**Kohomologie und Garben**
**Anton Deitmar, Sommer 2025**

# Contents


**1 Kategorien und Funktoren** **1**

1.1 Kategorien . . . . . 1

1.2 Funktoren und Transformationen . . . . . 5

1.3 Limiten . . . . . 12

1.4 Colimiten . . . . . 16

1.5 Additive und Abelsche Kategorien . . . . . 20

# 1 Kategorien und Funktoren

## 1.1 Kategorien

**Definition 1.1.1.** Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten:

(a) eine nichtleere Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von "Objekten",

(b) für je zwei $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von "Morphismen" oder "Pfeile",

(c) für jedes Objekt $X$ einen Pfeil $\mathbf{1}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$,

(d) eine Kompositionsabbildung $\circ : \mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$,

so dass $\circ$ assoziativ ist und für jedes $\alpha : X \to Y$ gilt

$$\alpha = \mathbf{1}_Y \circ \alpha = \alpha \circ \mathbf{1}_X.$$

Das Symbol $\circ$ wird oft ausgelassen, man schreibt also

$$\alpha = \mathbf{1}_Y \alpha = \alpha \mathbf{1}_X.$$

**Definition 1.1.2.** Für jedes Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es die **duale Kategorie** $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ mit denselben Objekten, aber umgedrehten Pfeilen, also

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heisst **kleine Kategorie**, falls $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge ist.

**Beispiele 1.1.3.** (a) Die Kategorie der Mengen und Abbildungen SET, die Kategorie der Gruppen und Gruppenhomomorphismen GRP, die Unterkategorie der abelschen Gruppen AB, die Kategorie der kommutativen Ringe mit Eins, RING und die Kategorie $\mathrm{Mod}(R)$ von Modulen eines kommutativen Rings $R$ mit Eins sind Kategorien, die oft auftreten.

(b) Eine **triviale Kategorie** ist eine Kategorie $\mathcal{C}$, deren einzige Pfeile die Identitäten $\mathbf{1}_X$, $X \in \mathcal{C}$ sind.

(c) Eine Gruppe $G$ kann als eine Kategorie mit nur einem Objekt betrachtet werden. Die Elemente der Gruppe sind die Pfeile dieser Kategorie.

**Definition 1.1.4.** Ein Morphismus $f : X \to Y$ heisst **Monorphismus** oder **mono**, falls stets aus $f\alpha = f\beta$ folgt $\alpha = \beta$. Er heisst **epi**, wenn er mono in $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ ist, was soviel heisst

wie

$$\gamma f = \tau f \quad \Rightarrow \quad \gamma = \tau.$$

**Definition 1.1.5.** Ein Pfeil $f : X \to Y$ heisst **Isomorphismus**, falls es ein $g : Y \to X$ gibt mit $fg = \mathbf{1}_Y$ und $gf = \mathbf{1}_X$.

**Definition 1.1.6.** Ein **Gruppoid** ist eine Kategorie, in der alle Pfeile Isomorphismen sind.

**Beispiele 1.1.7.** (a) Ist $\mathcal{C}$ ein Gruppoid und $X \in \mathcal{C}$, dann ist $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ eine Gruppe. Ein Gruppoid mit nur einem Objekt ist ein Gruppe.

(b) Für einen topologischen Raum $X$ definieren wir das **Fundamentalgruppoid** $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ wie folgt: Objekte sind die Punkte von $X$ und Morphismen sind die Homotopieklassen (mit festen Enden) von Wegen in $X$. Die Komposition ist durch die Hintereinanderausführung von Wegen gegeben. Für jedes $x_0 \in X$ ist die Gruppe

$$\mathrm{Hom}(x_0, x_0) = \pi_1(X, x_0)$$

die Fundamentalgruppe im Basispunkt $x_0$.

**Definition 1.1.8.** Ein Objekt $T$ einer Kategorie $\mathcal{A}$ heisst **terminales Objekt**, falls für jedes Objekt $X \in \mathcal{A}$ es genau einen Pfeil $X \to T$ gibt. Es gilt dann also

$$|\mathrm{Hom}(X, T)| = 1$$

für jedes $X$.

Dual heisst ein Objekt $I$ ein **initiales Objekt**, falls es terminal in $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}}$ ist, wenn also für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt $|\mathrm{Hom}(I, A)| = 1$.

**Lemma 1.1.9.** *Ein terminales Objekt ist eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie (falls es existiert). Dasselbe gilt für initiale Objekte.*

*Beweis.* Seien $S, T$ beide terminal. Seien dann $\alpha : S \to T$ und $\beta : T \to S$ die eindeutig bestimmten Pfeile. Dann ist $\alpha\beta$ der eindeutige Pfeil $T \to T$. Andererseits ist $\mathbf{1}_T$ ebenfalls ein Pfeil $T \to T$, es folgt also $\alpha\beta = 1_T$. Ebenso folgt $\beta\alpha = \mathbf{1}_S$. □

**Bemerkung 1.1.10.** Nach diesem Lemma können wir Eindeutigkeit aus universellen Eigenschaften folgern, denn universelle Eigenschaften bedeuten immer Terminalität in einer geeigneten Kategorie. Wir zeigen das am Beispiel des Produktes: Das **Produkt** zweier Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ ist das eindeutig bestimmte Objekt $X \times Y$ zusammen mit zwei Pfeilen $X \times Y \to X$ und $X \times Y \to Y$, so dass für jedes $Z$ mit Pfeilen $Z \to X$,

$Z \to Y$ es genau einen Pfeil $Z \to X \times Y$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X & & Y \\
 & Z \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu, dotted, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Falls es existiert ist das Produkt eindeutig bestimmt. Um dies einzusehen, betrachte die Kategorie $\mathcal{P}(X, Y)$, deren Objekte die Tripel $(A, p_X, p_Y)$ sind, wobei $p_X : A \to X$ und $p_Y : A \to Y$ Pfeile in $\mathcal{C}$ sind. Morphismen $f : (A, p_X, p_Y) \to (B, q_X, q_Y)$ sind alle Morphismen in $\mathcal{C}$ mit die Eigenschaft

$$p_X = q_X f \quad \text{und} \quad p_Y = q_Y f.$$

Die Universaltität von $X \times Y$ ist äquivalent dazu, dass $X \times Y$ ein terminales Objekt in $\mathcal{P}(X, Y)$ ist.

**Beispiele 1.1.11.** (a) In SET ist die leere Menge initial und jede Einpunktmenge terminal.

(b) In GRP ist die triviale Gruppe initial und terminal.

(c) In RING ist der Ring $\mathbb{Z}$ initial und der Nullring ist terminal.

**Definition 1.1.12.** Eine Kategorie $\mathcal{A}$, mit einem Objekt $X_0$, welches sowohl initial als auch terminal ist, heisst eine **punktierte Kategorie**. Das terminale und initiale Objekt heisst **Nullobjekt** oder einfach **Null**. Für zwei Objekte $X, Y$ existiert dann jeweils genau ein Pfeil $0 : X \to Y$, der über das Nullobjekt faktorisiert. Es gilt

$$0f = 0 \quad \text{und} \quad f0 = 0.$$

* * *

**Definition 1.1.13.** Ein Objekt $P$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heisst **projektives Objekt**, falls für jeden epi $A \twoheadrightarrow B$ und jeden Pfeil $P \to B$ es einen Pfeil $P \to A$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads] & B \\
 & P \arrow[u] \arrow[ul, dotted, "\exists"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Das bedeutet, dass jeder Pfeil von $P$ entlang einer Surjektion geliftet werden kann.

Anders gesagt, falls für jeden Epi $A \twoheadrightarrow B$ die Kompositionsabbildung

$$\mathrm{Hom}(P, A) \;\to\; \mathrm{Hom}(P, B)$$

surjektiv ist.

**Beispiele 1.1.14.**

- In der Kategorie der Mengen ist jedes Objekt projektiv.
- Sei $R$ ein Ring. In der Kategorie $\mathrm{Mod}(R)$ sind alle freien Moduln projektiv.

**Definition 1.1.15.** An Objekt $I$ von $\mathcal{C}$ heisst **injektives Objekt**, falls es in $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ projektiv ist. Das bedeutet, dass für jeden Mono $A \hookrightarrow B$ und jeden Pfeil $A \to I$ es einen Pfeil $B \to I$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d] & B \arrow[dl, dotted, "\exists"] \\ I & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Als ist $I$ genau dann injektiv, wenn für jeden mono $A \hookrightarrow B$ die induzierte Abbildung

$$\mathrm{Hom}(B, I) \;\to\; \mathrm{Hom}(A, I)$$

surjektiv ist.

**Beispiele 1.1.16.**

- In der Kategorie der Mengen ist jede nichtleere Menge injektiv.
- In der Kategorie der abelschen Gruppen ist ein Objekt $(A, +)$ genau dann injektiv, falls $A$ **divisibel** ist. Hierbei heisst eine kommutative Gruppe $(A, +)$ **divisible**, falls für jedes $a \in A$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $b \in A$ existiert mit $a = nb$.

**Definition 1.1.17.** Wir sagen: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ hat **genug Injektive**, falls für jedes Objekt $X$ es einen Mono $X \hookrightarrow I$ in ein injektives Objekt $I$ gibt. Die Kategorie hat **genug projektive**, falls $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}}$ genug injektive hat, also falls es für jedes Objekt $X$ einen Epi $P \twoheadrightarrow X$ von einem projektiven $P$ gibt.

**Beispiel 1.1.18.** Die Kategorie $\mathrm{Mod}(R)$ hat genug projektive, da jedes Modul Bild eines freien Moduls ist.

**Proposition 1.1.19.** *Die Kategorie* AB *der abelschen Gruppen hat genug Injektive.*

*Beweis.* Sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe. Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Einbettungen $\phi : U \subset D$, wobei $U$ eine Untergruppe und $D$ eine divisible Gruppe ist. Die Menge $\mathcal{S}$ ist geordnet durch $\phi \leq \psi$, falls $\psi$ eine Fortsetzung von $\phi$ ist. Zorns Lemma liefert uns ein maximales Element $\phi : U \to D$. Wir behaupten, dass $U = A$. Nimm an, dies ist nicht der Fall, es gibt also ein $a \in A \setminus U$.

1.Case: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na \in U$. Wähle $n$ minimal mit dieser Eigenschaft und wähle ein $d \in D$ mit $nd = \phi(a)$. Dann kann $\phi$ fortgesetzt werden auf die Gruppe $\langle U, a\rangle$ durch $\phi(a) = d$.

2. Fall: Es gibt kein solches $n$. Dann kann $\phi$ nach $\langle U, a\rangle \to D \oplus \mathbb{Q}$ fortgesetzt werden, indem man $\phi(a) = 1 \in \mathbb{Q}$ setzt. □

* * *

## 1.2 Funktoren und Transformationen

**Definition 1.2.1.** Ein **Funktor** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei Kategorien ordnet jedem Objekt $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt $F(A) \in \mathcal{B}$ und jedem Pfeil $f : A \to B$ einen Pfeil $F(f) : F(A) \to F(B)$ zu, so dass gilt $F(fg) = F(f)F(g)$ und $F(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{F(A)}$.

**Beispiele 1.2.2.** (a) Wichtige Beispiele sind die **Vergiss-Funktoren** GRP $\to$ SET, AB $\to$ SET, RING $\to$ SET, etc, die in jedem Fall die jeweile algebraische Struktur vergessen und auf die jeweilige Menge abbilden.

(b) Sind $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ Gruppen, dann ist ein Funktor $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ dasselbe wie ein Gruppenhomomorphismus.

**Definition 1.2.3.** Ein Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ wird auch **kontravarianter Funktor** von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ genannt. Ein kontravarianter Funktor dreht Pfeile um.

**Beispiele 1.2.4.** (a) Sei $K$ ein Körper und VEKT($K$) die Kategorie aller $K$-Vektorräume und linearen Abbildungen. Der **Dualisierungsfunktor** $V \mapsto V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ ist ein kontravarianter Funktor VEKT($K$) $\to$ VEKT($K$).

(b) Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Dann sind

$$\mathrm{Hom}(A, -) : X \mapsto \mathrm{Hom}(A, X) \qquad \mathrm{Hom}(-, A) : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, A)$$

Funktoren, der erste ko- der zweite kontravariant. Morphismen werden auf die Verkettung abgebildet, also für $f : X \to Y$ ist

$$\mathrm{Hom}(A, -)(f) : \mathrm{Hom}(A, X) \to \mathrm{Hom}(A, Y), \qquad \alpha \mapsto f \circ \alpha.$$

Und ebenso $\mathrm{Hom}(-, A)(f)(\alpha) = \alpha \circ f$.

**Definition 1.2.5.** Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist ein **Isomorphismus von Kategorien**, falls es einen Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gibt, so dass

$$FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad GF = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}.$$

**Definition 1.2.6.** Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heisst **treu**, falls für je zwei $X, Y \in \mathcal{A}$ die Abbildung

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$$

injektiv ist.

Der Funktor $F$ heisst **voll**, falls für je zwei $X, Y \in \mathcal{A}$ die Abbildung

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$$

surjektiv ist.

Der Funktor heisst **volltreu**, wenn er beides ist, voll und treu.

**Beispiel 1.2.7.** Die Vergissfunktor AB $\to$ SET ist treu, aber nicht voll.

Aus den Definitionen folgt, dass ein Funktor genau dann ein Isomorphismus ist, wenn er volltreu ist und eine Bijektion auf den Objektklassen.

**Definition 1.2.8.** Seien $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $t : F \to G$ oder einfach **Transformation** ist eine Familie $(t_X)_{X \in \mathcal{A}}$ von Morphismen

$$t_X : F(X) \to G(X),$$

so dass für jeden Pfeil $f : X \to Y$ in $\mathcal{A}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "t_X"'] & F(Y) \arrow[d, "t_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Transformationen $t : F \to G$ und $s : G \to H$ können hintereinander ausgeführt werden, was man als $st : F \to H$ schreibt. Eine natürliche Transformation

$t : F \to G$ heisst **natürlicher Isomorphismus** oder **Isomorphismus von Funktoren**, falls es eine Transformation $s : G \to F$ gibt, so dass $st = \mathrm{Id}_F$ und $ts = \mathrm{Id}_G$. Ist $t$ ein Isomorphismus, dann ist jeder Pfeil $t_X : F(X) \to G(X)$ ein Isomorphismus.

**Beispiele 1.2.9.** (a) Jede Gruppe $G$ ist natürlich isomorph zu ihrer dualen Gruppe $G^{\mathrm{opp}}$, indem man $x \in G$ auf $x^{-1}$ abbildet.

(b) Seien $\phi, \psi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismen. Eine Transformation $T : \phi \to \psi$ ist dann dasselbe wie ein Element $t \in H$ mit der Eigenschaft, dass

$$t\phi(x)t^{-1} = \psi(x)$$

für jedes $x \in G$.

(c) Sei $K$ ein Körper und sei $F : \mathrm{VEKT}(K) \to \mathrm{VEKT}(K)$ der Funktor, der einen Vektorraum $V$ auf seinen Bidualraum $F(V) = V^{**}$ wirft. Die Abbildung

$$\begin{aligned} t_V : V &\to V^{**} \\ v &\mapsto \delta_v, \end{aligned}$$

mit $\delta_v(\alpha) = \alpha(v)$ definiert eine Transformation $t : \mathrm{Id} \to F$.

**Definition 1.2.10.** Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heisst eine **Äquivalenz von Kategorien**, falls es einen Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gibt, so dass

$$FG \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad GF \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}.$$

In dem Fall heisst $G$ ein **Quasi-Inverser** Funktor zu $F$.

Jede Isomorpohie von Kategorien ist eine Äquivalenz.

**Beispiel 1.2.11.** Sei $K$ ein Körper und sei $\mathcal{B}$ die Kategorie aller endlich-dimensionalen $K$-Vektorräume. Sei $K^{(\mathbb{N})}$ die Unterkategorie der Räume $0, K, K^2, \ldots$. Die Einbettung $K^{(\mathbb{N})} \to \mathcal{B}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.

**Definition 1.2.12.** Eine Unterkategorie $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ heisst **dicht**, falls jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ isomorph ist zu einem Objekt $A' \in \mathcal{A}'$.

Die Unterkategorie $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ heisst **voll**, falls der Einbettungsfuktor voll ist, d.h., falls

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

für alle $X, Y \in \mathcal{V}$ gilt.

**Satz 1.2.13.** (a) *Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien wenn er volltreu ist und dichtes Bild hat.*

(b) *Zwei Kategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind genau dann äquivalent, wenn es dichte Unterkategorien $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ und $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ gibt, die isomorph sind, d.h., es gilt $\mathcal{A}' \cong \mathcal{B}'$.*

*Beweis.* (a) Sei $F$ eine Äquivalenz von Kategorien mit quasi-inverser $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ und sei $t : \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \to GF$ die natürliche Isomorphie. Für je zwei $X, Y \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{GF} \mathrm{Hom}(GF(X), GF(Y)) \xrightarrow{t_Y^{-1} \circ \cdot \circ t_X} \mathrm{Hom}(X, Y)$$

gleich der Identität. Also ist $F$ treu. Da $t_Y^{-1}$ und $t_X$ Isomorphismen sind, folgt, dass $G$ voll ist. Wegen Symmetrie erhalten wir, dass $F$ ebenfalls voll ist. Sei $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \to FG$ die natürliche Isomorphie. Für $Z \in \mathcal{B}$ ist der Pfeil $s_Z : Z \to F(G(Z))$ ein Isomorphismus, also hat $F$ dichtes Bild.

Umgekehrt sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ volltreu mit dichtem Bild. Für jedes $Z \in \mathcal{B}$ wähle ein $X \in \mathcal{A}$ und einen Isomorphismus $\nu_Z : Z \xrightarrow{\cong} Z' = F(X)$, wobei wir annehmen, dass $Z' = Z$ und $\nu_Z = \mathrm{Id}_Z$, falls $Z$ bereits im Bild liegt. Setze $G(Z) = X$. Für $Z, W \in \mathcal{B}$ definiere $G : \mathrm{Hom}(Z, W) \to \mathrm{Hom}(G(Z), G(W))$ by

$$\mathrm{Hom}(Z, W) \xrightarrow{\nu_W \circ \cdot \circ \nu_Z^{-1}} \mathrm{Hom}(Z' = F(X), W' = F(Y)) \xrightarrow{F^{-1}} \mathrm{Hom}(X = G(Z), Y = G(W)).$$

Dann ist $G$ ein Funktor, ein Quasi-Inverser zu $F$.

(b) Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Äquivalenz mit Quasi-Inversem $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. In jeder Isomorphieklasse $[X]$ von Objekten in $\mathcal{A}$ wähle ein Objekt $X \in \mathrm{im}(G)$, welches nach (a) möglich ist. Sei $\mathcal{A}'$ die volle Unterkategorie dieser gewählten Objekte. Die Kategorie $\mathcal{A}'$ ist nach Konstruktion dicht in $\mathcal{A}$. Sei $\mathcal{B}' = F(\mathcal{A}')$. Wir behaupten, dass $\mathcal{B}'$ dicht liegt in $\mathcal{B}$ und dass $F|_{\mathcal{A}'}$ ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$ ist.

Sei $Y \in \mathcal{B}$. Dann gibt es ein $X \in \mathcal{A}$, so dass $F(X)$ isomorph zu $Y$ ist. Es gibt ein $X' \in \mathcal{A}'$, so dass $X \cong X'$ und da $F$ volltreu ist, erhalten wir $F(X') \cong F(X) \cong Y$.

Daher ist $\mathcal{B}'$ dicht in $\mathcal{B}$. Für die Isomorphie beachte, dass je zwei verschiedene Objekte $X, Y$ in $\mathcal{A}'$ nicht isomorph sind und damit $F(X) \ncong F(Y)$ gilt. Das bedeutet, dass $F$ eine Bijektion von $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}')$ nach $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}')$ ist. Der Funktor ist ausserdem bijektiv auf jeder Hom-Menge und hat daher einen Inversen.

Für die Umkehrung nimm an, dass $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$ existiere und dass ein Isomorphismus

$F' : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$ existiert. Für jedes $X \in \mathcal{A}$ fixiere einen Isomorphismus $\alpha_X : X \to X'$ für ein Objekt $X' \in \mathcal{A}'$, so dass im Fall dass $X \in \mathcal{A}'$ schon $X' = X$ und $\alpha_X = \mathrm{Id}_X$ gilt. Setze $F(X) = F'(X')$ für $X \in \mathcal{A}$ und für je zwei $X, Y \in \mathcal{A}$ und jedes $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ definiere

$$F(\tau) = F'(\alpha_Y \circ \tau \circ \alpha_X^{-1}).$$

Dann ist $F$ ein Funktor und dieselbe Konstruktion mit $F^{-1}$ liefert einen Quasi-Inversen $G$. □

**Lemma 1.2.14.** *Für einen gegebenen Pfeil $f : A \to B$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ induzieren die Kompositionen $\alpha \mapsto \alpha \circ f$ und $\beta \mapsto f \circ \beta$ Transformationen von Funktoren*

$$\mathrm{Hom}(B, -) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A, -), \qquad \mathrm{Hom}(-, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(-, B).$$

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass für jeden Morphismus $\alpha : X \to Y$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(B, X) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & \mathrm{Hom}(A, X) \arrow[d, "\alpha_*"] \\ \mathrm{Hom}(B, Y) \arrow[r, "f^*"'] & \mathrm{Hom}(A, Y) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei also $\gamma : B \to X$. Dann gilt

$$\alpha_*(f^*(\gamma)) = \alpha \circ (\gamma \circ f) = (\alpha \circ \gamma) \circ f = (\alpha_*(\gamma)) \circ f = f^*(\alpha_*(\gamma)).$$ □

**Definition 1.2.15.** Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ eine volle Unterkategorie. Sei $B \in \mathcal{B}$ und sei $f : B \to A \in \mathcal{A}$ an Pfeil in $\mathcal{B}$. Wir sagen, dass $f$ das Objekt $B$ in $\mathcal{A}$ **darstellt**, falls die Komposition mit $f$ ein Isomorphismus von Funktoren $\mathcal{A} \to \mathrm{SET}$,

$$\mathrm{Hom}(A, -) \cong \mathrm{Hom}(B, -)$$

ist. Dies bedeutet, dass $f$ initial ist in der Kategorie aller Pfeile $B \to X$ mit $X \in \mathcal{A}$.

**Lemma 1.2.16.** *Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ eine volle Unterkategorie und $f : B \to A$ ein Pfeil mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$. Dann sind äquivalent:*

(a) *$f$ stellt $B$ dar.*

(b) *Jeder Pfeil $\alpha : B \to X$ für $X \in \mathcal{A}$ faktorisiert eindeutig über $f$.*

*In diesem Fall ist der Pfeil $f$ eindeutig in folgendem Sinne: ist $g : B \to A'$ ein weiterer Pfeil, der $B$ darstellt, dann gibt es einen Isomorphismus $\tau : A \to A'$, so dass $g = \tau \circ f$.*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \mathcal{B} \\
A \arrow[r, "\exists!"'] & X & \\
& & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

*Beweis.* (b)⇒(a) ist klar, denn (b) bedeutet ja nur, dass die Abbildung $\mathrm{Hom}(A, Z) \to \mathrm{Hom}(B, Z)$ die durch $f$ induziert wird, bijektiv ist. Teil (a) enthält nur die Zusatzinformation, dass diese Abbildung funktoriell, das ist aber gerade Lemma 1.2.14. □

**Beispiele 1.2.17.** (a) Sei $\mathcal{B}$ die Kategorie AB der abelschen Gruppen und $\mathcal{A}$ die Unterkategorie der divisiblen Gruppen. Dann ist eine beliebige abelsche Gruppe $B$ durch $f : B \to B \otimes \mathbb{Q}$, $b \mapsto b \otimes 1$ dargestellt.

(b) Sei $\mathcal{B}$ die Kategorie der metrischen Räume und sei $\mathcal{A}$ die Unterkategorie der vollständigen Räume. Dann wird ein gegebener Raum $X$ dargestellt durch seine Vervollständigung $X \mapsto \widehat{X}$.

**Definition 1.2.18.** Ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

heißt **kartesisch**, falls für jedes andere kommutative Quadrat

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

ein eindeutig bestimmter Pfeil $\eta : A \to P$ existiert, so dass $\alpha = p\eta$ und $\beta = q\eta$.

Das heißt also, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\
& P \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $\eta$ der gestrichelte Pfeil ist.

**Definition 1.2.19.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Die **Produkt-Kategorie** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ hat als Objekte die Paare $(C, D)$ mit $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{D}$. Ferner,

$$\mathrm{Hom}\Big((A, B), (X, Y)\Big) := \mathrm{Hom}(A, X) \times \mathrm{Hom}(B, Y).$$

**Definition 1.2.20.** Zwei Funktoren $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ heissen **adjungiert**, falls es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\Big(L(X), Y\Big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\Big(X, R(Y)\Big)$$

von Funktoren auf $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{B}$ gibt. In diesem Fall sagt man genauer, dass $R$ **rechtadjungiert** zu $L$ ist oder $L$ ist **linksadjungiert** zu $R$. Zu gegebenem $R$ ist der Linksadjungierte $L$, falls es ihn gibt, eindeutig bestimmt und ebenso andersherum.

**Beispiele 1.2.21.** (a) Sei $R : \mathrm{AB} \to \mathrm{SET}$ der Vergissfunktor. Für eine Menge $S$ sei $\mathbb{Z}[S]$ der freie $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $S$. Dann ist $L : S \mapsto \mathbb{Z}[S]$ der Linksadjungierte zu $R$.

(b) Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus von kommutative Ringen und $V : \mathrm{Mod}(B) \to \mathrm{Mod}(A)$ der Pullbackfunktor. Dann ist $V$ rechtsadjungiert zu $M \mapsto B \otimes_A M$.

**Definition 1.2.22.** Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heisst **klein**, falls die Objektklasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ eine Menge ist.

**Definition 1.2.23.** Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien, wobei $\mathcal{A}$ klein ist. Dann definieren wir die **Funktor Kategorie** $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ wie folgt: Objekte sind alle Funktoren $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathrm{Hom}(F, G)$ ist die Menge aller Transformationen von $F$ nach $G$.

Man muss hier "klein" verlangen, da sonst $\mathrm{Hom}(F, G)$ moeglicherweise keine Menge ist.

Als Beispiel betrachte $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}^{\mathrm{opp}}, \mathrm{SET})$. Jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ definiert einen Funktor $F : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{SET}$ durch $F(X) = \mathrm{Hom}(A, X)$.

* * *

## 1.3 Limiten

**Definition 1.3.1.** Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $\mathcal{D}$ eine kleine Kategorie. Ein **$\mathcal{D}$-Diagramm** in $\mathcal{A}$ ist ein Funktor $D : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$. Ein Diagramm heisst **kommutativ**, falls für je zwei Objekte $X, Y$ in $\mathcal{D}$ gilt

$$|\operatorname{Hom}(X, Y)| \leq 1.$$

**Beispiel 1.3.2.** Ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[d, "\gamma"] \\ Z \arrow[r, "\delta"] & W \end{tikzcd}$$

erzeugt von den Pfeilen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist genau dann kommutativ, wenn $\gamma\alpha = \delta\beta$.

**Definition 1.3.3.** Für eine beliebige Kategorie $\mathcal{C}$ sei $\mathcal{C}^+$ die Kategorie $\mathcal{C}$ erweitert um ein neues Objekt $X_0$ und für jedes $X \in \mathcal{C}$ genau einen Pfeil $X_0 \to X$. Dann ist $X_0$ ein initiales Objekt in $\mathcal{C}^+$.

**Definition 1.3.4.** Sei $\mathcal{D}^+$ eine solche Erweiterung von $\mathcal{D}$. Für ein given Diagramm $D : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ machen wir die Klasse $\mathcal{K}_D$ aller Fortsetzungen $D^+ : \mathcal{D}^+ \to \mathcal{A}$ zu einer Kategorie, indem wir $\operatorname{Hom}(D^+, E^+)$ definieren als die Menge aller Transformationen $t : D^+ \to E^+$ für die gilt $t|_{\mathcal{D}} = \operatorname{Id}$.

Ein Element von $\mathcal{K}_D$ ist ein Paar $(Z, (\tau_X)_{X \in \mathcal{D}})$, wobei $Z \in \mathcal{C}$ und $\tau_X : Z \to D(X)$ eine kompatible Familie von Morphismen ist. Wir nennen ein solchen Paar einen **Prä-Limes**.

**Bemerkung 1.3.5.** Da nur ein Objekt hinzugefügt wurde, besteht eine Transformation $t : D^+ \to E^+$ aus einem einzigen Morphismus $t_{X_0} : A = D^+(X_0) \to B = E^+(X_0)$, der kompatibel mit den Pfeilen in $D(\mathcal{D})$ ist. Das bedeutet, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "t"] \arrow[dl, dashed] \arrow[dl, dashed] \arrow[dl, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, dashed] \arrow[dr, dashed] \arrow[dr, dashed] & B \arrow[d, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dl, dashed] \arrow[dl, dashed] \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] \arrow[dr, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\ \cdots \arrow[r] & D(X) \arrow[r] & D(Y) \arrow[r] & D(Z) \arrow[r] & D(W) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

kommutiert.

**Definition 1.3.6.** Ein **Limes** für das Diagramm $D$ ist ein terminales Objekt in $\mathcal{K}_D$.

**Bemerkung 1.3.7.** Die Definition bedeutet folgendes: Ein Limes eines Diagramms $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ist ein Tupel $\big(L, (\phi_X)_{X\in\mathcal{D}}\big)$ bestehend aus einem Objekt $L \in \mathcal{C}$ und einer Familie von Pfeilen $\phi_X : L \to D(X)$, mit den beiden Eigenschaften

(a) Kompatibilität: Für jeden Pfeil $\alpha : X \to Y$ in $\mathcal{D}$ gilt $D(\alpha)\phi_X = \phi_Y$ und

(b) Universalität: Für jedes andere Objekt $M \in \mathcal{C}$ und jede kompatible Familie $\theta_X : M \to D(X)$, $X \in \mathcal{D}$, existiert genau ein Pfeil $\eta : M \to L$, so dass $\theta_X = \phi_X \circ \eta$ für jedes $X \in \mathcal{D}$ gilt.

**Lemma 1.3.8.** (a) *In der Kategorie* SET *existieren alle Limiten. Man sagt auch:* SET *ist eine* **vollständig Kategorie**.

(b) *In der Kategorie $\mathcal{V}$ aller endlich-dimensionalen Vektorräume üben einem gegebenen Körper $K$ existieren nicht alle Limiten.*

(c) *Ist $D : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ ein Diagramm und $L = \lim_{X\in\mathcal{D}} D(X)$ ein Limes, dann ist $L$ das (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte Objekt, für welches eine Isomorphie von Funktoren*

$$\mathrm{Hom}\big(Z, L\big) \cong \lim_{X\in\mathcal{D}} \mathrm{Hom}\big(Z, D(X)\big),$$

*gibt, wobei beide Seiten als Funktoren $\mathcal{A} \to$ SET betrachten werden.*

*Beweis.* (a) Sei $D : \mathcal{D} \to$ SET ein Diagramm. Sei $L$ die Menge aller $\alpha \in \prod_{X\in\mathcal{D}} D(X)$, so dass für jeden Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{D}$ gilt

$$\alpha_Y = D(f)(\alpha_X).$$

Die Strukturabbildungen $\phi_X$ sind die projektionen. Für einen Prä-Limes $\big(Z, (\tau_X)\big)$ definiert man $t : Z \to L$ durch seine Koordinaten

$$t(z)_X = \tau_X(z).$$

(b) Betrachte das Diagramm $\cdots K^n \xrightarrow{\tau_n} K^{n-1} \to \cdots \to K$, wobei jede Abbildung linear und surjektiv ist. Sei $S$ der Vektorraum aller Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $v_n \in K^n$ und $\tau_n(v_n) = v_{n-1}$. Dieser Raum ist unendlich-dimensional und die Projektionen liefern eine kompatible Familie linearer Abbildungen $\phi_n : S \to K^n$. Beachte dass jedes $\phi_n$ surjektiv ist. **Nimm an**, dass $\mathcal{V}$ einen Limes $L$ für dieses Diagramm enthält. Dies ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum $L$ mit einer kompatiblen Familie von Abbildungen $\eta_n : L \to K^n$. Nach der universellen Eigenschaft gibt es eine Abbildung

$t : S \to L$, so dass $\tau_n = \eta_n \circ t$ für jedes $n$. Dies bedeutet insbesondere, dass jedes $\eta_n : L \to K^n$ surjektiv ist. Ist aber $n > \dim(L)$, so ist dies nicht möglich, **Widerspruch!**

(c) Sei zunaechst $L$ ein Limes. Dann ist die Isomorphie von Funktoren durch $\alpha \mapsto (\phi_X \alpha)_{X \in \mathcal{D}}$ gegeben.

Für die Umkehrung sei $L$ ein Objekt von $\mathcal{A}$ und sei $t : \mathrm{Hom}\Big(-, L\Big) \to \lim_{X \in \mathcal{D}} \mathrm{Hom}\Big(-, D(X)\Big)$ eine Isomorphie von Funktoren. Wir müssen die Strukturabbildungen für $L$ basteln. Eine kompatible Familie von Pfeilen $\phi_X : L \to D(X)$ ist aber genau dasselbe wie ein Element von $\lim_{X \in \mathcal{D}} \mathrm{Hom}(L, D(X))$. Wir koennen die Familie $\phi = (\phi_X)_{X \in \mathcal{D}}$ also definieren als

$$(\phi_X)_{X \in \mathcal{D}} = t_L(\mathbf{1}_L).$$

Fuer die universelle Eigenschaft sei $\Big(P, \theta = (\theta_X)_{X \in \mathcal{D}}\Big)$ ein Prälimes. Dann ist die Familie $(\theta_X)_{X \in \mathcal{D}}$ ein Element von $\lim_{X \in \mathcal{D}} \mathrm{Hom}(P, D(X))$. Sei dann $\alpha : P \to L$ gegeben durch $\alpha := t_P^{-1}\Big((\theta_X)_{X \in \mathcal{D}}\Big)$. Es ist zu zeigen, dass $\theta = \phi \circ \alpha$.

Da $t$ eine natürliche Transformation ist, haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(L, L) \arrow[r, "t_L"] \arrow[d, "-\circ\alpha"'] & \lim_{X \in \mathcal{D}} \mathrm{Hom}(L, D(X)) \arrow[d, "-\circ\alpha"'] \\
\mathrm{Hom}(P, L) \arrow[r, "t_P"] & \lim_{X \in \mathcal{D}} \mathrm{Hom}(P, D(X))
\end{tikzcd}$$

Insbesondere heißt das $t_L(\mathbf{1}_L) \circ \alpha = t_P\Big(\mathbf{1}_L \circ \alpha\Big)$, also

$$t_L(\mathbf{1}_L) \circ t^{-1}\Big((\theta_X)_{X \in \mathcal{D}}\Big) = t_L(\mathbf{1}_L) \circ \alpha = t_P\Big(\mathbf{1}_L \circ \alpha\Big) = t_P\Big(\alpha\Big) = (\theta_X)$$

xxx

Es bleibt zu zeigen, dass $t_Z(\alpha) = (\phi_X \alpha)_{X \in \mathcal{D}}$. Hierfür betrachte $\alpha$ als ein Element von $\mathrm{Hom}(Z, L)$. Da $t$ eine natürliche Transformation ist, folgt

$$\begin{aligned}
t_Z(\alpha) &= t_Z\Big(\mathrm{Hom}(-, L)(\alpha)(\mathbf{1}_L)\Big) \\
&= \lim_X \mathrm{Hom}(-, D(X))(\alpha)\Big(\lim_X \mathrm{Hom}(-, D(X)(t_L(\mathbf{1}_L))\Big) \\
&= (\phi_X \alpha)_{X \in \mathcal{D}}.
\end{aligned}$$

□

**Beispiele 1.3.9.** (a) Sei $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ ein Diagramm mit einer trivialen Kategorie $\mathcal{D}$. In

diesem Fall heisst ein Limes **Produkt** und wird geschrieben als

$$\prod_{D \in \mathcal{D}} F(D).$$

(b) Die Kategorien GRP, AB, RING sind vollständig, die Kategorie FIELD ist es nicht, da das Produkt zweier Körper kein Körper ist.

(c) Ist das Diagramm von der Form

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\alpha"] \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & S \end{tikzcd}$$

dann nennt man einen Limes auch ein **Faserprodukt** von $X$ und $Y$ über $S$ und schreibt es als $X \times_S Y$. In dieser Notation werden die Pfeile $\alpha, \beta$ nicht hingeschrieben wenn klar ist, welche Morphismen gemeint sind. Ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & S \end{tikzcd}$$

heisst ein **kartesisches Diagramm**.

**Definition 1.3.10.** Eine **gerichtete Menge** ist eine geordnete Menge $(I, \leq)$ mit der Eigenschaft, dass für je zwei $i, j \in I$ es eine obere Schranke gibt, also ein $k \in I$ mit $i, j \leq k$. Eine gerichtete Menge kann als Kategorie gesehen werden, mit $I$ als Objektemenge und jeweils geneu einen Pfeil $i \leftarrow j$, falls $i \leq j$. Ein Funktor von einer gerichteten Menge zu einer $\mathcal{A}$ wird dann ein **projektivs System** genannt. Ein Limes heisst **projektiver Limes** und wird in der Form $\varprojlim_{i \in I} D_i$ geschrieben.

**Beispiel 1.3.11.** Betrachte die gerichtete Menge $\mathbb{N}$. Sei RING die Kategorie der Ringe und sei $p$ eine Primzahl. Definiere $D : \mathcal{D} \to \mathrm{RING}$ durch $D(n) = \mathbb{Z}/p^n$ und sei $D(n \to m)$ die Projektion $\mathbb{Z}/p^n \to \mathbb{Z}/p^m$. Der Limes dieses Diagramm existiert, es ist

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n = \mathbb{Z}_p,$$

der Ring der $p$-adischen Zahlen.

* * *

## 1.4 Colimiten

**Definition 1.4.1.** Sei $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ ein Diagramm. Ein **Colimes** von $D$ ist ein Limes in $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}}$. Das bdeutet, dass er initial ist in der Kategorie aller Paare $\big(A, (f_D)_{D\in\mathcal{D}}\big)$, wobei $A \in \mathcal{A}$ und $f_D : F(D) \to A$ eine kompatible Familie von Pfeilen ist.

**Beispiele 1.4.2.** (a) Die Kategorie SET hat alle CoLimiten. Um dies zu beweisen, sei $F : \mathcal{D} \to \mathrm{SET}$ ein Diagramm. Setze

$$A = \bigsqcup_{D\in\mathcal{D}} F(D) \big/ \sim,$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die erzeugt wird von

$$x \sim F(f)(x),$$

für jedes $D \in \mathcal{D}$, jedex $x \in D$ und jeden Morphismus $f : D \to D'$ in $\mathcal{D}$. Die Transformation $r : F \to \mathrm{Const}_A$ ist gegeben durch die Einbettung in die disjunkte Vereinigung. Es ist leicht zu sehen, dass dies ein Colimes ist.

(b) Sei $F : \mathcal{D} \to \mathrm{SET}$ ein Diagramm, wobei $\mathcal{D}$ trivial ist. Dann gilt

$$\mathrm{colim}(F) = \bigsqcup_{D\in\mathcal{D}} F(D).$$

**Definition 1.4.3.** Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in einer Kategorie $\mathcal{A}$. Sei $\mathcal{D}$ die triviale Kategorie mit Objektmenge $I$. In dieser Situation nennt man den Colimes auch das **Coprodukt** und schreibt es als

$$\coprod_{i\in I} M_i \quad \text{oder} \quad \bigoplus_{i\in I} M_i.$$

**Beispiele 1.4.4.** (a) In SET ist das Coprodukt gleich der disjunkten Vereinigung

$$\coprod_{i\in I} S_i = \bigsqcup_{i\in I} S_i.$$

(b) In RING ist das Coprodukt gleich dem Tensorprodukt

$$\bigotimes_{i\in I} R_i.$$

Hier ist das Tensorprodukt ein **unendliches Tensorprodukt von Ringen**. Man betrachtet dazu jedes Element als einen unendlichen Tensor mit fast allen

Einträgen gleich 1. Genauer definiert man es so: Sei

$$\bigotimes_{i\in I} R_i = \bigsqcup_{\substack{E\subset I\\ \text{finite}}} \bigotimes_{i\in E} R_i \Big/ \sim$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die von $w \sim w \otimes 1$ erzeugt wird, wobei $w \in \bigotimes_{i\in E} R_i$ und $w \otimes 1$ liegt in $\bigotimes_{i\in F} R_i$ für jede endliche Menge $F \supset E$. Addition und Multiplikation wird vom endlichen Tensorprodukt geerbt.

(c) In $\mathrm{Mod}(R)$ für einen Ring $R$ ist das Coproduct gleich der direkten Summe

$$\coprod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i.$$

**Bemerkung 1.4.5.** Die definierende Eigenschaft des Colimes kann in der Form

$$\mathrm{Hom}\Big(\mathrm{colim}_{D\in\mathcal{D}} D, Z\Big) = \lim_{D\in\mathcal{D}} \mathrm{Hom}(D, Z)$$

geschrieben werden.

**Definition 1.4.6.** Sei $\mathcal{A}$ eine punktierte Kategorie. Sei $F : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ ein Diagramm mit einer trivialen Kategorie $\mathcal{D}$. Für gegebene $D, E \in \mathcal{D}$ sei $f_{E,D} : F(D) \to F(E)$ in $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$f_{E,D} := \begin{cases} \mathbf{1}_{F(D)} & D = E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Familie $(f_{E,D})_{D\in\mathcal{D}}$ kann als ein Element von $\prod_D \mathrm{Hom}\Big(F(D), F(E)\Big)$ gesehen werden. Da

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}\Big(\mathrm{colim}_D F(D), F(E)\Big) &= \lim_D \mathrm{Hom}\Big(F(D), F(E)\Big) \\ &= \prod_D \mathrm{Hom}\Big(F(D), F(E)\Big), \end{aligned}$$

definiert diese Familie einen Pfeil $f_E : \mathrm{colim}_D F(D) \to F(E)$. Die Familie $(f_E)_{E\in\mathcal{D}}$ induziert einen kanonischen Pfeil $\mathrm{colim}_D F(D) \to \lim_D F(D)$ oder

$$\bigoplus_{D\in\mathcal{D}} F(D) \to \prod_{D\in\mathcal{D}} F(D).$$

**Beispiel 1.4.7.** Betrachte ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

Ein Colimes heisst in diesem Fall auch **Co-Faserprodukt** oder ein **Pushout**. Er wird geschrieben als $X \coprod_A Y$. Das vollständige Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \coprod_A Y \end{tikzcd}$$

heisst dann ein **cocartesisches Diagramm**.

**Definition 1.4.8.** Dual zum fall des projektiven Limes kann eine gerichtete Menge $(I, \leq)$ auch auf duale Weise in eine Kategorie verwandelt werden. Hier verlangt man, dass es einen eindeutig bestimmten Pfeil $i \to j$ gibt falls $i \leq j$. Ein Diagramm für diese Kategorie heisst ein **induktives System** und ein Limes ist einn **induktiver Limes**. Man schreibt den Limes als $\varinjlim_{i \in I} A_i$.

**Beispiele 1.4.9.** (a) Ist $X$ eine Menge und $I$ ein System von Teilmengen mit $A, B \in I \;\Rightarrow\; A \cup B \in I$. Dann ist $I$ gerichtet durch $A \leq B \;\Leftrightarrow\; A \subset B$ und es gilt

$$\varinjlim_{A \in I} A = \bigcup_{A \in I} A.$$

(b) Ein wichtiges Beispiel ist gegeben durch die **Keime** von Funktionen. Sei $p \in \mathbb{C}$ und sei $M$ die Menge aller Paare $(U, f)$, wobei $U$ eine offene Umgebung von $p$ ist und $f$ eine holomorphe Funktion auf $U$. Wir setzen

$$(U, f) \leq (V, g) \qquad \Leftrightarrow \qquad U \supset V, \;\; f|_V = g.$$

Dann ist $M$ eine gerichtete Menge und

$$\varinjlim_{f \in M} f$$

heisst die Menge der Funktionskeime holomorpher Funktiomnen um den Punkt $p$.

**Proposition 1.4.10.** *Ein rightsadjungierter Funktor kommutiert mit Limiten. Ein linksadjungierter Funktor kommutiert mit Colimiten.*

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}\left(X, R\left(\lim_{D\in\mathcal{D}} D\right)\right) &= \operatorname{Hom}\left(LX, \lim_{D\in\mathcal{D}} D\right)\\ &= \lim_{D\in\mathcal{D}} \operatorname{Hom}(LX, D)\\ &= \lim_{D\in\mathcal{D}} \operatorname{Hom}(X, RD)\\ &= \operatorname{Hom}\left(X, \lim_{D\in\mathcal{D}} RD\right)\end{aligned}$$

so dass $R\left(\lim_{D\in\mathcal{D}} D\right) \cong \lim_{D\in\mathcal{D}} RD$ folgt. Durch Dualisieren erhelten wir die zweite Aussage. □

Für später beweisen wir noch

**Lemma 1.4.11.** *Sei $\mathcal{A}$ eine punktierte Kategorie und nimm an, dass $\mathcal{A}$ alle endlichen Produkte und Coprodukte hat Dann gibt es für je zwei Objekte $X, Y$ eine eindeutig bestimmte Abbildung $\phi : X \oplus Y \to X \times Y$, die das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr] & & X \\
& X \oplus Y \arrow[r, "\phi"] & X \times Y \arrow[u] \arrow[dr] \\
Y \arrow[ur] \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] & & Y
\end{tikzcd}$$

*kommutativ macht.*

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(X \oplus Y, X \times Y) &= \operatorname{Hom}(X, X \times Y) \times \operatorname{Hom}(Y, X \times Y)\\ &= \operatorname{Hom}(X, X) \times \operatorname{Hom}(X, Y)\\ &\quad \times \operatorname{Hom}(Y, X) \times \operatorname{Hom}(Y, Y).\end{aligned}$$

Die Kommutativität des Diagramms ist äquivalent dazu, dass $\phi$ der Pfeil $(\mathbf{1}_X, 0, 0, \mathbf{1}_Y)$ ist. Dies zeigt Existenz und Eindeutigkeit. □

**Beispiel 1.4.12.** Sei $\mathrm{SET}_*$ die Kategorie der punktierten Mengen: Objekte sind Paare $(X, x_0)$, wobei $X$ eine Menge und $x_0 \in X$ ein Punkt ist. Ein Pfeil $(X, x_0)$ to $(Y, y_0)$ ist eine

Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Dann ist jede Einpunktmenge $\{x_0\}$ ein Nullobjekt. Das Produkt ist das direkte Produkt $\big(X \times Y, (x_0, y_0)\big)$ und das Coprodukt ist

$$(X, x_0) \oplus (Y, y_0) = X \sqcup Y / x_0 \sim y_0.$$

Die Abbildung $\phi : X \oplus Y \to X \times Y$ ist given by

$$\phi(x) = (x, y_0), \qquad \phi(y) = (x_0, y)$$

für $x \in X$ und $y \in Y$.

* * *

## 1.5 Additive und Abelsche Kategorien

**Definition 1.5.1.** Sei $f : X \to Y$ ein Pfeil in einer punktierte Kategorie. Ein **Kern** für $f$ ist ein terminales Objekt in der Kategorie aller Pfeile $\alpha : K \to X$ mit der Eigenschaft, dass $f\alpha = 0$. That bedeutet, dass $\alpha$ ein Kern ist, falls $f\alpha = 0$ und jedes $h : Z \to X$ mit $fh = 0$ eindeutig über $\alpha$ faktorisiert, d.h., gegeben ein kommutatives Diagramm mit durchgezogenen Pfeilen

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, dotted, "\exists!"'] \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\
K \arrow[r, "\alpha"'] & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

dann existiert ein einedeutig bestimmter pepunkteter Pfeil, der das ganze Diagramm kommutativ macht.

**Beispiel 1.5.2.** In AB ist die Inklusion $f^{-1}(0) \hookrightarrow A$ ein Kern von $f : A \to B$.

**Definition 1.5.3.** Sei $\mathcal{C}$ eine punktierte Kategorie. Ein **Cokern** für $f : X \to Y$ ist ein Kern in $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$. Also ist ein Cokern ein initiales Objekt in der Kategorie aller $\beta : Y \to C$ mit $\beta f = 0$. Anders ausgedrückt ist $\beta$ ein Cokern, falls für ein gegebenes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"'] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d] & C \arrow[dl, dotted, "\exists!"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

ein eindeutig bestimmter gepunkteter Pfeil existiert, der das ganze Diagramm kommutativ macht.