Algebra $\mathcal{L}$ ist genau dann halbeinfach, wenn sie eine direkte Summe von einfachen Idealen ist.*

Es gilt dann $\mathfrak{g} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k$ mit einfachen Idealen $\mathcal{L}_j$. Jedes Ideal von $\mathcal{L}$ stimmt mit einer Summe der $\mathcal{L}_j$ ueberein.

Beweis. "$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{L}$ direkte Summe von einfachen Idealen. Da jede einfache Lie-Algebra insbesondere halbeinfach ist und die direkte Summe zweier halbeinfacher ideale wieder halbeinfach ist, folgt mit eienr Induktion, dass $\mathcal{L}$ halbeinfach ist.

"$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{L}$ halbeinfach und sei I ein Ideal. Dann ist $I^\perp := \{Y \in \mathfrak{g} : b(Y, I) = 0\}$ ebenfalls ein Ideal, denn ist $Y \in I^\perp$ und $Z \in \mathcal{L}$, dann gilt fuer jedes $X \in I$, dass

$$b(X, [Z, Y]) = b([X, Z], Y) = 0.$$

Mit Cartans Kriterium, angewandt auf die Lie-Algebra I, zeigt, dass $I \cap I^\perp$ aufloesbar ist, und damit folgt $I' cap I^\perp = 0$. Da b nicht entartet ist, ist $\dim \mathfrak{g} = \dim I + \dim I^\perp$ und daher folgt $\mathfrak{g} = I \oplus I^\perp$. Wir wiederholen dies mit I und $I^\perp$ bis wir bei einer direkten Summe einfacher Ideale ankommen.

Nun zum Zusatz: sei $\mathfrak{g} = \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k$ eine direkte Summe einfacher Ideale und sei $I \subset \mathcal{L}$ ein Ideal. Dann ist $[I, \mathfrak{g}]$ ein Ideal von I. Es kann nicht Null sein, da dann I abelsch waere. Also ist $[I, \mathfrak{g}] = I$. Andererseits ist

$$[I, \mathfrak{g}] = [I, \mathcal{L}_1] \oplus \cdots \oplus [I, \mathcal{L}_k].$$

□

Korollar 2.3.6. *Ist $\mathcal{L}$ halbeinfach, dann gilt $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und alle Ideale und alle Bilder unter Homomorphismen von $\mathcal{L}$ sind halbeinfach.*

Innere Derivationen

Definition 2.3.7. Eine **Derivation** einer Lie-Algebra $\mathcal{L}$ ist eine lineare Abbildung $D : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ mit

$$D([X,Y]) = [D(X),Y] + [X,D(Y)].$$

Lemma 2.3.8. (a) *Sind $D,E : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ Derivationen, dann ist der Kommutator $[D,E] := DE - ED$ ebenfalls eine Derivation, also ist der Raum* $\mathrm{Der}(\mathcal{L})$ *aller Derivationen von $\mathcal{L}$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(\mathcal{L})$.*

(b) *Ist $X \in \mathcal{L}$, dann ist* $\mathrm{ad}(X)\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ *eine Derivation. Also ist* ad *ein Lie-Algebren-Homomorphismus*

$$\mathrm{ad} : \mathcal{L} \to \mathrm{Der}(\mathcal{L}).$$

Das Bild $\mathrm{ad}(\mathcal{L})$ *ist ein Ideal in* $\mathrm{Der}(\mathcal{L})$. *Genauer gilt fuer $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{L})$ und $X \in \mathcal{L}$, dass*

$$\mathrm{ad}(DX) = [D, \mathrm{ad}(X)].$$

Man nennt die Derivationen in $\mathrm{ad}(\mathcal{L})$ auch **innere Derivationen**.

Beweis. (a) Sei $F = [D,E]$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} F([X,Y]) &= DE([X,Y] - ED([X,Y]) \\ &= D([EX,Y] + [X,EY]) - E([DX,Y] + [X,DY]) \\ &= [DEX,Y] + [EX,DY] + [DX,EY] + [X,DEY] \\ &\quad - [EDX,Y] - [DX,EY] - [EX,DY] - [X,EDY] \\ &= [FX,Y] + [X,FY] \end{aligned}$$

(b) Mit der Jacobi-Identitaet folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(X)[Y,Z] &= [X,[Y,Z]] \\ &= -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] \\ &= [Y, \mathrm{ad}(X)Z] + [\mathrm{ad}(X)Y, Z]. \end{aligned}$$

Um zu sehen, dass $\mathrm{ad}(\mathcal{L})$ ein Ideal ist, sei $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{L})$ und $X, Y \in \mathcal{L}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}[D, \mathrm{ad}(X)](Y) &= D(\mathrm{ad}(X)Y) - \mathrm{ad}(X)DY \\ &= D([X, Y]) - [X, DY] \\ &= [DX, Y] = \mathrm{ad}(DX)Y.\end{aligned}$$ □

Lemma 2.3.9. *Ist $I \subset \mathcal{L}$ ein ideal und ist b_I die Killing-Form von I, so gilt*

$$b_I = b_{\mathfrak{g}}|_{I \times I}.$$

Beweis. Dies folgt leicht aus der folgenden Tatsache: Ist $T : V \to V$ linear, $\dim V < \infty$, und ist $W \subset V$ ein Teilraum mit $T(V) \subset W$, dann ist $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(T|_W)$. □

Satz 2.3.10. *Ist $\mathcal{L}$ halbeinfach, dann ist jede Derivation eine innere Derivation, also*

$$\mathrm{ad}(\mathcal{L}) = \mathrm{Der}(\mathcal{L}).$$

Beweis. Da $\mathcal{L}$ einfach ist, ist das Zentrum trivial, also ist $\mathrm{ad} : \mathcal{L} \to \mathrm{ad}(\mathcal{L})$ bijektiv. Daher ist $M = \mathrm{ad}(\mathcal{L})$ halbeinfach. Ist $\mathcal{D} = \mathrm{Der}(\mathcal{L})$, dann ist M ein Ideal in $\mathcal{D}$, also $[\mathcal{D}, M] \subset M$. Nach dem Lemma ist $b_M = b_{\mathcal{D}}|_{M \times M}$. Ist $I = M^{\perp}$ in $\mathcal{D}$, dann folgt, da b_M nicht entartet ist, dass $I \cap M = 0$. Da I und M beides Ideale von $\mathcal{D}$ sind, folgt $[I, M] = 0$. Ist $D \in I$ und $X \in \mathcal{L}$, so folgt nach dem Zusatz von Lemma 2.3.8 und der Injektivitaet von ad, dass $DX = 0$. Das heisst aber $D = 0$, also $I = 0$ und damit $M = \mathcal{D}$ wie behauptet. □

2.4 Darstellungen

Falls nicht ausdruecklich anders gesagt, sind alle Darstellungen in diesem Abschnitt endlich-dimensional.

Definition 2.4.1. Sei $\phi : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung auf dem Vektorraum V. Wir sagen auch, V ist ein **Modul** der Lie-Algebra $\mathcal{L}$ und schreiben dann Xv statt $\phi(X)v$ fuer die Operation. Ein Modul V heisst **irreduzibel**, wenn er keine echten Untermoduln hat, also wenn 0 und V die einzigen Untermoduln sind.

Ein Modul heisst **vollreduzibel**, falls er eine direkte Summe von einfachen ist.

Beispiel 2.4.2. Sei $\dim V < \infty$, dann ist V ein irreduzibler Modul unter $\mathfrak{gl}(V)$.

Satz 2.4.3 (Lemma von Schur). *Sei V ein irreduzibler Modul der Lie-Algebra $\mathcal{L}$. Ist $T : V \to V$ linear mit $TX = XT$ fuer jedes $X \in \mathcal{L}$, dann folgt $T = \lambda\mathrm{Id}$ fuer ein $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von T und sei V_λ der zugehoerige Eigenraum. Fuer $X \in \mathcal{L}$ und $v \in V_\lambda$ gilt dann

$$T(Xv) = X(Tv) = X(\lambda v) = \lambda Xv.$$

Damit ist $XV_\lambda \subset V_\lambda$, also ist V_λ ein Untermodul $\neq 0$ und da V irreduzibel ist, folgt $V - V_\lambda$. □

2.4.1 Das Casimir-Element

Definition 2.4.4. Sei $\mathcal{L}$ halbeinfach und sei $\pi : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V)$ ein treue Darstellung. Die Bilinearform

$$\beta(X, Y) = \mathrm{tr}(\pi(X)\pi(Y))$$

ist dann assoziativ, was man wie im Falle der Killing-Form einsieht. In der Tat gilt $\beta = b$ fuer den Fall $\phi = \mathrm{ad}$. Sei $S \subset \mathcal{L}$ der Nullraum von β. Da β assoziativ ist, ist S ein Ideal. Nach Cartans Kriterium ist S aufloesbar, also $S = 0$, da $\mathcal{L}$ halbeinfach. Daher ist β nicht-entartet.

Die Form β liefert dann eine lineare Bijektion $\delta : \mathcal{L} \to \mathfrak{g}^*$ (Dualraum), $X \mapsto \delta_X$, definiert durch

$$\delta_X(Y) = \beta(X, Y).$$

Andererseits kann $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ mit dem Raum aller Bilinearformen auf $\mathcal{L}$ identifiziert werden, also liefert β ein Element

$$\beta \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \cong \mathcal{L} \otimes \mathfrak{g}.$$

Sei $\Omega = \Omega_\pi \in U(\mathcal{L})$ das Bild dieses Elementes unter der kanonischen Abbildung $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \to U(\mathcal{L})$. Dieses Element wird das **Casimir-Element** zu π genannt. Das Casimir-Element zur adjungierten Darstellung ad wird das Casimir-Element von $\mathcal{L}$ genannt.

Berechnung. Nach Definition kann man das Casimir-Element wie folgt berechnen: Man waehlt eine Basis $X_1, \ldots, X_n$ von $\mathcal{L}$. Dann gibt es genau eine Basis $Y_1, \ldots, Y_n$ so

dass
$$\beta(X_i, Y_j) = \delta_{i,j}$$
gilt. Dann ist
$$\Omega = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_n Y_n.$$

Satz 2.4.5. (a) *Das Casimir-Element $\Omega = \Omega_\pi$ liegt im Zentrum der universell-Einhuellenden, d.h., es gilt*
$$\Omega X = X\Omega$$
fuer jedes $X \in U(\mathcal{L})$.

(b) *Ist $\pi : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung, dann setzt π in eindeutiger Weise zu einem Homomorphismus assoziativer Algebren*
$$\pi : U(\mathcal{L}) \to \mathrm{End}(V)$$
fort. Ist π irreduzibel, so gilt $\pi(\Omega) = \lambda \mathrm{Id}$ fuer ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Ist π eine treue Darstellung, dann ist $\lambda = \dim \mathcal{L}$.

Beweis. (a) In $U(\mathcal{L})$ gilt $[X, YZ] = [X, Y]Z + Y[X, Z]$. Seien (X_j) und (Y_j) Basen von $\mathcal{L}$ wie oben und sei $X \in \mathcal{L}$. Dann gilt $[X, X_i] = \sum_j a_{i,j} X_j$ mit $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. und $[X, Y_i] = \sum_j b_{i,j} Y_j$. Mit der Assoziativitaet von b rechnen wir
$$\begin{aligned} a_{i,k} &= \sum_j a_{i,j} b(Y_k, X_j) \\ &= b(Y_k, [X, X_i]) = b([Y_k, X], X_i) = -b([X, Y_k], X_i) \\ &= -\sum_j b_{k,j} b(Y_j, X_i) = -b_{k,i} \end{aligned}$$

Damit folgt in $U(\mathcal{L})$,

$$\begin{aligned}[X,\Omega] &= \sum_i [X, X_i Y_i] \\ &= \sum_i [X, X_i] Y_i + X_i [X, Y_i] \\ &= \sum_i \left(\sum_j a_{i,j} X_j Y_i + \sum_j b_{i,j} X_i Y_j \right) \\ &= \sum_{i,j} \sum_j a_{i,j} X_j Y_i + \sum_{i,j} \underbrace{b_{j,i}}_{=-a_{i,j}} X_j Y_i = 0.\end{aligned}$$

Damit vertauscht Ω mit jedem $X \in \mathcal{L}$ und daher mit jedem $X \in U(\mathcal{L})$.

(b) Die eindeutige Fortsetzbarkeit folgt aus der universellen Eigenschaft der Einhuellenden. Sei π irreduzibel. Ist $X \in \mathcal{L}$, so folgt

$$\pi(\Omega)\pi(X) = \pi(\Omega X) = \pi(X\Omega) = \pi(X)\pi(\Omega).$$

Nach dem Lemma von Schur ist dann $\pi(\Omega)$ ein Skalar.

Nun zum Fall dass π treu ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} \pi(\Omega) &= \sum_j \operatorname{tr}(\pi(X_j)\pi(Y_j)) \\ &= \sum_j \beta(X_j, Y_j) = \dim \mathcal{L}\end{aligned}$$ □

Volle Reduzibilitaet

Definition 2.4.6. Sei $\mathfrak{sl}(V)$ der Unterraum von $\mathfrak{gl}(V)$ bestehend aus allen Endomorphismen T mit $\operatorname{tr}(T) = 0$.

Lemma 2.4.7. *Sei $\phi : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathcal{L}$. Dann gilt $\phi(\mathcal{L}) \subset \mathfrak{sl}(V)$.*

Insbesondere operiert $\mathcal{L}$ trivial auf jedem eindimensionalen Modul.

Beweis. Es ist $\phi(\mathcal{L}) = \phi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\phi(\mathcal{L}), \phi(\mathcal{L})] \subset [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$. □

Definition 2.4.8. Ist V ein $\mathcal{L}$-Modul, dann wird der Dualraum V^* zu einem $\mathcal{L}$-Modul via

$$Xf(v) := -f(Xv).$$

Sind V, W Moduln ueber $\mathcal{L}$, dann wird $V \otimes W$ ein $\mathcal{L}$-Modul via

$$X(v \otimes w) := Xv \otimes w + v \otimes Xw.$$

Beweis. Nur der zweite ist nicht-trivial:

$$\begin{aligned}(XY - YX)(v \otimes w) &= X(Yv \otimes w + v \otimes Yw) - Y(Xv \otimes w + v \otimes Xw)\\ &= XYv \otimes w + Yv \otimes Xw + Xv \otimes Yw + v \otimes XYw\\ &\quad - YXv \otimes w - Xv \otimes Yw - Yv \otimes Xw - v \otimes YXw\\ &= XYv \otimes w + v \otimes XYw\\ &\quad - YXv \otimes w - v \otimes YXw = [X, Y]v \otimes w + v \otimes [X, Y]w.\end{aligned}$$ □

Satz 2.4.9. *Ist $\mathcal{L}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, dann ist jede Darstellung von $\mathcal{L}$ vollreduzibel.*

Beweis. Sei $\phi : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung.

1. Spezialfall: V hat einen $\mathcal{L}$-Untermodul W von Codimension 1.
Da $\mathcal{L}$ trivial auf V/W operiert, koennen wir diesen Modul mit $\mathbb{K}$ bezeichnen. Wir haben eine exakte Sequenz von $\mathcal{L}$-Modulen

$$0 \to W \to V \to \mathbb{K} \to 0.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Sequenz spaltet.

1.1. Spezialfall: W ist irreduzibel.
Indem wir $\mathcal{L}$ durch $\mathfrak{g}/\ker(\phi)$ ersetzen, koennen wir annehmen, dass ϕ eine treue Darstellung ist. Sei $C = \phi(\Omega)$, wobei $\Omega = \Omega_\phi$ das Casimir-Element ist. Da C mit der $\mathcal{L}$-Operation vertauscht, ist C ein $\mathcal{L}$-Modul-Homomorphismus, also ist $C(W)$ entweder Null oder wieder ein Untermodul der Codimension 1. In jedem Fall ist die Projektion $C(W) \to V/W$ gleich Null, da $\mathcal{L}$ auf V/W trivial operiert und daher $C(V/W) = 0$ ist. Damit folgt $C(W) \subset W$ und $\ker(C)$ ist ein $\mathcal{L}$-Untermodul. Da $\mathcal{L}$ trivial auf V/W operiert, ist insbesondere $C \equiv 0$ auf V/W, also hat C auf V/W die Spur Null. Andererseits operiert C durch einen Skalar auf dem irreduziblen W, dieser Skalar kann nicht Null sein, da seine Spur die Dimension von $\mathcal{L}$ ist. Damit ist $\ker(C)$ ein $\mathcal{L}$-stabiles Komplement von W und die Sequenz spaltet.

1.2. Spezialfall: Codimension von W ist 1, aber W ist nicht irreduzibel.

Sei W' ein echter Untermodul von W. Dies fuehr zu einer exakten Sequenz

$$0 \to W/W' \to V/W' \to \mathbb{K} \to 0.$$

Mit einer Induktion nach der Laenge von W bzw W/W' koennen wir annehmen, dass diese Sequenz spaltet. Es gibt also einen eindimensionalen Untermodul $\tilde{W}/W'$ von V/W', so dass $V/W' = \tilde{W}/W' \oplus W/W'$. Wir erhalten wieder eine exakte Sequenz

$$0 \to W' \to \tilde{W} \to \mathbb{K} \to 0,$$

wobei die Situation dieselbe ist wie am Anfang, nur dass $\dim W' < \dim W$ ist. Nach Induktion erhalten wir einen eindimensionalen Untermodul X von $\tilde{W}$, der Komplementaer zu W' ist, also $\tilde{W} = X \oplus W'$. Wegen $V/W' = W/W' \oplus \tilde{W}/W'$ folgt $V = W \oplus X$, da die Dimensionen stimmen und $X \cap W = 0$.

2. Allgemeiner Fall: Sei W ein Untermodul von V, also

$$0 \to W \to V \to V/W \to 0$$

exakt. Der Raum $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ wird wie in Definition 2.4.8 zu einem $\mathcal{L}$-Modul. Sei $\mathcal{V}$ der Unterraum von $\mathrm{Hom}(V, W)$, bestehend aus allen Abbildungen, deren Einschraenkung auf W eine Multiplikation mit einem Skalar ist. Wir zeigen, dass $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{L}$-Modul ist. Ist etwa $f|_W = a \in \mathbb{K}$, so gilt fuer $X \in \mathcal{L}$ und $w \in W$, dass

$$(Xf)(w) = X(f(w)) - f(Xw) = aXw - aXw = 0,$$

alos $Xf|_W = 0$. Sei $\mathcal{W}$ der Unterraum derjenigen f mit $f|_W = 0$. Wir haben gerade gezeigt, dass auch $\mathcal{W}$ ein $\mathcal{L}$-Untermodul ist und dass $\mathcal{L}\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Ferner ist $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ von Dimension 1, wir haben also eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{W} \to \mathcal{V} \to \mathbb{K} \to 0.$$

Nach dem ersten Teil hat also $\mathcal{V}$ einen eindimensionalen Untermodul komplementaer zu $\mathcal{W}$. Sei $f : V \to W$ ein Erzeuger dieses Unterraums. Nach Multiplikation mit einem Skalar koennen wir $f|_W = \mathrm{Id}_W$ annehmen. Da $\mathcal{L}f = 0$, folgt $0 = (Xf)(v) = X(f(v)) - f(Xv)$, oder $X \circ f = f \circ X$, was bedeutet, dass f ein $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist. Daher ist $\ker(f)$ ein $\mathcal{L}$-Untermodul. Da f den Modul V in den Modul W wirft und auf diesem die Identitaet ist, folgt

$$V = W \oplus \ker(f)$$

wie verlangt. □

Satz 2.4.10. *Sei $\mathcal{L} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Lie-Algebra und ist $X \in \mathcal{L}$ mit Jordan-Zerlegung $X = X_h + X_n$, dann sind auch X_h und X_n in $\mathcal{L}$.*

Beweis. Da X_h ein Polynom in X ist und $\mathrm{ad}(X)\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, wobei $\mathrm{ad} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}$, so folgt $\mathrm{ad}(X_h)\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ und $\mathrm{ad}(X_n)\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Das bedeutet X_h, X_s liegen in

$$N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathcal{L}) := \Big\{ Y \in \mathfrak{gl}(V) : [Y, \mathfrak{g}] \subset \mathcal{L} \Big\},$$

welche letztere eine Lie-Algebra mit $\mathcal{L}$ als Ideal ist.

Ist W ein $\mathcal{L}$-Untermodul, so definieren wir

$$\mathcal{L}_W = \{ Y \in \mathfrak{gl}(V) : YW \subset W,\ \mathrm{tr}(Y|_W) = 0 \}.$$

Dann ist etwa $\mathcal{L}_V = \mathfrak{sl}(V)$. Da $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, liegt $\mathcal{L}$ in all diesen $\mathcal{L}_W$. Sei

$$\mathcal{L}' = N \cap \bigcap_W \mathcal{L}_W.$$

Dann ist $\mathcal{L}'$ eine Lie-Algebra mit $\mathcal{L}$ als Ideal. Ferner gilt $X \in \mathfrak{g},\ \Rightarrow\ X_h, X_n \in \mathcal{L}'$.

Wir zeigen $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$. Da $\mathcal{L}'$ ein $\mathcal{L}$-Modul ist, ist $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \oplus M$ fuer einen $\mathcal{L}$-Untermodul M. Da aber $\mathcal{L}$ ein Ideal in $\mathcal{L}'$ ist, also $[\mathfrak{g}, \mathcal{L}'] \subset \mathcal{L}$, ist die Operation von $\mathcal{L}$ auf M trivial. Sei W ein irreduzibler $\mathcal{L}$-Untermodul von V und sei $Y \in M$. Da $[Y, \mathfrak{g}] = 0$, ist nach dem Lemma von Schur die Operation von Y auf W ein Skalar. Andererseits ist $\mathrm{tr}(Y|_W) = 0$, da $Y \in \mathcal{L}_W$, also operiert Y als Null auf W. Da V eine direkte Summe solcher W ist, folgt $Y = 0$, also $M = 0$. □

Definition 2.4.11. Sei $\mathcal{L}$ eine Lie-Algebra. Wir nennen ein Element $X \in \mathcal{L}$ im abstrakten Sinne **halbeinfach**, falls $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}(\mathcal{L})$ halbeinfach, also diagonalisierbar ist. Ebenso heisst X abstrakt **nilpotent**, falls $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}(\mathcal{L})$ nilpotent ist. Ist $\mathcal{L}$ halbeinfach, dann enthaelt die Algebra $\mathrm{ad}(\mathcal{L}) \subset \mathrm{End}(\mathcal{L})$ die Jordan-Zerlegung von $X \in \mathcal{L}$. Da die adjungierte Darstellung injektiv ist, gibt es genau eine Zerlegung $X = X_h + X_n$ so dass $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X_h) + \mathrm{ad}(X_n)$ die Jordan-Zerlegung in $\mathrm{End}(\mathcal{L})$ ist. Wir nennen diese die **abstrakte Jordan-Zerlegung**.

Satz 2.4.12. (a) *Sei $\mathcal{L} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra. Dann ist X genau dann abstrakt halbeinfach/nilpotent, wenn es als Element von* $\mathrm{End}(V)$ *halbeinfach/nilpotent ist. Die Jordan-Zerlegungen in $\mathcal{L}$ und* $\mathrm{End}(V)$ *stimmen ueberein.*

(b) *Sei $\mathcal{L}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und $X \in \mathcal{L}$. Das Element X ist genau dann halbeinfach, wenn fuer jede Darstellung π das Element $\pi(X) \in \mathrm{End}(V_\pi)$ halbeinfach ist. Dasselbe gilt fuer nilpotent.*

Beweis. (a) Sei $X \in \mathcal{L}$ halbeinfach als Element von $\mathrm{End}(V)$. Dann kann man sich X als Diagonalmatrix vorstellen. Dann ist $\mathrm{ad}(X)$ ebenfalls halbeinfach. Ist X nilpotent in $\mathrm{End}(V)$, so kann man sich X als obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonale vorstellen, damit ist $\mathrm{ad}(X)$ ebenfalls nilpotent. Ist also $X = X_h + X_n$ die Jordan-Zerlegung in $\mathrm{End}(V)$, dann folgt aus der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung, dass $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X_h) + \mathrm{ad}(X_n)$ die Jordan-Zerlegung von $\mathrm{ad}(X)$ ist. Damit stimmen die Zerlegungen ueberein, woraus auch die Rueckrichtung folgt.

(b) X ist genau dann abstrakt nilpotent, wenn die Abbildung $Y \mapsto [X, Y]$ nilpotent ist. Diese Eigenschaft bleibt unter Darstellungen erhalten und damit ist $\pi(X)$ nilpotent fuer jede Darstellung π. Ist umgekehrt $\pi(X)$ nilpotent fuer jedes π, so insbesondere fuer $\pi = \mathrm{ad}$, womit X also nilpotent waere.

Ist X halbeinfach, dann ist $\mathcal{L}$ die direkte Summe von $[X, .]$ Eigenraeumen. Ist π eine Darstellung, dann ist $\pi(\mathcal{L})$ eine direkte Summe von $[\pi(X), .]$-Eigenraeumen, also ist $\pi(X)$ abstrakt halbeinfach, also halbeinfach. Die Umkehrung ist wieder klar. □

2.5 Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2$

Die $\mathfrak{sl}_2$ hat die Basis

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Lemma 2.5.1. *Sei V ein $\mathfrak{sl}_2$-Modul und fuer $\lambda \in \mathbb{K}$ sei V_λ der λ-Eigenraum von H. Dann gilt*

$$XV_\lambda \subset V_{\lambda+2}, \quad YV_\lambda \subset V_{\lambda-2}.$$

H operiert diagonalisierbar auf V.

Beweis. Ist $v \in V_\lambda$, dann gilt

$$\begin{aligned} HXv &= [H,X]v + XHv \\ &= 2Xv + \lambda Xv = (\lambda+2)Xv. \end{aligned}$$

Die zweite Aussage geht analog.

Nun zur Diagonalisierbarkeit von H. Zunaechst ist V eine direkte Summe irreduzibler Moduln, daher koennen wir annehmen, dass V irreduzibel ist. Da $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $V_\lambda \neq 0$. Dann folgt, dass $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_{\lambda+2k}$ ein $\mathfrak{sl}_2$-stabiler Unterraum von V ist, also gleich V. Damit ist H diagonalisierbar. □

Definition 2.5.2. Sei V irreduzibel. Da $V = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_{\lambda+2k}$ fuer ein λ und da V endlich-dimensional ist, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $V_\lambda \neq 0$ aber $V_{\lambda-2} = 0$. Fuer ein solches λ nennen wir jedes $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ einen **minimalen Vektor**.

Lemma 2.5.3. *Sei V irreduzibel und $v_0 \in V$ ein minimaler Vektor. Setze $v_{-1} = 0$ und $v_j = \frac{1}{j!}X^j v_0$ fuer $j \geq 0$. Es gilt dann fuer jedes $j \in \mathbb{N}_0$,*

(a) $Hv_j = (\lambda + 2j)v_j$,

(b) $Xv_j = (j+1)v_{j+1}$,

(c) $Yv_j = (1-\lambda-j)v_{j-1}$

Beweis. (a) und (b) sind klar. Wir beweisen (c) durch Induktion. Der Fall $j = 0$ ist korrekt, da $v_{-1} = 0$. Es ist dann induktiv

$$\begin{aligned} iYv_i = YXv_{i-1} &= [Y,X]v_{i-1} + XYv_{i-1} \\ &= -(\lambda + 2i - 2)v_{i-1} + X(2-\lambda-i)v_{i-2} \\ &= -(\lambda + 2i - 2)v_{i-1} + (2-\lambda-i)(i-1)v_{i-1} \\ &= (-2i + 2i - \lambda i - i^2 + i)v_{i-1} \\ &= i(1-\lambda-i)v_{i-1}. \end{aligned}$$ □

Sei nun $m \geq 0$ minimal mit $v_m \neq 0$, $v_{m+1} = 0$. Dann ist Spann$(v_0, \dots, v_m)$ ein Untermodul, also wegen Irreduzibilitaet gleich ganz V. Also ist $v_0, \dots, v_m$ eine Basis von V.

Fuer $j = m+1$ liefert Formel (c), dass $(-\lambda - m) = 0$, also $\lambda = -m$. Damit folgt

$$Hv_m = mv_m.$$

Die H-Eigenwerte werden auch **Gewichte** der Darstellung genannt, diese sind also $-m, mm+2, \dots, m$. Damit ist $-m$ das niedrigste und m das **Hoechstgewicht**.

Satz 2.5.4. *Fuer jede Dimension $d = 1, 2, \dots$ gibt es bis auf Isomorphie genau einen irreduziblen Modul V_d. Dieser hat das Hoechstgewicht $d-1$.*

Beweis. Klar. □

Kapitel 3

Wurzeln

3.1 Torale Algebren

Definition 3.1.1. Sei $\mathcal{L}$ halbeinfach. Wuerde $\mathcal{L}$ nur aus nilpotenten Elementen bestehen, waere $\mathcal{L}$ selbst nilpotent. Es gibt daher halbeinfache Elemente in $\mathcal{L}$. Eine Unteralgebra $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ heisst **toral** oder ein **Torus**, wenn sie nur aus halbeinfachen Elementen besteht.

Lemma 3.1.2. *Eine torale Unteralgebra ist abelsch.*

Beweis. Sei $\mathcal{T}$ eine torale Unteralgebra. Angenommen, es gibt $X, Y \in \mathcal{T}$ mit $[X, Y] \neq 0$. Da $\mathrm{ad}_T(X)$ diagonalisierbar ist, koennen wir $[X, Y] = \lambda Y$ annehmen fuer ein $\lambda \in \mathbb{K}^\times$. Da $\mathrm{ad}_T(Y)$ auch diagonalisierbar ist, kann man $\mathfrak{t} = \mathcal{T}_0 \oplus \bigoplus_{\mu \neq 0} \mathcal{T}_\mu$ schreiben, wobei $\mathcal{T}_\mu$ der μ-Eigenraum von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(Y)$. Wegen $[Y, Y] = 0$ ist $Y \in \mathcal{T}_0$, also ist $[X, Y] \in \bigoplus_{\mu \neq 0} \mathcal{T}_\mu$, was aber nur sein kann, wenn $\lambda = 0$ ist. $\square$

Definition 3.1.3. Sei nun $\mathcal{T}$ eine maximale torale Unteralgebra, manchmal auch **Cartan-Algebra** genannt. Fuer eine lineare Abbildung $\alpha : \mathcal{T} \to \mathbb{K}$ sei

$$\mathcal{L}_\alpha = \left\{ X \in \mathfrak{g} : [Z, X] = \alpha(Z) X \quad \forall_{Z \in \mathfrak{t}} \right\}.$$

Das Funktional $\alpha \neq 0$ heisst **Wurzel** von $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$, falls $\mathcal{L}_\alpha \neq 0$. Sei Φ die Menge aller Wurzeln. Da die kommutierenden Endomorphismen $\mathrm{ad}(X)$ mit $X \in \mathcal{T}$ simultan diagonalisiert werden koennen, gilt

$$\mathfrak{g} = \mathcal{L}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathcal{L}_\alpha.$$

wobei $\mathcal{L}_0 = \left\{ X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{t}] = 0 \right\}$.

Proposition 3.1.4. (a) *Sind* $\alpha, \beta \in \mathfrak{t}^*$, *dann gilt* $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] \subset \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$.

(b) *Ist* $X \in \mathcal{L}_\alpha$ *mit* $\alpha \neq 0$, *dann ist* X *nilpotent.*

(c) *Ist* $\alpha + \beta \neq 0$, *dann gilt* $b(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta) = 0$, *wobei* b *die Killing-Form ist.*

Beweis. (a) Seien $X \in \mathcal{T}$, $Y \in \mathcal{L}_\alpha$ und $Z \in \mathcal{L}_\beta$, dann gilt

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]] &= -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] \\ &= \beta(X)[Y,Z] + \alpha(X)[Y,Z].\end{aligned}$$

(b) Ist $Y \in \mathfrak{g} = \mathcal{L}_0 \oplus \bigoplus_\beta \mathcal{L}_\beta$, dann ist $[X,Y] \in \mathcal{L}_\alpha \oplus \bigoplus_{\beta\in\Phi} \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$ und daher

$$\mathrm{ad}(X)^n Y \in \mathcal{L}_{n\alpha} \oplus \bigoplus_{\beta\in\Phi} \mathcal{L}_{\beta+n\alpha}.$$

Da $\Phi \subset L^*$ endlich ist, gibt es ein n mit $\beta + n\alpha \notin \Phi \cup \{0\}$ fuer alle $\beta \in \Phi \cup \{0\}$ und damit $\mathrm{ad}(X)^n = 0$.

(c) Ist $X \in \mathcal{L}_\alpha$ und $Y \in \mathcal{L}_\beta$ dann ist $\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)\mathcal{L}_\gamma \subset \mathcal{L}_{\gamma+\alpha+\beta}$. Waehle nun eine Basis von $\mathcal{L}$, deren Glieder alle in einem der $\mathcal{L}_\alpha$ liegen, dann folgt, dass bezueglich dieser Basis $\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)$ Spur Null hat. □

Korollar 3.1.5. *Die Restriktion der Killing-Form auf* $\mathcal{L}_0$ *ist nicht-entartet.*

Beweis. Sei $X \in \mathcal{L}_0$. Dann existiert ein $Z \in \mathcal{L}$ mit $b(X,Z) \neq 0$. Es ist $Z = Z_0 + \sum_{\alpha\in\phi} Z_\alpha$ mit $Z_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$. Nach der Proposition ist $b(X, Z_\alpha) = 0$ falls $\alpha \neq 0$ und damit $b(X, Z_0) \neq 0$ mit $Z_0 \in \mathcal{L}_0$. □

Lemma 3.1.6. *Sind* A, B *kommutierende Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums und ist* A *nilpotent, dann ist* AB *nilpotent. Insbesondere ist* $\mathrm{tr}(AB) = 0$.

Beweis. Klar. □

Proposition 3.1.7. *Ist* $\mathcal{T}$ *eine maximale torale Unteralgebra der halbeinfachen Lie-Algebra* $\mathcal{L}$, *dann ist* $\mathcal{L}_0 = \mathcal{T}$. *Insbesondere ist* b *auf* $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ *nicht-entartet und wir haben die Wurzelraumzerlegung*

$$\mathfrak{g} = \mathcal{T} \oplus_{\alpha\in\phi} \mathcal{L}_\alpha.$$

Beweis. Sei $X \in \mathcal{L}_0$, also $[X, \mathfrak{t}] = 0$. Ist $X = X_h + X_n$ die Jordan-Zerlegung, dann folgt wegen $[X_h, X_n] = 0$ aus der Jacobi-Identitaet, dass $X_h, X_n \in \mathcal{L}_0$. Dann ist $\mathfrak{t} + \mathbb{K}X_h$ ebenfalls eine torale Unteralgebra und da $\mathcal{T}$ maximal ist, folgt $X_h \in \mathcal{T}$. Wir muessen also zeigen, dass $\mathcal{L}_0$ keine nilpotenten Elemente enthaelt.

Wir zeigen, dass b auf $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ nicht-entartet ist. Sei dazu $X \in \mathcal{T}$ mit $b(X, \mathfrak{t}) = 0$. Ist $N \in \mathcal{L}_0$ nilpotent, dann folgt wegen $[N, X] = 0$ und X halbeinfach, dass $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(N)) = 0$, also $b(X, N) = 0$. Damit ist $b(X, \mathcal{L}_0) = 0$ und daher $X = 0$.

Jedes Element von $\mathcal{L}_0$ ist $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}_0}$-nilpotent, damit ist $\mathcal{L}_0$ selbst nilpotent.

Wir folgern nun, dass $\mathcal{T} \cap [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0] = 0$: Da b assoziativ ist und $[\mathcal{T}\mathcal{L}_0] = 0$, folgt $b(\mathfrak{t}, [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0]) = 0$. Da aber b auf $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ nicht-entartet ist, folgt $\mathcal{T} \cap [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0] = 0$.

$\mathcal{L}_0$ ist abelsch: Angenommen $[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0] \neq 0$, da $\mathcal{L}_0$ nilpotent ist, folgt dann $Z(\mathcal{L}_0) \cap [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0] \neq 0$ nach Lemma 1.4.14. Sei $Z \neq 0$ in diesem Schnitt. Da $Z \notin \mathcal{T}$, kann Z nicht halbeinfach sein. Daher ist der nilpotente Teil $Z_n \neq 0$ in $\mathcal{L}_0$ und da Z_n ein Polynom in Z ist, ist $Z_n \in Z(\mathcal{L}_0)$. Nach dem Lemma folgt $b(Z_n, \mathcal{L}_0) = 0$ und daher $Z_n = 0$, Widerspruch! Also ist $\mathcal{L}_0$ abelsch.

Nun folgt, dass $\mathcal{L}_0 = \mathcal{T}$ ist, denn sonst enthielte $\mathcal{L}_0$ ein nilpotentes Element N, dann waere nach dem Lemma $b(N, \mathcal{L}_0) = 0$, Widerspruch! □

3.2 Wurzeln

Proposition 3.2.1. *Sei $\mathcal{L}$ halbeinfach und $\mathcal{T}$ ein maximaler Torus in $\mathcal{L}$. Sei $\Phi \subset \mathfrak{t}^*$ die Menge der Wurzeln.*

(a) *Φ spannt $\mathfrak{t}^*$ auf.*

(b) *Ist $\alpha \in \Phi$, dann ist auch $-\alpha \in \Phi$.*

(c) *Ist $X \in \mathcal{L}_\alpha$ und $Y \in \mathcal{L}_{-\alpha}$, dann ist $[X, Y] = b(X, Y)T_\alpha$, wobei T_α definiert ist durch*

$$\alpha(X) = b(X, T_\alpha).$$

(d) *Ist $\alpha \in \phi$, dann ist $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{-\alpha}]$ eindimensional mit Basis T_α.*

(e) *$\alpha(T_\alpha) = b(T_\alpha, T_\alpha) \neq 0$ fuer jedes $\alpha \in \phi$.*

(f) *Ist $\alpha \in \phi$ und $0 \neq X_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$, dann existiert genau ein $Y_\alpha \in \mathcal{L}_{-\alpha}$ und ein $H_\alpha \in \mathcal{T}$, so dass $X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha$ eine Unteralgebra aufspannen, die isomorph ist zu $\mathfrak{sl}_2$, genauer gilt*

$$[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha, \quad [H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha, \quad [Y_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha.$$

Man nennt ein solches Tripel (H, X, Y) ein $\mathfrak{sl}_2$**-Tripel**. *Man nennt auch Y_α den* $\mathfrak{sl}_2$**-Partner** *von X_α.*

(g) *Das Element H_α ist durch α eindeutig festgelegt, es erfuellt*

$$H_\alpha = \frac{2T_\alpha}{b(T_\alpha, T_\alpha)}, \quad H_{-\alpha} = -H_\alpha.$$

Beweis. (a) Sei $X \in \mathcal{T}$ mit $\alpha(X) = 0$ fuer jedes $\alpha \in \Phi$. Dann folgt $[X, \mathcal{L}_\alpha] = 0$ fuer jedes α und damit $[X, \mathfrak{g}] = 0$, also $X \in Z(\mathcal{L}) = 0$. Damit ist $X = 0$ und hieraus folgt (a).

(b) Sei $0 \neq X \in \mathcal{L}_\alpha$. Da b nicht entartet ist, gibt es ein $Y \in \mathcal{L}$ mit $b(X, Y) \neq 0$. Sei $Y = \sum_\beta Y_\alpha$ die Wurzelraumzerlegung, also $Y_\beta \in \mathcal{L}_\beta$. Nach Proposition 3.1.4 folgt dann $b(X, Y_\beta) = 0$ fuer alle $\beta \neq -\alpha$. Also ist $Y_{-\alpha} \neq 0$ und daher $-\alpha \in \Phi$.

(c) Seien $X \in \mathcal{L}_\alpha$ und $Y \in \mathcal{L}_{-\alpha}$ beide $\neq 0$. Ist $H \in \mathcal{T}$, dann gilt

$$b(H, [X, Y]) = b([H, X], Y) = \alpha(H) b(X, Y) = b(H, b(X, Y) T_\alpha),$$

oder $b(H, [X, Y] - b(X, Y) T_\alpha) = 0$. Da dies fuer jedes $H \in \mathcal{T}$ liegt, folgt die Behauptung.

(d) folgt sofort aus (c).

(e) Nimm an, dass $\alpha(T_\alpha) = 0$ ist. Das bedeutet, dass $[T_\alpha, X] = 0 = [T_\alpha, Y]$ fuer alle $X \in \mathcal{L}_\alpha$ und $Y \in \mathcal{L}_{-\alpha}$. Es gibt $X \in \mathcal{L}_\alpha$ und $Y \in \mathcal{L}_{-\alpha}$ so dass $b(X, Y) = 1$. Dann ist $[X, Y] = T_\alpha$. Das bedeutet, dass der Vektorraum aufgespannt von X, Y, T_α eine dreidimensionale aufloesbare Lie-Algebra $S \cong \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(S) \subset \mathfrak{gl}(\mathcal{L})$ ist. Nach Korollar 2.1.3 ist jedes $a \in [S, S]$ nilpotent, also ist T_α sowohl halbeinfach als auch nilpotent, also $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(T_\alpha) = 0$ oder $T_\alpha \in Z(\mathcal{L})$, was der Wahl von T_α widerspricht!

(f) Sei $X \in \mathcal{L}_\alpha$, dann gibt es ein $Y \in \mathcal{L}_{-\alpha}$ so dass $b(X, Y) = \frac{2}{b(T_\alpha, T_\alpha)}$. Setze dann $H := \frac{2T_\alpha}{b(T_\alpha, T_\alpha)}$. Dann gilt $[X, Y] = H$ nach (c). Ferner gilt $[H, X] = \frac{2}{\alpha(T_\alpha)} \alpha(T_\alpha) X = 2X$ und ebenso $[H, Y] = -2Y$.

(g) H_α muss ein Vielfaches von T_α sein. □

Proposition 3.2.2. (a) *Fuer jedes $\alpha \in \phi$ ist* $\dim \mathcal{L}_\alpha = 1$. *Insbesondere ist $S_\alpha = \mathcal{L}_\alpha + \mathcal{L}_{-\alpha} + [\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{-\alpha}]$ eine Unteralgebra isomorph zu $\mathfrak{sl}_2$.*

(b) *Ist $\alpha \in \Phi$ und ist $c\alpha \in \Phi$ fuer ein $c \in \mathbb{K}$, dann ist $c = \pm 1$.*

(c) *Sind $\alpha, \beta \in \Phi$, dann ist $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ und $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in \Phi$.*

(d) *Sind $\alpha, \beta \in \Phi$, dann ist $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] = \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$.*

(e) *Seien $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\beta \neq \pm\alpha$. Seien r, q die groessten ganzen Zahlen so dass $\beta - r\alpha$ und $\beta + q\alpha$ Wurzeln sind. Dann gilt $\beta + j\alpha \in \Phi$ fuer jedes $-r \leq j \leq q$. Es gilt $\beta(H_\alpha) = r - q$.*

(f) *$\mathcal{L}$ ist als Lie-Algebra von den Wurzelraeumen $\mathcal{L}_\alpha$ erzeugt.*

Beweis. Fuer jede Wurzel α fixiere ein Lie-Algebra S_α isomorph zu $\mathfrak{sl}_2$ mit Erzeugern in $\mathcal{L}_{\pm\alpha}$. Sei M der S_α-Modul erzeugt von H_α zusammen mit allen Raeumen $\mathcal{L}_{c\alpha}$ mit $c \in \mathbb{K}^\times$. Dies ist ein S_α-Untermodul von $\mathcal{L}$. Die Gewichte von M sind die Zahlen 0 und $2c = c\alpha(H_\alpha)$ fuer alle c mit $c\alpha \in \Phi$. Da die Gewichte immer ganze Zahlen sind, sind die einzigen c, die auftreten koennen, ganzzahlige Vielfache von $\frac{1}{2}$. Die Lie-Algebra S_α operiert trivial auf dem Kern von α, ein Unterraum von Codimension 1 in $\mathbb{T}$, komplementaer zu $\mathbb{K}H_\alpha$. Andererseits ist S_α ein irreduzibler Untermodul von M. Das Gewicht Null tritt also nur in $\ker\alpha$ und S_α selbst auf, wir folgern, dass $M = \ker\alpha \oplus S_\alpha$, denn ein weiterer irreduzibler Summand N muesste von seinem Gewicht-Null-Raum N_0 erzeugt werden, das Gewicht Null ist aber schon vergeben. Damit folgen (a) und (b). Da $\beta(H_\alpha)$ ein S_α-Gewicht ist, folgt die erste Aussage von (c). Die zweite folgt, da $\beta(H_\alpha)$ ein Gewicht der S_α-Operation auf

$$R_\beta = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{\beta+j\alpha}$$

ist. Teil (d) folgt, da $\mathcal{L}_{\alpha+\beta}$, falls $\neq 0$, ein S_α Gewichtsraum ist. Hieraus folgen auch (e) und (f). □

Sei $\mathcal{T}^*_{\mathbb{Q}}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\subset \mathfrak{t}^*$ aufgespannt von Φ und sei

$$E := \mathcal{T}^*_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}.$$

Die Killing-Form liefert per Dualisierung eine symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{t}^*$. Genauer sei fuer $\lambda, \mu \in \mathfrak{t}^*$ definiert:

$$(\lambda, \mu) := b(T_\lambda, T_\mu).$$

Es gilt nach Definition der Killing-Form, dass

$$\begin{aligned}(\lambda, \mu) &= \sum_{\alpha\in\Phi} \alpha(T_\lambda)\alpha(T_\mu)\\ &= \sum_{\alpha\in\Phi} (\alpha, \lambda)(\alpha, \mu).\end{aligned}$$

Insbesondere ist fuer $\beta \in \Phi$

$$(\beta, \beta) = \sum_{\alpha\in\Phi} (\alpha, \beta)^2.$$

Die Form ist auf $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}^*$ also **positiv definit**. Division durch $(\beta,\beta)^2$ liefert

$$\frac{1}{(\beta,\beta)} = \sum_{\alpha\in\Phi} \frac{(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)^2}.$$

Da $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ in $\mathbb{Z}$ liegt, liegt (β,β) in $\mathbb{Q}$ und nach Polarisierung ist auch $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}$. Daher laesst sich $(.,.)$ zu einer reellen symmetrischen Bilinearform auf E fortsetzen.

Wir haben gezeigt:

Satz 3.2.3. *E ist ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und Φ ist eine endliche Teilmenge von E.*

(a) *Φ spannt E auf und 0 liegt nicht in E.*

(b) *Ist $\alpha\in\Phi$, dann ist $-\alpha\in\Phi$, aber kein anderes Vielfaches von α liegt in Φ.*

(c) *Sind $\alpha,\beta\in\Phi$, dann ist $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ in $\mathbb{Z}$ und $\beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ ist in Φ.*

3.3 Wurzelsysteme

Definition 3.3.1. Sei E ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $(.,.)$. Jedes $\alpha\neq 0$ in E definiert eine **Spiegelung** s_α an dem Orthogonalraum von α definiert durch

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

Wir schreiben auch

$$\langle\beta:\alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)},$$

also

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle\beta:\alpha\rangle\,\alpha.$$

Lemma 3.3.2. *Sei E ein euklidischer Raum und $\phi\subset E$ eine endliche Menge, die E aufspannt. Nimm an, dass alle Spiegelungen s_α, $\alpha\in\Phi$ die Menge Φ in sich abbilden. Sei $s\in\mathrm{GL}(E)$, es gebe eine Hyperebene H, die punktweise von s festgehalten wird und es gebe ein $\alpha\in\Phi$ mit $s(\alpha)=-\alpha$, dann ist $s=s_\alpha$.*

Beweis. Sei $\tau = ss_\alpha$. Dann gilt $\tau(\Phi) = \Phi$ und τ operiert als die Identitaet auf dem Raum $\mathbb{R}\alpha$ und auf dem Quotienten $E/\mathbb{R}\alpha$. Damit sind alle Eigenwerte von τ gleich 1. und das Minimalpolynom m_τ von τ ist ein Teiler von $(x-1)^d$ mit $d = \dim E$. Da Φ endlich ist und τ die Menge ϕ permutiert, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\tau^k = \mathrm{Id}$, also teilt m_τ auch das Polynom $x^k - 1$, so dass $m_\tau(x) = x - 1$ und $\tau = 1$. □

Definition 3.3.3. Sei E ein euklidischer Raum. Eine endliche Teilmenge $\Phi \subset E$ heisst **Wurzelsystem**, falls

(a) Φ spannt E auf und $0 \notin \Phi$.

(b) Ist $\alpha \in \Phi$, dann sind die einzigen Vielfachen von α in Φ die Elemente $\pm\alpha$.

(c) Ist $\alpha \in \Phi$, dann ist $s_\alpha(\Phi) = \Phi$.

(d) Sind $\alpha, \beta \in \Phi$, dann ist $\langle \beta : \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Definition 3.3.4. Sei Φ ein Wurzelsystem. Die Gruppe $\mathcal{W} \subset \mathrm{GL}(E)$, die von den Spiegelungen s_α, $\alpha \in \Phi$ erzeugt wird, heisst die **Weyl-Gruppe** von Φ. Da die Restriktion $\mathcal{W} \to \mathrm{Per}(\Phi)$ injektiv ist, ist $\mathcal{W}$ endlich.

Lemma 3.3.5. *Sei Φ ein Wurzelsystem in E mit Weyl-Gruppe $\mathcal{W}$. Laesst $s \in \mathrm{GL}(E)$ die Menge Φ invariant, dann ist*

$$ss_\alpha s^{-1} = s_{s(\alpha)}$$

fuer jedes $\alpha \in \Phi$ und fuer alle $\alpha, \beta \in \Phi$ gilt

$$\langle \beta : \alpha \rangle = \langle s(\beta) : s(\alpha) \rangle .$$

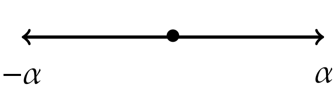
Beweis. Das Element $ss_\alpha s^{-1}$ ist die Identitaet auf $s(\alpha^\perp)$ und wirft $s(\alpha)$ auf $-s(\alpha)$, damit ist es gleich $s_{s(\alpha)}$. Damit ist

$$s(\beta) - \langle \beta : \alpha \rangle\, s(\alpha) = s(s_\alpha(\beta)) = s_{s(\alpha)}(s(\beta)) = s(\beta) - \langle s(\beta) : s(\alpha) \rangle\, s(\alpha)$$

woraus auch die zweite Aussage folgt. □

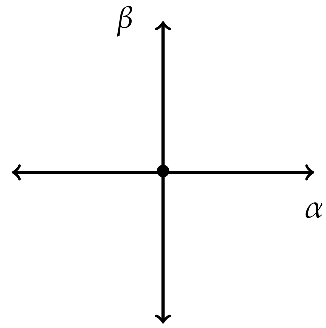
Definition 3.3.6. Die Dimension von $E = \mathrm{Spann}(\Phi)$ wird auch der **Rang** der Wurzelsystems Φ genannt.

Beispiele 3.3.7. • Ist der Rang $r = 1$, dann gibt es nur ein Wurzelsystem, welches A_1 genannt wird:

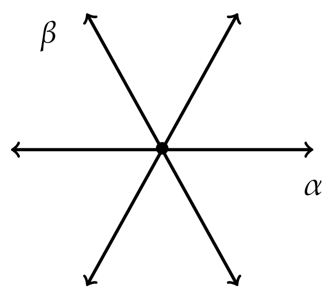


- Im Fall $r = 2$ gibt es folgende Moeglichkeiten:

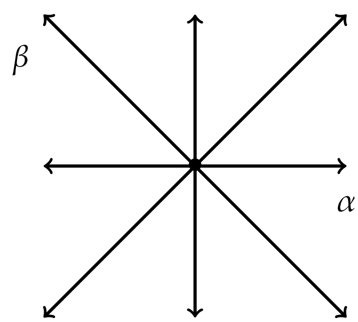
$A_1 \times A_1$



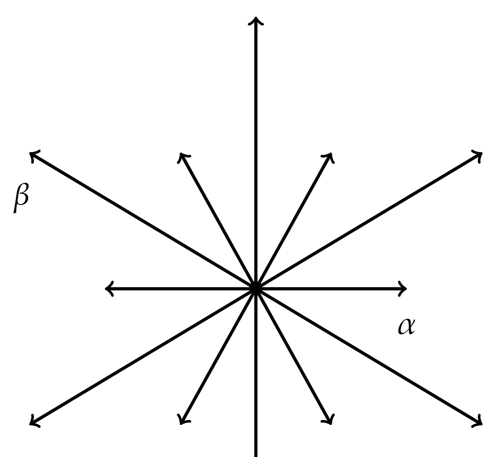
A_2



B_2



G_2



Lemma 3.3.8. *Sind α, β Wurzeln mit $\alpha \neq \pm\beta$, dann gibt es fuer den Winkel θ zwischen Ihnen, sowie fuer $\langle \alpha : \beta \rangle$ und $\|\alpha\|^2 / \|\beta\|^2$ bis auf die Reihenfolge von α und β folgende Moeglichkeiten:*

$\langle \alpha : \beta \rangle$	$\langle \beta : \alpha \rangle$	θ	$\|\alpha\|^2 / \|\beta\|^2$
0	*0*	$\pi/2$	*unbestimmt*
1	*1*	$\pi/3$	*1*
-1	*-1*	$2\pi/3$	*1*
1	*2*	$\pi/4$	*2*
-1	*-2*	$3\pi/4$	*2*
1	*3*	$\pi/6$	*3*
-1	*-3*	$5\pi/6$	*3*

Beweis. Fuer den Winkel θ gilt $(\alpha, \beta) = \|\alpha\| \|\beta\| \cos(\theta)$. Daher ist

$$\langle \beta : \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos\theta$$

und $\langle \beta : \alpha \rangle \langle \alpha : \beta \rangle = 4\cos^2\theta$. Nun sind $\langle \alpha : \beta \rangle$ und $\langle \beta : \alpha \rangle$ ganze Zahlen desselben Vorzeichens und da $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ ist, kommen fuer $\cos^2\theta$ die Werte $0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ in Frage. Entsprechend ist $\langle \beta : \alpha \rangle \langle \alpha : \beta \rangle = 0, 1, 2, 3, 4$. da der Winken $\theta = 0$ ausgeschlossen ist, kommt die letzte Zahl 4 nicht vor. □

Lemma 3.3.9. *Sind $\alpha \neq \pm\beta$ Wurzeln und ist $(\alpha, \beta) > 0$, d.h., der Winkel zwischen Ihnen ist spitz, dann ist $\alpha - \beta$ ein Wurzel. Ist $(\alpha, \beta) < 0$, dann ist $\alpha + \beta$ eine Wurzel.*

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus der ersten, indem man β durch $-\beta$ ersetzt. Das Skalarprodukt (α, β) ist genau dann > 0, wenn $\langle \alpha : \beta \rangle > 0$ ist. Nach der Tabelle im letzten Lemma muss dann $\langle \alpha : \beta \rangle = 1$ oder $\langle \beta : \alpha \rangle = 1$ sein. Wir koennen $\langle \alpha : \beta \rangle = 1$ annehmen, dann ist $s_\beta(\alpha) = \alpha - \beta$ und damit folgt die Behauptung. □

3.4 Die Weyl-Gruppe

Definition 3.4.1. Eine Teilmenge Δ von Φ heisst **einfache Basis**, falls

(a) Δ ist eine Basis von E,

(b) fuer jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ gilt $\alpha = \sum_{\delta \in \Delta} k_\delta \delta$, wobei die k_δ ganze Zahlen sind die alle dasselbe Vorzeichen haben.

Ist eine einfache Basis Δ gegeben, dann ist die **Hoehe** der Wurzel α bezueglich Δ gegeben als die Zahl

$$\mathrm{ht}(\alpha) := \sum_{\delta\in\Delta} k_\delta.$$

Lemma 3.4.2. *Ist Δ eine einfache Basis, dass ist $(\alpha, \beta) \leq 0$ fuer alle $\alpha, \beta \in \Delta$ und $\alpha - \beta$ ist keine Wurzel.*

Beweis. $\alpha - \beta$ kann keine Wurzel sein, da 1 und -1 nicht dasselbe Vorzeichen haben. □

Definition 3.4.3. Sei E^{reg} die Menge aller $x \in E$ mit $(x, \alpha) \neq 0$ fuer jedes $\alpha \in \Phi$. Wir nennen die Elemente von E^{reg} **regulaer**. Da die nichtregulaeren Elemente nur aus endlich vielen Hyperebenen bestehen, ist E^{reg} offen und dicht in E.

Fuer ein regulaeres $x \in E$ sei

$$\Phi^+ = \Phi^+(x) := \{\alpha \in \Phi : (\alpha, x) > 0\}.$$

Eine Wurzel $\alpha \in \Phi^+$ heisst **zerlegbar**, falls es $\beta, \gamma \in \Phi^+$ gibt mit $\alpha = \beta + \gamma$. Sei dann $\Delta = \Delta(x)$ die Menge aller unzerlegbaren Wurzeln.

Satz 3.4.4. *Es gibt eine einfache Basis. Genauer ist $\Delta(x)$ eine einfache Basis und jede einfache Basis wird auf diese Weise erhalten.*

Beweis. (1) Jede Wurzel in Φ^+ ist eine $\mathbb{N}_0$-Linearkombination von Elementen von $\Delta(x)$.

Sei $H(v) = (v, x)$ fuer $v \in E$. Dann ist $H(\alpha) > 0$ fuer jedes $\alpha \in \Phi^+$. Ist $\alpha \in \Phi^+$. Ist α nicht selbst in $\Delta(x)$, dann gilt $\alpha = \beta + \gamma$ und es gilt $H(\alpha) = H(\beta) + H(\gamma)$, also sind $H(\beta)$ und $H(\gamma)$ echt kleiner als $H(\alpha$. Da $H(\Phi^+)$ endlich ist, koennen wir nur endlich oft weiterzerlegen und wir enden bei einer Zerlegung

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$$

wobei alle α_j unzerlegbar sind.

(2) Sind $\alpha, \beta \in \Delta(x)$, dann ist $(\alpha, \beta) \leq 0$ ausser im Fall $\alpha = \beta$.

Goelte $(\alpha, \beta) > 0$, so waere $\alpha - \beta$ eine Wurzel. Nach Aenderung der Reihenfolge koennnen wir $\alpha - \beta \in \Phi^+$ annehmen, was wegen $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ der Unzerlegbarkeit von α widerspricht!

(3) $\Delta(x)$ ist linear unabhaengig.

Sei $0 = \sum_{\alpha\in\Delta} r_\alpha \alpha$ eine Linearkombination der Null. Wir trennen die Summe in Beitraege mit $r_\alpha < 0$ und $r_\alpha > 0$ und erhalten $\sum_\alpha t_\alpha \alpha = \sum_\beta s_\beta \beta$ mit $t_\alpha, s_\alpha \geq 0$ und $s_\alpha t_\alpha = 0$. Sei $\varepsilon = \sum_\alpha s_\alpha \alpha$. Dann ist $(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leq 0$, so dass $\varepsilon = 0$. Dann ist $0 = (x, \varepsilon) = \sum_\alpha s_\alpha (x, \alpha)$ so dass alle $s_\alpha = 0$. Analog $t_\beta = 0$.

(4) $\Delta(x)$ ist eine Basis.

Da jedes $\alpha \in \Phi^+$ eine Linearkombination von Δ ist, ist jede Wurzel eine, also ist Δ erzeugend. Linear unabhaengig ist es nach (3), also eine Basis. (b) ist auch klar.

(5) Jede Basis ist von dieser Form.

Sei Δ irgendeine Basis. Waehle dann $x \in E$ mit $(x, \alpha) > 0$ fuer jedes $\alpha \in \Delta$. Dann folgt $\Delta = \Delta(x)$. □

Definition 3.4.5. Die Zusammenhangskomponenten von E^{reg} heissen **Weyl-Kammern**. Die Weyl-Gruppe permutiert die Weyl-Kammern. Hierbei gilt

$$w(\delta(x)) = \Delta(w(x))$$

fuer jedes $w \in W$.

Lemma 3.4.6. *Sei Δ eine einfache Basis von Φ. Die Elemente von Δ heissen* **einfache Wurzeln**.

(a) *Ist α positiv, aber nicht einfach, dann gibt es ein $\beta \in \Delta$ so dass $\alpha - \beta$ eine Wurzel ist.*

(b) *Sei α einfach. Dann permutiert s_α die positiven Wurzel $\neq \alpha$.*
Setze insbesondere $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta>0} \beta$, dann ist $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ fuer jedes $\alpha \in \Delta$.

(c) *Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta$ nicht notwendig verschieden. Schreibe $s_j = s_{\alpha_j}$. Ist $s_1 \cdots s_{t-1}(\alpha_t)$ negativ, dann gibt es $1 \leq j < t$ so dass $s_1 \cdots s_t = s_1 \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_{t-1}$.*
Ist insbesondere $w \in W$ und $w = s_1 \cdots s_t$ eine Darstellung von w minimaler Laenge, dann ist $w(\alpha_t) < 0$.

Beweis. (a) Ist $(\alpha, \beta) \leq 0$ fuer alle $\beta \in \Delta$, so wuerde man wie in Schritt (3) des Satzes sehen, dass $\Delta \cup \{\alpha\}$ linear unabhaengig ist,was nicht sein kann, da Δ eine Basis ist. Also gilt $(\alpha, \beta) > 0$ fuer ein $\beta \in \Delta$, so dass $\alpha - \beta$ eine Wurzel ist.

(b) Sei $\beta \in \Phi^+ \smallsetminus \{\alpha\}$, $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} k_\gamma \gamma$. Dann kann β kein Vielfaches von α sein, also ist $k_\gamma \neq 0$ fuer ein $\gamma \neq \alpha$. Da α selbst in der Basis liegt, ist der Koeffizient von $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta : \alpha \rangle \alpha$ wieder k_γ. Damit hat $s_\alpha(\beta)$ einen positiven Koeffizienten, also muessen alle positiv sein.

(c) Schreibe $\beta_i = s_{i+1} \cdots s_{t-1}(\alpha_t)$, $0 \leq i \leq y-2$, $\beta_{t-1} = \alpha_t$. Dann ist $\beta_0 < 0$ und $\beta_{t-1} > 0$ und daher gibt es einen kleinsten Index j mit $\beta_j > 0$. Dann ist $s_j(\beta_j) = \beta_{s-1} < 0$ und nach (b) folgt $\beta_j = \alpha_j$. Allgemein gilt fuer $w \in \mathcal{W}$, dass $s_{w\alpha} = ws_\alpha w^{-1}$. Also ist $s_j = (s_{j+1} \cdots s_{t-1})s_t(s_{t-1} \cdots s_{j+1})$, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 3.4.7. *Sei Δ eine einfache Basis von Φ.*

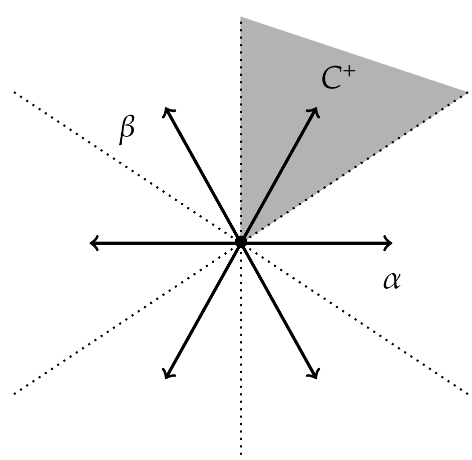
(a) *Ist $x \in E^{\text{reg}}$, dann existiert ein $w \in \mathcal{W}$ so dass $(w(x), \alpha) > 0$ fuer jedes $\alpha \in \Delta$, damit operiert $\mathcal{W}$ transitiv auf den Weyl-Kammern.*

(b) *Ist Δ' eine zweite Basis, dann gibt es $w \in \mathcal{W}$ mit $w\delta = \Delta'$.*

(c) *Ist α eine Wurzel, dann existiert $w \in \mathcal{W}$ so dass $w(\alpha) \in \Delta$.*

(d) *Die Weyl-Gruppe $\mathcal{W}$ wird von den Spiegelungen s_α mit $\alpha \in \Delta$ erzeugt.*

(e) *Ist $w \in \mathcal{W}$ und $w(\Delta) = \Delta$, dann ist $w = 1$, also operiert $\mathcal{W}$ einfach transitiv auf den Basen (und den Weyl-Kammern).*



Beweis. Sei $\mathcal{W}'$ die Gruppe erzeugt von allen s_α mit $\alpha \in \Delta$. Wir zeigen zunaechste (a)-(c) fuer die Gruppe $\mathcal{W}'$ und folgern dann $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$.

(a) Sei $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$ und waehle $w \in \mathcal{W}'$ so dass $(w(x), \rho) \in \mathbb{R}$ maximal wird. Ist α einfach, dann ist $s_\alpha w \in \mathcal{W}'$ und $(w(x), \rho) \geq (s_\alpha w(x), \rho) = (w(x), s_\alpha(\rho)) = (w(x), \rho - \alpha) = (w(x), \rho) - (w(x), \alpha)$, so dass $(w(x), \alpha) \geq 0$ fuer jedes $\alpha \in \Delta$ ist. Da x regulaer ist, tritt Gleichheit nicht auf und daher liegt $w(x)$ in der positiven Weyl-Kammer.

(b) Da $\mathcal{W}'$ die Weylkammern transitiv permutiert, gilt das gleiche fuer die einfachen Basen.

(c) Waehle eine Weyl-Kammer, die die Hyperebene $(x, \alpha) = 0$ als Wand hat. Dann benutze (a) und (b).

(d) Es reicht zu zeigen, dass fuer jede Wurzel α die Spiegelung s_α in $\mathcal{W}'$ liegt. Waehle dazu nach (c) ein $w \in \mathcal{W}'$ mit $\beta = w(\alpha) \in \Delta$. Dann ist $s_\alpha = s_{w^{-1}(\beta} = w^{-1}s_\beta w \in \mathcal{W}'$.

(e) Sei $w \in \mathcal{W} \setminus \{1\}$. Schreibe w in minimaler Laenge als $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_t}$ mit einfachen Wurzeln α_j. Nach Lemma 3.4.6 (c) folgt $w(\alpha_t) < 0$, also $w(\Delta) \neq \Delta$. □

Definition 3.4.8. Schreibe $w \in \mathcal{W}$ mit minimaler Laenge als $w = s_1 \cdots s_l$ mit einfachen Spiegelungen s_j. Wir nennen eine solche Darstellung eine **reduzierte Darstellung** von w. Die Zahl l ist nach Definition die **Laenge** von w in Bezug auf Δ,

$$\ell(w) = \ell_\Delta(w) := l.$$

Lemma 3.4.9. *Sei $n(w)$ die Anzahl der positiven Wurzeln α mit $w(\alpha) < 0$. Dann gilt*

$$\ell(w) = n(w).$$

Beweis. Induktion nach der Laenge. Der Fall $\ell(w) = 0$ ist aequivalent zu $w = 1$ und damit klar.

Nimm nun an, das Lemma ist bewiesen fuer alle w' mit $\ell(w') < \ell(w)$. Schreibe w in reduzierter Form als $w = s_{al_1} \cdots s_{\alpha_t}$. Nach Lemma 3.4.6 (c) gilt $w(\alpha_t) < 0$. Nach Lemma 3.4.6 (b) folgt dann $n(ws_{\alpha_t}) = n(w) - 1$. Andererseits ist $\ell(ws_{\alpha_t}) = \ell(w) - 1$ so dass induktiv die Behauptung folgt. □

Definition 3.4.10. Sei $C(\Delta)$ die positive Weyl-Kammer zur einfachen Basis Δ, also

$$\begin{aligned} C(\Delta) &= \left\{x \in E : (x, \alpha) > 0 \ \forall_{\alpha \in \Delta}\right\} \\ &= \left\{x \in E : (x, \alpha) > 0 \ \forall_{\alpha > 0}\right\}. \end{aligned}$$

Sei $\overline{C(\Delta)}$ der Abschluss in E von $C(\Delta)$.

Lemma 3.4.11. (a) *Fuer jedes $z \in E$ gibt es ein $w \in \mathcal{W}$, so dass $wz \in \overline{C(\Delta)}$.*

(b) *Seien $x, y \in \overline{C(\Delta)}$. Ist $wx = y$ fuer ein $w \in \mathcal{W}$, dann ist w ein Produkt einfacher Spiegelungen, die x festhalten. Insbesondere gilt $x = y$.*

Beweis. (a) Da die regulaeren Elemente dicht in E liegen, gibt es eine Weylkammer C' mit $z \in \overline{C'}$. Dann gibt es ein $w \in \mathcal{W}$ so dass $w(C') = C(\Delta)$ und also $wz \in w(\overline{C'}) = \overline{C(\Delta)}$.

(b) Wir benutzen Induktion nach $\ell(w)$. Ist diese gleich Null, sind wir fertig. Sei also $\ell(w) > 0$. Dann gibt es eine positive Wurzel α mit $w(\alpha) < 0$. Es muss dann auch eine einfache Wurzel $\alpha \in \Delta$ mit dieser Eigenschaft geben. Dann ist $0 \geq (y, w\alpha) = (w^{-1}y, \alpha) = (x, \alpha)$. Damit folgt $(x, \alpha) = 0$ und $s_\alpha(x) = x$. Nach Lemma 3.4.6 folgt $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) - 1$ und die Behauptung folgt induktiv. □

Definition 3.4.12. Ein Wurzelsystem Φ heisst **reduzibel**, falls $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ (disjunkte Vereinigung) mit $\Phi_1 \perp \Phi_2$ und beide nichtleer. Es heisst **irreduzibel**, falls es nicht in dieser Form geschrieben werden kann.

Beispiele: $A_1 \times A_1$ ist reduzibel, A_2, B_2 und G_2 sind irreduzibel.

Definition 3.4.13. Sei Δ eine einfache Basis und sei $x_0 \in E^{\text{reg}}$ mit

$$\alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha, x_0) > 0.$$

Wir erweitern die partielle Ordnung auf E durch

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad (x, x_0) < (y, x_0).$$

Lemma 3.4.14. *Sei Φ irreduzibel und Δ eine einfache Basis.*

(a) *In Bezug auf die partielle Ordnung $<$ gibt es genau eine maximale Wurzel $\alpha_{\max}$. Fuer $\alpha \neq \alpha_{\max}$ gilt*
$$\text{ht}(\alpha) < \text{ht}(\alpha_{\max})$$
und $(\alpha, \alpha_{\max}) \geq 0$ fuer alle $\alpha > 0$.

(b) *Die Weyl-Gruppe $\mathcal{W}$ operiert irreduzibel auf E, d.h., es gibt keinen echten, $\mathcal{W}$-stabilen Unterraum.*

(c) *Es treten maximal zwei Wurzellaengen auf. Alle Wurzeln gleicher Laenge sind $\mathcal{W}$-konjugiert.*

(d) *Hat Φ zwei Wurzellaengen, dann ist is maximale Wurzel lang.*

Beweis. (a) Sei $\alpha_{\max} = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ maximal in der Ordnung. Dann ist offensichtlich $\alpha_{\max} > 0$. Sei $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta : k_\alpha > 0\}$ und $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta : k_\alpha = 0\}$, dann ist $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$. Nimm an, dass Δ_2 nichtleer ist. Dann ist $(\alpha_{\max}, \alpha) \leq 0$ fuer jedes $\alpha \in \Delta_2$. Da Φ irreduzibel ist, gibt es ein $\alpha \in \Delta_2$, so dass α nicht senkrecht auf Δ_1 steht, so dass $(\alpha, \alpha') < 0$ fuer ein $\alpha' \in \Delta_1$. Dann folgt $(\alpha_{\max}, \alpha) < 0$, so dass $\alpha_{\max} + \alpha$ eine Wurzel ist, die aber $\alpha_{\max}$ dominiert, was der Maximalitaet widerspricht!

Daher ist Δ_2 leer und alle $k_\alpha > 0$. Ferner folgt $(\alpha_{\max}, \alpha) \geq 0$ fuer alle $\alpha \in \Delta$. Da Δ den Raum aufspannt, gibt es ein $\alpha \in \Delta$ mit $(\alpha_{\max}, \alpha) > 0$. Sei $\alpha'_{\max}$ eine weitere maximale Wurzel. Dann folgt $(\alpha'_{\max}, \alpha) \geq 0$ fuer alle $\alpha \in \Delta$ mit $>$ fuer ein α. Daher ist

$$(\alpha_{\max}, \alpha_{\max}) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha (\alpha'_{\max}, \alpha) > 0.$$

Also ist $\alpha_{\max} - \alpha'_{\max}$ eine Wurzel ausser wenn $\alpha_{\max} = \alpha'_{\max}$. Ist aber \$$\alpha_{\max} - \alpha'_{\max}$ eine Wurzel, dann ist entweder $\alpha_{\max} < \alpha'_{\max}$ oder $\alpha_{\max} > \alpha'_{\max}$, was der jeweiligen Maximalitaet widerspricht! Also ist $\alpha_{\max}$ eindeutig.

(b) Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten. Sei also $0 \neq E' \subset E$ ein $\mathcal{W}$-stabiler Unterraum. Dann ist $E'' = E'^{\perp}$ ebenfalls $\mathcal{W}$-stabil und $E = E' \oplus E''$. Ist $\alpha \in \Phi$, dann laesst die Spiegelung s_α diese Zerlegung stabil, daher muss $\alpha \in E'$ oder $\alpha \in E''$ sein. Das heisst, dass Φ in zwei orthogonale Teile zerfaellt, falls $E'' \neq 0$, was nicht sein kann, da Φ irreduzibel ist, also ist $E'' = 0$ oder $E' = E$.

(c) Sind α und β zwei Wurzeln, dann koennen nach Teil (b) nicht alle $w(\alpha)$, $w \in \mathcal{W}$ senkrecht auf β sein. Ist $(\alpha, \beta) \neq 0$, dann ist nach Lemma 3.3.8 der Quotient $\|\alpha\|^2 \big/ \|\beta\|^2$ gleich $1, 2, 3, 1/2, 1/3$. Gaebe es nun 3 Wurzellaengen, dann wurde auch der Quotient $3/2$ vorkommen.

Seinen nun α, β Wurzeln derselben Laenge. Indem wir einen durch ein $\mathcal{W}$-Konjugat ersetzen, koennen wir ohne Einschraenkung $(\alpha, \beta) \neq 0$ und $\alpha \neq \beta$ annehmen. Da die Wurzellaengen gleich sind, ist auch $\langle \alpha : \beta \rangle = \langle \beta : \alpha \rangle$ und nach der Tabelle in Lemma 3.3.8 folgt dann $\langle \alpha : \beta \rangle = \pm 1$. Ersetze β durch $-\beta$ falls noetig und erreiche $\langle \alpha : \beta \rangle = \langle \beta : \alpha \rangle = 1$. Dann ist

$$(s_\alpha s_\beta s_\alpha)(\beta) = (s_\alpha s_\beta)(\beta - \alpha) = s_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha.$$

(d) Sei $\alpha_{\max}$ die maximale Wurzel und α irgendeine Wurzel. Es reicht zu zeigen, dass $(\alpha, \alpha) \leq (\alpha_{\max}, \alpha_{\max})$. Ersetzt man α durch ein $\mathcal{W}$-Kinjugat, kann man annehmen, dass α im Abschluss $\overline{C}$ der fundamentalen Weylkammer C liegt. Nach (a) folgt dann $\alpha_{\max} > \alpha$ und daher $(x, \alpha_{\max} - \alpha) \geq 0$ fuer alle $x \in \overline{C}$. Die Faelle $x = \alpha_{\max}$ und $x = \alpha$ liefern

$$(\alpha_{\max}, \alpha_{\max}) \geq (\alpha_{\max}, \alpha) \geq (\alpha, \alpha). \qquad \square$$

3.5 Klassifikation

Definition 3.5.1. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ die einfachen Wurzeln. Die Matrix $(\left\langle \alpha_i, \alpha_j \right\rangle)$ heisst die **Cartan-Matrix** des Wurzelsystems.

Die Cartan-Matrix haengt von der Anordnung der einfachen Wurzeln ab, eine andere Anordnung liefert eine Matrix konjugiert via einer Permutationsmatrix.

Die Cartan-Matrizen der zweidimensionalen Systeme sind

$$A_1 \times A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

sowie

$$B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.5.2. *Sei $\Delta' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_l)$ ein zweites Wurzelsystem mit $\left\langle \alpha_i : \alpha_j \right\rangle = \left\langle \alpha'_i : \alpha'_j \right\rangle$ fuer alle i, j, dann setzt die Abbildung $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$ eindeutig fort zu einem linearen Isomorphismus $\phi : E \to E'$, der Φ auf Φ' abbildet und $\left\langle \phi(\alpha) : \phi(\beta) \right\rangle = \langle \alpha : \beta \rangle$ erfuellt. Ferner gibt ist ϕ eine* **Quasi-Isometrie**, *d.h., es ein $c > 0$ so dass*

$$(\phi(x), \phi(y)) = c(x, y)$$

fuer alle $x, y \in E$ gilt.

Damit ist ein Wurzelsystem bis auf Isomorphie durch die Cartan-Matrix festgelegt.

Beweis. Die Abbildung auf den Basen setzt in eindeutiger Weise zu einem Vektorraumisomorphismus ϕ fort. Fuer $\alpha, \beta \in \Delta$ gilt dann

$$\phi(s_\alpha(\beta)) = \phi(\beta - \langle \beta : \alpha \rangle \alpha) = s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)).$$

Da die Weyl-Gruppen $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}'$ von den einfachen Spiegelungen erzeugt werden, folgt, dass $w \mapsto \phi w \phi^{-1}$ ein Isomorphismus der Weyl-Gruppen ist. Da jede Wurzel unter $\mathcal{W}$ zu einer einfachen Wurzel konjugiert ist, bildet ϕ Wurzeln auf Wurzeln ab und wirft die entsprechenden Spiegelungen aufeinander ab, so dass auch $\langle . : . \rangle$ erhalten bleibt. Damit gilt insbesondere

$$\frac{(\phi(\beta), \phi(\alpha))}{(\phi(\alpha), \phi(\alpha))} = \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

oder

$$\frac{(\phi(\beta),\phi(\alpha))}{(\beta,\alpha)} = \frac{(\phi(\alpha),\phi(\alpha))}{(\alpha,\alpha)}$$

fuer alle einfachen Wurzeln α, β. Nenne die rechte Seite $C(\alpha) > 0$. Damit ist $(\phi(\beta), \phi(\alpha)) = C(\alpha)(\beta, \alpha)$. Aus der Symmetrie des Skalarproduktes folgt dann, dass man auf beiden Seiten α und β vertauschen kann, was zu $C(\alpha) = C(\beta) = c > 0$ folgt. Damit gilt $(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = c(\alpha, \beta)$ fuer alle einfachen Wurzeln und wegen Bilinearitaet gilt es allgemein. □

Definition 3.5.3. Sind α, β zwei verschiedene Wurzeln, dann ist $\langle \alpha : \beta \rangle \langle \beta : \alpha \rangle$ gleich $0, 1, 2, 3$. Der **Coxeter Graph** ist ein Graph mit l Ecken. Zwei Ecken v_i, v_j sind durch $\left\langle \alpha_i : \alpha_j \right\rangle \left\langle \alpha_j : \alpha_i \right\rangle$ Kanten verbunden.

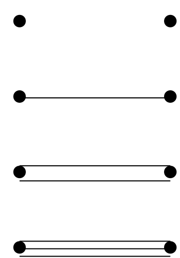
Beispiele:

$A_1 \times A_1$:

A_2 :

B_2 :

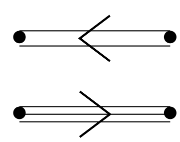
G_2 :



Aus dem Coxeter-Graph entsteht das **Dynkin-Diagramm**, wenn man be zwei verschiedenen Wurzellaengen einen Pfeil von der laengeren zur kurzeren Wurzel hinzufuegt, also etwa

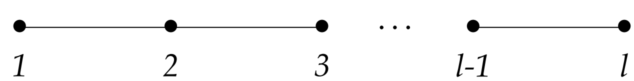
B_2 :

G_2 :

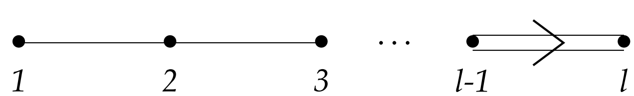


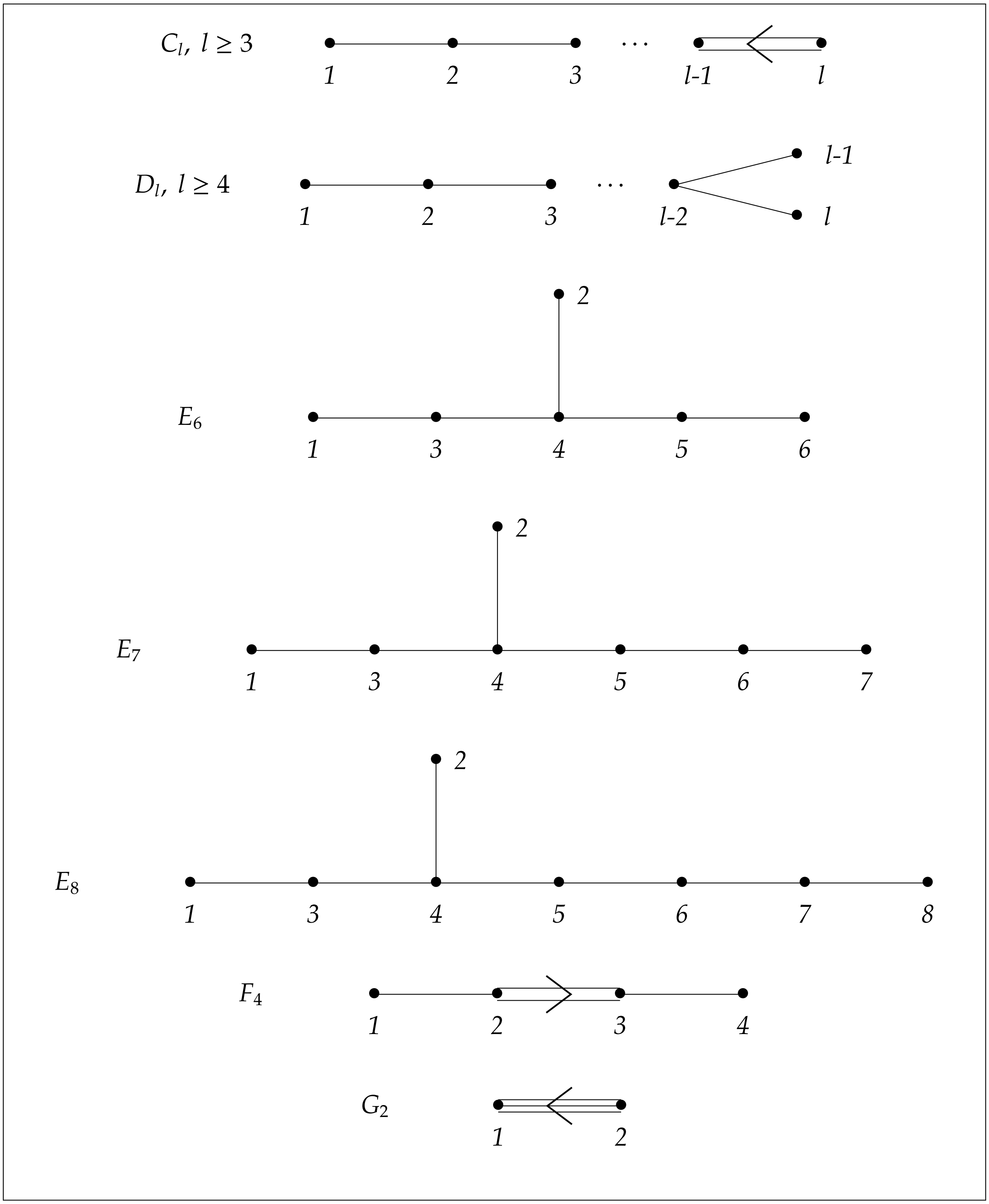
Satz 3.5.4. *Das Dynkin-Diagramm legt die Cartan-Matrix und damit den Isomorphietyp des Wurzelsystems fest. Die irreduziblen Wurzelsysteme sind*

A_l, $l \geq 1$



B_l, $l \geq 2$





Beweis. Der Beweis wird durch eine Kombinatorik von endlichen Mengen in Euklidischen Raeumen gefuehrt, er ist komplett elementar und ermuedend. Der interessierte Leser kann ihn in Humphreys Buch nachlesen. □

3.6 Isomorphiesatz

Sei g eine halbeinfache Lie-Algebra ueber einem algebraisch abgeschlossenen Koerper $\mathbb{K}$ der Charakteristik Null. Sei $\mathcal{T}$ eine maximale torale Unteralgebra und $\Phi \subset \mathfrak{t}^*$ die Menge der Wurzeln. In Proposition 3.2.1 haben wir gezeigt, dass Φ den Raum $\mathfrak{t}^*$ aufspannt. Damit ist der von Φ aufgespannte $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Q}}$ von der Dimension $r = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{T}$. Sei $E = \mathbb{R} \otimes \mathcal{T}^*_{\mathbb{Q}}$, dann ist Φ ein Wurzelsystem im reellen Raum E. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass halbeinfache Lie-Algebren mit isomorphen Wurzelsystemen isomorph sind.

Proposition 3.6.1 (Reduktion auf den einfachen Fall)**.**

(a) *Ist $\mathcal{L}$ eine einfache Lie-Algebra, dann ist Φ ein irreduzibles Wurzelsystem im Sinne von Definition 3.4.12.*

(b) *Sei $\mathcal{L}$ halbeinfach, also $\mathfrak{g} = \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_s$ direkte Summe einfacher Ideale und sei $\mathcal{T}$ eine maximale torale Unteralgebra, dann ist $\mathfrak{t} = \mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_s$, wobei $\mathcal{T}_j = \mathcal{T} \cap \mathcal{L}_j$ fuer jedes j eine maximale torale Unteralgebra von $\mathcal{L}_j$ ist.*

Beweis. (a) **Angenommen**, $\Phi - \Phi_1 \cup \Phi_2$, wobei Φ_1 und ϕ_2 orthogonal sind. Ist $\alpha \in \Phi_1$ und $\beta \in \Phi_2$, dann ist $\alpha + \beta$ keine Wurzel und daher $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] = 0$. Sei dann $\mathcal{H}$ die Unteralgebra erzeugt von allen $\mathcal{L}_\alpha$ mit $\alpha \in \Phi_1$, dann ist $\mathcal{H}$ ein echtes Ideal, was der Einfachheit **widerspricht**.

(b) Ist $X = X_1 + \cdots + X_s \in \mathcal{T}$ mit $X_j \in \mathcal{T}_j$, fuer jedes j dann ist fuer ein gegebenes j das Element X_j ebenfalls halbeinfach und kommutiert mit jedem $Y \in \mathcal{T}$, gehoert daher wegen der Maximalitaet zu $\mathcal{T}$. Die Zerlegung folgt. Zur Maximalitaet von $\mathcal{T}_j$: Ist $\mathcal{T}_j \subset \mathcal{H}_j \subset \mathcal{L}_j$ mit einer toralen Algebra $\mathcal{H}_j$, dann ist $\mathcal{H} = \bigoplus_{i \neq j} \mathcal{T}_i \oplus \mathcal{H}_j$ eine torale Unteralgebra von $\mathcal{L}$, also $\mathcal{H} = \mathcal{T}$ und daher $\mathcal{H}_j = \mathcal{T}_j$. □

Proposition 3.6.2. *Sei $\mathcal{L}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathcal{T}$ eine maximale torale Unteralgebra mit Wurzelsystem Φ. Sei $\Delta \subset \Phi$ eine einfache Basis. Dann wird die Lie-Algebra $\mathcal{L}$ von $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} (\mathcal{L}_\alpha \oplus \mathcal{L}_{-\alpha})$ erzeugt.*

Definition 3.6.3. Insbesondere kann man $0 \neq X_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$ waehlen fuer jedes $\alpha \in \Delta$ und dazu den $\mathfrak{sl}_2$-Partner $Y_\alpha \in \mathcal{L}_{-\alpha}$. Dann nennt man die $(X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ **Standard-Erzeuger** von $\mathcal{L}$.

Beweis. Sei $\mathcal{L}'$ die von diesem Raum erzeugte Unteralgebra. Sei β eine beliebige positive Wurzel. Dann kann man β schreiben als $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ mit $\alpha_j \in \Delta$ fuer jedes j so dass jede Teilsumme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ eine Wurzel ist. Es gilt $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] = \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$. Per

Induktion sehen wir, dass $\mathcal{L}_\beta \subset \mathcal{L}'$. Fuer die negativen Wurzeln ersetzen wir Δ durch $-\Delta$, was $\mathcal{L}'$ nicht aendert. Daher ist $\mathfrak{g} = \mathcal{T} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}'$. □

Erinnerung. Zu gegebenem $0 \neq X \in \mathcal{L}_\alpha$ gibt es genau ein $0 \neq Y \in \mathcal{L}_{-\alpha}$, so dass mit $H = [X, Y]$ gilt $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = 2Y$, also dass (H, X, Y) ein $\mathfrak{sl}_2$**-Tripel** ist. Wir nennen Y den $\mathfrak{sl}_2$**-Partner** von X.

Satz 3.6.4. *Seien $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ halbeinfache Lie-Algebren mit maximalen Tori $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}'$ und entsprechenden Wurzelsystemen Φ und Φ'. Sei $\eta : \Phi \to \Phi'$ ein Isomorphismus von Wurzelsystemen.*

(a) *Dann gibt es genau einen Isomorphismus $\theta : \mathcal{T} \to \mathfrak{t}'$, so dass $\eta(\alpha)(\theta(X)) = \alpha(X)$ fuer alle $\alpha \in \Phi, X \in \mathcal{T}$.*

(b) *Waehle eine einfache Basis Δ von Φ und setze $\Delta' = \eta(\Delta)$. Fuer jedes $\alpha \in \Delta$ waehle einen beliebigen Vektorraumisomorphismus $\pi_\alpha : \mathcal{L}_\alpha \to \mathcal{L}'_{\alpha'}$. Dann gibt es genau einen Lie-Algebrenisomorphismus $\pi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, der θ und alle π_α fortsetzt.*

Beweis. Indem man beide Algebren als Summe von einfachen Idealen schreibt, zerlegt man entsprechend die Wurzelsysteme in disjunkte, paarweise orthogonale Teilmengen. Diese Zerlegung muss von η respektiert werden, daher reicht es, anzunehmen, dass $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ beide einfach sind.

(a) Ein Isomorphismus der Wurzelsysteme η ist ein Isomorphismus der aufgespannten $\mathbb{R}$-Vektorraeume $\eta : E \to E'$, der eine Quasi-Isometrie ist und $\eta(\Phi) = \Phi'$ erfuellt. Indem man eines der Skalarprodukte mit einem Skalar multipliziert, kann man verlangen, dass η eine Isometrie ist. Nun setzt η von Φ linear zu $\eta : \mathfrak{t}^* \to \mathfrak{t}'^*$ fort. dies ist ein Isomorphismus und die Abbildung $\theta = \eta^{-1}$ erfuellt die Behauptung.

(b) Waehle $X_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$ fuer jedes $\alpha \in \Phi$. Sei dann $X_{-\alpha} \in \mathcal{L}_{-\alpha}$ der entsprechende $\mathfrak{sl}_2$-Partner. Definiere $\pi(X_{-\alpha}) \in \mathcal{L}'_{-\alpha}$ als den $\mathfrak{sl}_2$-Partner von $\pi(X_\alpha)$. Sei D die Unteralgebra von $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}'$ erzeugt von allen $\overline{X}_\alpha := X_\alpha \oplus \pi(X_\alpha)$ mit $\alpha \in \pm\Delta$. Die Projektion von D auf $\mathcal{L}$ ist gleich $\mathcal{L}$ und ebenso fuer $\mathcal{L}'$. Wenn wir zeigen, dass D nicht $\mathcal{L}$ enthaelt, dann enthaelt es auch nicht $\mathcal{L}'$ und ist der Graph eines Lie-Isomorphismus von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{L}'$.

Wir muessen also zeigen, dass $\mathcal{L} \not\subset D$. Da $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ einfach sind, sind die Wurzelsysteme irreduzibel, haben also eindeutig bestimmte maximale Wurzeln β und $\beta' = \eta(\beta)$. Waehle $X \in \mathcal{L}_\beta$ und $X' \in \mathcal{L}'_{\beta'}$. Sei $\overline{X} = (X, X') \in \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}'$. Sei M der Spann aller $\mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_1}) \cdots \mathrm{ad}(\overline{X}_{-\alpha_s})(\overline{X})$, fuer $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \Delta$. Solch ein Element liegt in $\mathcal{L}_{\beta-\sum\alpha_j} \oplus \mathcal{L}'_{\alpha'-\sum\alpha'_j}$

und damit ist $M \cap \mathcal{L}_\beta \oplus \mathcal{L}'_{\beta'}$ eindimensional, so dass M ein echter Teilraum von $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}'$ ist. Man sieht leicht ein, dass die Unteralgebra D den Raum M stabilisiert, dass also gilt $[D, M] \subset M$, indem man dies fuer die Erzeuger von D checkt. **Waere** nun $D = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}'$, dann waere M ein ideal und da $M \neq \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}'$ muesste dann $M = \mathcal{L}$ oder $M = \mathcal{L}'$ sein (Satz 2.3.5), was nicht der Fall ist. $\square$

Kapitel 4

Darstellungen

4.1 Gewichte

Sei $\mathcal{L}$ eine endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebra ueber $\mathbb{C}$ und sei $\mathcal{H}$ eine Cartan-Unteralgebra.

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathcal{L}$-Modul. Nach Satz 2.4.12 ist jedes $X \in \mathcal{H}$ auf V diagonalisierbar, da ferner $\mathcal{H}$ abelsch ist, sind alle $X \in \mathcal{H}$ simultan diagonalisierbar, also gibt es eine Zerlegung

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{H}^*} V_\lambda,$$

wobei λ ueber den Dualraum $\mathcal{H}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ laeuft und

$$V_\lambda = \{v \in V : X.v = \lambda(X)v \ \forall_{X \in \mathcal{H}}\}$$

ist der λ-Eigenraum. Ist $V_\lambda \neq 0$, so nennen wir λ ein **Gewicht** des Moduls V und V_λ den zugehoerigen **Gewichtsraum**.

Beispiel 4.1.1. Betrachtet man $\mathcal{L}$ selbst als $\mathcal{L}$-Module mit der adjungierten Darstellung, dann sind die Gewichte gerade die Wurzeln und die Gewichtsraeume die Wurzelraeume. Sei also

$$\mathfrak{g} = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathcal{L}_\alpha$$

die Wurzelraumzerlegung.

Lemma 4.1.2. *Sei V ein $\mathcal{L}$-Modul. Ist α eine Wurzel, dann bildet $\mathcal{L}_\alpha$ den Gewichtsraum V_λ in $V_{\lambda+\alpha}$ ab.*

Beweis. Sei $v \in V_\lambda$. Sind dann $T \in \mathcal{L}_\alpha$ und $X \in \mathcal{H}$, dann gilt

$$\begin{aligned} X.(T.v) &= (X.T.v - T.X.v) + T.X.v \\ &= [X,T].v + \lambda(X)T.v \\ &= \alpha(X)T.v + \lambda(X)T.v = (\alpha+\lambda)(X)T.v. \end{aligned}$$

Daher liegt $T.v$ in $V_{\alpha+\lambda}$. □

Definition 4.1.3. Wir waehlen eine Basis $\Delta \subset \Phi$ und entsprechende Menge Φ^+ positiver Wurzeln. Ein Gewicht λ heisst **Hoechstgewicht**, falls $\lambda + \alpha$ kein Gewicht von V ist, falls $\alpha > 0$. In diesem Fall heisst jedes $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ ein **Hoechstgewichtsvektor**.

Da fuer $\dim V < \infty$ die Menge der Gewichte endlich ist, gibt es immer ein Hoechstgewicht.

Ist V endlich-dimensional und irreduzibel, dann wird V als $\mathcal{L}$-Modul von jedem Vektor $\neq 0$ erzeugt, also insbesondere auch von jedem Hoechstgewichtsvektor.

Definition 4.1.4. Ein $\mathcal{L}$-Modul $V \neq 0$, endlich-dimensional oder nicht, heisst **standard-zyklisch**, falls V von einem Hoechstgewichtsvektor erzeugt wird.

In der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathcal{L}$ waehle in jedem $\mathcal{L}_\alpha$, $\alpha > 0$ einen Vektor $X_\alpha \neq 0$. Sei dann $Y_\alpha \in \mathcal{L}_{-\alpha}$ der $\mathfrak{sl}_2$-Partner dazu.

Satz 4.1.5. *Sei V ein standard zyklischer $\mathcal{L}$-Modul, erzeugt von einem Hoechstgewichtsvektor $v^+ \in V_\lambda$. Sei $\Phi^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$.*

(a) *V wird von den Vektoren $Y_{\beta_1}^{i_1} \cdots Y_{\beta_m}^{i_m} v^+$, $i_k \geq 0$ aufgespannt. Insbesondere ist V die direkte Summe seiner Gewichtsraeume.*

(b) *Alle Gewichte von V sind von der Form $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$, $k_i \geq 0$, wobei $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.*

(c) *Fuer jedes $\mu \in \mathcal{H}^*$ ist $\dim V_\mu < \infty$ und $\dim V_\lambda = 1$.*

(d) *Jeder Untermodul von V ist die direkte Summe seiner Gewichtsraeume.*

(e) *V ist ein unzerlegbarer $\mathcal{L}$-Modul mit einem eindeutig bestimmten maximalen Untermodul und einem eindeutig bestimmten irreduziblen Quotienten.*

(f) *Jedes Bild $\neq 0$ von V unter einem Modulhomomorphismus ist wieder standard zyklisch von Hoechstgewicht λ.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \mathfrak{n}^- \oplus \mathcal{H} \oplus \mathfrak{n}^+\\ &= \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{b},\end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{n}^+ = \oplus_{\alpha>0}\mathcal{L}_\alpha$, $\mathfrak{n}^- = \oplus_{\alpha<0}\mathcal{L}_\alpha$ und $\mathfrak{b} = \mathcal{H} \oplus \mathfrak{n}^+$. Nach dem Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem folgt $V = U(\mathcal{L})v^+ = U(\mathfrak{n}^-)v^+$. Wieder nach PBW, diesmal auf die Lie-Algebra $\mathfrak{n}^-$ angewendet, folgt (a).

Es folgt auch sofort (b), allerdings mit den β_j statt der α_j. Aber jedes β_j ist eine $\mathbb{Z}_+$-Linearkombination von Elementen aus Δ, so dass auch (b) folgt.

Da es nur endlich viele $i \in \mathbb{N}_0^m$ gibt, so dass $\sum_{j=1}^m i_j\beta_j$ gleich einem gegebenen $\sum_{j=1}^n k_j\alpha_j$ ist, folgt (c).

Fuer (d) sei W ein Untermodul und schreibe $w \in W$ als Summe von Vektoren $v_j \in V_{\mu_j}$ mit verschiednen Gewichten μ_j. Wir muessen zeigen, dass die v_{μ_j} alle in W liegen. **Falls nicht,** koennen wir ein $w \in W$ finden mit $w = v_1 + \cdots + v_n$ mit minimalem $n > 1$, so dass keine Teilsumme $\neq 0$ in W liegt. Insbesondere liegt keiner der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ in W. Sei dann $X \in \mathcal{H}$ mit $\mu_1(X) \neq \mu_2(X)$. Dann liegt $X.w = \sum_j \mu_j(X)v_j$ in W und ebenso $(X - \mu_1(X))v = (\mu_2(X) - \mu_1(X))v_2 + \cdots + (\mu_n(X) - \mu_1(X))v_n \neq 0$. Da $n > 1$ minimal war, folgt $v_2 \in W$, **Widerspruch!**

(e) Sei $V = U \oplus W$. Da jeder Untermodul die direkte Summe seine Gewichtsraeume ist und V_λ eindimensional, muss einer der beiden, also sagen wir U den Raum V_λ enthalten. Dann ist aber $U = V$ und $W = 0$.

Sei U die Summe aller Untermoduln W, die V_λ nicht enthalten. Dann ist U der groesste Untermodul, der V_λ nicht enthaelt und gleichzeitig ist U der einzige maximale Untermodul.

Die Aussage (f) ist klar. □

Korollar 4.1.6. *Sei $\phi : V \to W$ ein Modulhomomorphismus zwischen standard-zyklischen Moduln. Ist ϕ surjektiv, dann sind die Hoechstgewichte von V und W gleich.*

Beweis. Folgt sofort aus Teil (f) des Satzes. □

4.2 Standard-Moduln: Existenz und Eindeutigkeit

Satz 4.2.1. *Seien V und W standard-zyklische Moduln vom Hoechstgewicht λ. Sind beide irreduzibel, dann sind sie isomorph.*

Beweis. Betrachte den $\mathcal{L}$-Modul $M = V \oplus W$. Sind v^+ und w^+ Hoechstgewichtsvektoren vom Gewicht λ in V bzw. W, dann ist $m^+ = v^+ + w^+$ ein Hoechstgewichtsvektor vom Gewicht λ in M. Sei N der Untermodul erzeugt von m^+, dann ist N wieder standard-zyklisch. Seien $p : M \to V$ und $q : M \to W$ die Projektionen. Klar ist, dass p und q surjektiv sind. Damit sind V und W irreduzible Quotienten eines standard-zyklischen Moduls und damit nach Satz 4.1.5 Teil (e) isomorph. □

Satz 4.2.2. *Sei $\lambda \in \mathcal{H}^*$, dann existiert ein standard-zyklischer Modul vom Hoechstgewicht λ.*

Genauer gibt es sogar einen groessten $V_{\max}[\lambda]$, der die Eigenschaft hat, dass jeder standard-zyklische Modul vom Hoechstgewicht λ ein Quotient von $V_{\max}[\lambda]$ ist.

Beweis. Wir erzwingen die Eigenschaften indem wir genau die notwendigen Relationen aus $U(\mathcal{L})$ herausteilen: Sei L das Linksideal von $U(\mathcal{L})$ erzeugt von

- allen $\mathcal{L}_\alpha$ mit $\alpha > 0$ und
- allen $X - \lambda(X)$ mit $X \in \mathcal{H}$.

Setze
$$V_{\max}[\lambda] := U(\mathcal{L})/L.$$

Der Vektor $1 + L$ ist erzeugend vom Gewicht λ und wird von allen $\mathcal{L}_\alpha$ mit $\alpha > 0$ annulliert. Damit ist $V_{\max}[\lambda]$ standard-zyklisch. Ist W irgendein standard-zyklischer Modul mit Hoechstgewicht λ und erzeugendem Vektor $w^+ \in W_\lambda$, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : V_{\max}[\lambda] &\to W, \\ f + L &\mapsto f.w^+ \end{aligned}$$

ein Modulhomomorphismus (der entscheidende Punkt ist die Wohldefiniertheit), in dessen Bild der erzeugende Vektor w^+ liegt, der also surjektiv ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $V_{\max}[\lambda]$ nicht Null ist, oder $L \neq U(\mathcal{L})$. dies ergibt sich aus dem PBW-Theorem, denn mit $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha>0} \mathcal{L}_\alpha$ und $\overline{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\alpha<0} \mathcal{L}_\alpha$ ist $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathfrak{n}$. Damit ist nach PBW: $U(\mathcal{L}) = U(\overline{\mathfrak{n}})U(\mathcal{H})U(\mathfrak{n})$ und $\overline{\mathfrak{n}}U(\overline{\mathfrak{n}}) \cap L = 0$. □

Zusammengefasst haben wir eine Bijektion:

$$\left\{\text{maximale standard-zyklische Moduln}\right\} \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{H}^*$$

Ist M ein endlich-dimensionaler irreduzibler Modul, dann ist M standard-zyklisch, also Quotient eines maximalen standard-zyklischen. Wir werden zeigen, dass dieser eindeutig bestimmt ist. Allerdings hat nicht jeder standard-zyklische einen endlich-dimensionalen Quotienten. Wir werden die Gewichte, die dies zulassen charakterisieren und damit eine Methode geben, die endlich-dimensionalen irreduziblen Moduln zu klassifizieren.

Definition 4.2.3. Sei $\lambda \in \mathcal{H}^*$. Dann existiert nach Satz 4.1.5 genau ein irreduzibler Modul $V(\lambda)$ von $V_{\max}[\lambda]$. Da jeder standard-zyklische Modul mit Hoechstgewicht λ ein Quotient von $V_{\max}[\lambda]$ ist, ist $V(\lambda)$ der gemeinsame irreduzible Quotient aller standard-zyklischen Moduln vom Hoechstgewicht λ. Anders gesagt, ist $V(\lambda)$ der eindeutig bestimmte irreduzible standard-zyklische Modul zum Hoechstgewicht λ.

4.3 Endlich-dimensionale Moduln

Satz 4.3.1. *Ist V ein endlich-dimensionaler irreduzibler $\mathcal{L}$-Modul mit Hoechstgewicht λ, dann ist $\lambda(H_\alpha)$ eine ganze Zahl ≥ 0, falls $\alpha \in \Delta$ und $H_\alpha \in \mathcal{H}$ mit $\alpha(X) = b(X, H_\alpha)$.*

Beweis. Sei $\alpha \in \Delta$ und sei $S_\alpha \subset \mathcal{L}$ die entsprechende Kopie von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ in $\mathcal{L}$. Jeder maximale Vektor fuer $\mathcal{L}$ ist dann ein maximaler Vektor fuer S_α. Nach Satz 2.5.4 folgt die Behauptung. □

Definition 4.3.2. Wir nennen ein Gewicht $\lambda \in \mathcal{H}^*$ **ganzzahliges Gewicht**, wenn $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ fuer jede Wurzel α. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ fuer jedes $\alpha \in \Delta$ gilt.

Die Menge Λ der ganzzahligen Gewichte ist ein **Gitter** in $\mathcal{H}^*$, d.h. eine endlich-erzeugte additive Untergruppe, die den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{H}^*$ aufspannt.

Definition 4.3.3. Wir nennen ein Gewicht $\lambda \in \mathcal{H}^*$ ein **dominantes Gewicht**, wenn $\lambda(H_\alpha) \geq 0$ falls $\alpha > 0$. Dies ist genau dann der Fall wenn $\lambda(H_\alpha) \geq 0$ fuer jedes $\alpha \in \Delta$ gilt.

Sei Λ^+ die Menge aller ganzzahligen dominanten Gewichte. Das ist ein positiver Kegel geschnitten mit einem Gitter.

Satz 4.3.4. *Ist $\lambda \in \Lambda^+$ ein dominantes ganzzahliges Gewicht. Dann ist der irreduzible Modul $V(\lambda)$ mit Hoechstgewicht λ endlich-dimensional. Die Weyl-Gruppe $\mathcal{W}$ permutiert die in $V(\lambda)$ auftretenden Gewichte. Die Abbildung $\lambda \mapsto V(\lambda)$ ist eine Bijektion*

$$\Lambda^+ \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{Isomorphieklassen} \\ \textit{endlich-dimensionaler} \\ \textit{irreduzibler} \\ \mathfrak{g} - \textit{Moduln} \end{array} \right\}$$

Lemma 4.3.5. *Seien $(X_j, Y_j)_j$ Standard-Erzeuger von $\mathcal{L}$ und sei $H_j = [X_j, Y_j]$ Sei $k \in \mathbb{N}_0$. In der Universell-Einhuellenden $U(\mathcal{L})$ gilt*

(a) $[X_j, Y_i^{k+1}] = 0$, *falls* $i \neq j$,

(b) $[H_j, Y_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(H_j)Y_i^{k+1}$,

(c) $[X_i, Y_i^{k+1}] = -(k+1)\, Y_i^k\, (k \cdot 1 - H_i)$.

Beweis. (a) folgt, da $\alpha_i - \alpha_j$ keine Wurzel ist.

(b) Induktion nach k: Der Fall $k = 0$ ist nach Definition von I_i richtig. Fuer $k \to k+1$ rechne

$$\begin{aligned} [H_j, Y_i^{k+2}] &= H_j Y_i^{k+2} - Y_i^{k+2} H_j \\ &= (H_j Y_i^{k+1} - Y_i^{k+1} H_j) Y_i + Y_i^{k+1}(H_j Y_i - Y_i H_j) \\ &= -(k+1)\alpha_i(H_j) Y_i^{k+2} - \alpha_i(H_j) Y^{k+2} = -(k+2)\alpha_i(H_j) Y_i^{k+2}. \end{aligned}$$

(c) Ist klar fuer $k = 0$. Fuer $k \to k+1$ schreibe unter Benutzung von (b):

$$\begin{aligned}
[X_i, Y_i^{k+2}] &= X_i Y_i^{k+2} - Y_i^{k+2} X_i \\
&= (X_i Y_i - Y_i X_i) Y_i^{k+1} + Y_i (X_i Y_i^{k+1} - Y_i^{k+1} X_i) \\
&= H_i Y_i^{k+1} + Y_i (-(k+1)\, Y_i^k\, (k \cdot 1 - H_i) \\
&= H_i Y_i^{k+1} - (k+1) Y_i^{k+1}\, (k \cdot 1 - H_i) \\
&= [H_i, Y_i^{k+1}] + Y_i^{k+1} H_i - (k+1) Y_i^{k+1}\, (k \cdot 1 - H_i) \\
&= -(k+1) 2 Y_i^{k+1} + Y_i^{k+1} H_i - (k+1) Y_i^{k+1}\, (k \cdot 1 - H_i) \\
&= (-2(k+1) - (k+1)k) Y_i^{k+1} + (k+2) Y_i^{k+1} H_i \\
&= -(k+2) Y_i^{k+1} ((k+1) \cdot 1 - H_i).
\end{aligned}$$

□

Beweis. [Beweis des Satzes] Wir zeigen, dass $\mathcal{W}$ die Gewichte von $V(\lambda)$ permutiert. Dann koennen es nur endlich viele sein. Wir schreiben $\phi : \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(V)$ fuer die Darstellung von $\mathcal{L}$ auf $V = V(\lambda)$. Sei v^+ ein Gewichtsvektor vom Gewicht λ und setze $m_i = \lambda(H_i)$ fuer alle i. Nach unserer Annahme ist $m_i \in \mathbb{N}_0$.

(1) *Es gilt* $y_i^{m_1+1}.v^+ = 0$: Sei $w_i = Y_i^{m_1+1}.v^+$. Nach Teil (a) des Lemmas gilt $X_j w_i = 0$ falls $i \neq j$. Aus (b) und (c) des Lemmas folgt
$X_i Y_i^{m_i+1}.v^+ = Y_i^{m_1+1} X_i v^+ - (m_i+1) Y_i^{m_i}.(m_i v^+ - m_i v^+) = 0$, also $X_i w_i = 0$. Waere w_i ungleich Null, so waere w_i ein maximaler Gewichtsvektor in V vom Gewicht $\lambda - (m_1+1)\alpha_i \neq \lambda$, was der Eideutigkeit des Hoechstgewichtes widerspricht.

(2) *Sei S_i die Unteralgebra erzeugt von X_i, Y_i, isomorph zu $\mathfrak{sl}_2$. Dann enthaelt V einen endlich-dimensionalen S_i-Modul*: Der Raum aufgespannt von $v^+, Y_i.v^+, Y_i^2.v^+, \dots, Y_i^{m_i} v^+$ ist stabil unter Y_i. Er ist ebenfalls stabil unter H_i, da jeder Vektor zu einem Gewichtsraum gehoert, also ist er nach Teil (c) des Lemmas unter X_i stabil.

(3) *Fuer gegebenes i ist V die Summe endlich-dimensionaler S_i Moduln*: Sei V' die Summe aller endlich-dimensionalen S_i-Untermoduln, dann ist $V' \neq 0$ nach (2). Sei andererseits W irgendein endlich-dimensionaler S_i-Untermodul von V. Der Span aller Raeume $X_\alpha W$, $\alpha \in \Phi$, ist endlich-dimensional und S_i-stabil. Daher ist V' stabil unter $\mathcal{L}$ und daher $V' = V$ wegen Irreduzibilitaet.

(4) *Fuer jedes i sind $\phi(X_i)$ und $\phi(Y_i$ lokal-nilotent, d.h. fuer jedes $v \in V$ gibt es ein n mit* $\phi(X_i)^n v = 0 = \phi(Y_i)^n$: Dies ist klar, da jedes v in einer ednlichen Summe von endlich-dimensionalen S_i-Moduln liegt.

(5) $s_i = \exp(\phi(X_i)) \exp(\phi(-Y_i)) \exp(\phi(X_1))$ *ist ein Wohldefinierter linearer Automorphismus von V*: Klar.

(6) *Ist μ ein Gewicht von V, dann ist $s_i(V_\mu) = V_{\sigma_i \mu}$, wobei σ_i die zu α_i gehoerige Spiegelung*

ist: V_μ liegt in einem endlich-dimensionalen S_i-Modul. Daher folgt die Behauptung aus der Diskussion der $\mathfrak{sl}_2$-Darstellungen.

(7) *Die Menge* $\Pi(\lambda)$ *der Gewichte von* $V(\lambda)$ *ist stabil unter* $\mathcal{W}$ *und* $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$ *fuer* $u \in \Pi(\lambda)$ *und* $\sigma \in \mathcal{W}$: Folgt aus (6).

Da jeder Gewichtsraum endlich-diemnsional ist, ist $V(\lambda)$ endlich-dimensional. $\square$