Garben	Blatt **3**
Sommer 2025	
Professor Deitmar	Ausgabe: 30.4.2025

1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Zeige, dass jede natuerliche Transformation $\mathrm{Hom}(B,-) \to \mathrm{Hom}(A,-)$ von der Gestalt $\alpha \mapsto \alpha \circ f$ fuer einen Pfeil $f : A \to B$ ist.

   (Hinweis: Betrachte das Bild der Identitaet unter der Abbildung $\mathrm{Hom}(B,B) \to \mathrm{Hom}(A,B)$.)

2. Die letzte Aufgabe kann so interpretiert werden, dass der Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{SET})$, $A \mapsto \mathrm{Hom}(A,-)$ voll ist. Ist er auch treu?

3. Sei $\mathcal{B}$ eine Kategorie und sei

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ B \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

   ein kartesiches Quadrat in $\mathcal{B}$. Zeige:

   - Ist f mono, dann ist auch f' mono.
   - Falls $\mathcal{B}$ genug Projektive hat und f Epi ist, dann ist auch f' ein Epi.

4. Sei $\mathcal{C}$ eine punktierte Kategorie, in der Kerne und Cokerne existieren. Zeige: Wenn $\mathcal{C}$ genug Injektive hat, dann hat die natuerliche Abbildung $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ trivialen Kern und falls $\mathcal{C}$ genug Injektive hat, dann hat diese Abbildung trivialen Cokern.

Garben	Blatt **2**
Sommer 2025	
Professor Deitmar	Ausgabe: 23.4.2025

1. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Zeige, dass jeder Funktor, der isomorph zu F ist, ebenfalls eine Äquivalenz von Kategorien ist.

2. Für eine Menge X sei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge. Setze $X \mapsto \mathcal{P}(X)$ auf zwei Arten (kovariant und kontravariant) zu einem Funktor SET→SET fort.

3. Sei MAT die folgende Kategorie: Objekte sind die natürlichen Zahlen und Null, Morphismen von n nach m sind die $m \times n$ Matrizen, Komposition ist durch Matrixmultiplikation gegeben.

   Zeige, dass MAT zur Kategorie der endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathrm{VEKT}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R})$ äquivalent ist.

4. Sei $\mathcal{F} : C \to \mathrm{SET}$ ein Funktor. Seien $X \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{H}^X = \mathrm{Hom}(X, \cdot) : C \to \mathrm{SET}$ der von X dargestellte Funktor. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathrm{Hom}(\mathcal{H}^X, \mathcal{F}) &\to \mathcal{F}(X), \\ \eta &\mapsto \eta_X(\mathbf{1}_X) \end{aligned}$$

   eine Bijektion ist.

Garben	Blatt **1**
Sommer 2025	
Professor Deitmar	Ausgabe: 16.4.2025

1. Untersuche ob die Kategorien RING, FIELD, TOP, TOP_*, GRP initiale oder terminale Objekte haben und beschreibe diese.

2. Zeige, dass jeder Ringhomomorphismus $f : R \to \mathbb{Q}$ mit $f(1) = 1$ ein Epi in der Kategorie RING ist.

3. Zeige, dass ein Gruppenhomomorphismus genau dann ein Epi in GRP ist, wenn er surjektiv ist.

4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem initialen Objekt I und einem terminalen Objekt T. Nimm an, dass $\mathrm{Hom}(T, I) \neq \emptyset$. Zeige, dass $T \cong I$.