Professor Deitmar Abgabe: 26.5.2025, 10:00

## Vier Punkte pro Aufgabe.

1. (a) Sei R ein Integritaetsring. Welche Eigenschaft von R ist dazu äquivalent, dass R[x] ein Hauptidealring ist?

(b) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeige dass  $R \times R$  mit (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) und

$$(a,b)(c,d) = (ac,ad+bc)$$

ein kommutativer Ring mit Eins wird.

(c) Sei R ein Integritaetsring,  $f \in R \setminus \{0\}$  und sei  $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$ . Zeige dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$R[x]/(fx-1)R[x] \stackrel{\cong}{\longrightarrow} S^{-1}R$$

gibt.

2. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige dass jeder  $\mathbb{Z}$ -Modulhomomorphismus  $\phi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$  sich in eindeutiger Weise zu einem  $\mathbb{Q}$ -Vektorraumhomomorphismus  $\mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$  fortsetzen laesst und dass die darstellende Matrix bezueglich der Standardbasis von  $\mathbb{Q}^n$  ganzzahlig, d.h. in  $M_n(\mathbb{Z})$  ist. Zeige, dass auf diese Weise eine Bijektionen

$$\operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n) \stackrel{\cong}{\longrightarrow} \operatorname{M}_n(\mathbb{Z}), \quad \text{und} \quad \operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n) \stackrel{\cong}{\longrightarrow} \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z})$$

entstehen.

- 3. (a) Definiere die Begriffe Kern, Cokern und exakte Sequenz fuer Modulhomomorphismen.
  - (b) Sei M ein R-Modul und seien  $P,Q \subset M$  Untermoduln. Zeige dass die Sequenz

$$0 \to P \cap Q \xrightarrow{\alpha} P \times Q \xrightarrow{\beta} P + Q \to 0$$

exakt ist, wobei  $\alpha(x) = (x, x)$  und  $\beta(x, y) = x - y$ .

4. Seien P,Q Untermoduln einer R-Moduls M. Zeige dass die Abbildung  $P \to P + Q \to (P+Q)/Q$  einen Isomorphismus

$$P/P\cap Q\stackrel{\cong}{\longrightarrow} (P+Q)/Q$$

induziert.

Sommer 2025 Professor Deitmar

Abgabe: **19.5.2025, 10:00** 

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei G eine Gruppe und K ein Körper. Sei R = K[G] die Menge aller Abbildungen  $f: G \to K$  die endlichen Traeger haben, d.h.

$$R = \{f : G \rightarrow K : f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in G\}.$$

Zeige, dass R mit dem Faltungsprodukt

$$f * g(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(y^{-1}x) = \sum_{ab=x} f(a)g(b)$$

ein (i.A. nichtkommutativer) Ring ist. Man nennt K[G] auch den *Gruppenring* oder die *Gruppenalgebra*. Für  $g \in G$  sei  $\delta_g \in R$  gegeben durch

$$\delta_g(x) = \begin{cases} 1 & x = g, \\ 0 & x \neq g. \end{cases}$$

Zeige, dass  $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$  und dass K[G] genau dann kommutativ ist, wenn G eine abelsche Gruppe ist.

- 2. Seien a,  $b \in R$  Ideale in dem Ring R. Zeige, dass die folgenden Mengen ebenfalls Ideale sind:
  - (a)  $a + b = \{a + b : a \in a, b \in b\},\$
  - (b)  $a \cdot b = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j b_j : a_j \in a, b_j \in b \right\}$ ,
  - (c)  $a \cap b$ .
- 3. Sei K ein Koerper. Zeige, dass K[x, y] kein Hauptidealring ist.
- 4. Sei  $\phi: R \to R'$  ein Ringhomomorphismus. Sind Urbilder von Idealen wieder Ideale? Sind Urbilder von Primidealen wieder Primideale? Sind Urbilder von maximalen Idealen wieder maximale Ideale?

Blatt 4

Abgabe: 12.5.2025, 10:00

Sommer 2025 Professor Deitmar

## Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei  $\varepsilon = e^{\pi i/3}$ . Dann gilt  $\varepsilon^6 = 1$ , sowie  $\overline{\varepsilon} = 1 - \varepsilon$ , also  $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$ . Sei  $\mathbb{Z}[\varepsilon]$  der von  $\varepsilon$  erzeugte Unterring von  $\mathbb{C}$ . Zeige

$$\mathbb{Z}[\varepsilon] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\varepsilon.$$

- 2. Zeige, dass die Einheiten des Rings  $\mathbb{Z}[\varepsilon]$  genau die Potenzen von  $\varepsilon$  sind. (Hinweis: Zeige, dass  $\mathbb{Z}[\varepsilon]$  keine Elemente z mit 0 < |z| < 1 enthaelt.)
- 3. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei  $T:V\to V$  linear. Zeige, dass die Abbildung  $\phi_T:K[x]\to \operatorname{End}(V)$  ein Homomorphismus in den nichtkommutativen (!) Ring  $\operatorname{End}(V)$  ist. Zeige, dass der Kern gleich der Menge m(x)K[x] ist, wobei m(x) das Minimalpolynom von T ist.
- 4. Sei R ein Ring. Zeige, dass  $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$  in dem Ring R[[x]] genau dann eine Einheit ist, wenn  $a_0$  in  $R^{\times}$  liegt.

Lineare Algebra 2 Blatt 3

Sommer 2025 Professor Deitmar

Abgabe: **5.5.2025, 10:00** 

## Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Ein Element a eines Rings R heisst nilpotent, falls  $a^n = 0$  fuer ein  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige: ist a nilpotent, dann ist 1 - a eine Einheit.

2. (a) Zeige, dass die Polynommultiplikation assoziativ ist, d.h. dass fuer drei Polynome  $f, g, h \in K[X]$  gilt

$$(fg)h = f(gh).$$

- (b) Zeige, dass der Ring  $\mathbb{Z}/m$  genau dann ein Koerper ist, wenn m eine Primzahl ist.
- 3. Sei R ein Ring und  $M \neq \emptyset$  eine Menge. Zeige, dass die Menge aller Abbildungen  $f: M \to R$  ein Ring wird mit den punktweisen Verknuepfungen. Was sind die Einheiten dieses Rings?
- 4. Sei M eine nichtleere Menge und sei  $R = \mathcal{P}(M)$  die Potenzmenge. Zeige, dass R mit den Verknuepfungen

$$A + B = A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

und

$$A \cdot B = A \cap B$$

ein Ring ist. Zeige, dass M die einzige Einheit ist.

Sommer 2025 Professor Deitmar

Abgabe: **28.4.2025**, **10:00** 

Blatt 2

## Vier Punkte pro Aufgabe.

- 1. Beweise oder widerlege:
  - (a) Es gibt einen Gruppenisomorphismus  $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \times)$ ,
  - (b) Es gibt einen Gruppenisomorphismus  $(\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Q}_{>0},\times)$ .
- 2. Sei *A* eine endliche abelsche Gruppe. Zeige

$$\prod_{a \in A} a^2 = 1.$$

- 3. Sei G eine Gruppe der Ordnung 55, die auf einer Menge X mit 18 Elementen operiere. Zeige, dass es mindestens zwei Fixpunkte gibt. Ein Fixpunkt ist ein Punkt  $x \in X$  mit gx = x für jedes  $g \in G$ .
- 4. Beweise oder widerlege: Sind A, B Untergruppen von G und gilt  $G = A \cup B$ , dann ist  $A \subset B$  oder  $B \subset A$ .

Sommer 2025 Professor Deitmar

Abgabe: **22.4.2025, 10:00** 

Vier Punkte pro Aufgabe.

- 1. Sei *G* eine Gruppe, so dass fuer jedes  $a \in G$  gilt  $a^2 = 1$ . Zeige, dass *G* abelsch ist.
- 2. Ein *Homomorphismus* von Gruppen ist eine Abbildung  $\phi : G \to H$  zwischen Gruppen, so dass  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$  gilt. Ein *Isomorphismus* von Gruppen ist ein Homomorphismus, der bijektiv ist. Zeige:
  - (a) Ist  $\phi$  ein Homomorphismus, dann gilt  $\phi(1) = 1$  und  $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$  fuer jedes  $a \in G$ .
  - (b) Ist  $\phi$  ein Isomorphismus, dann ist die Umkehrabbildung ebenfalls ein Homomorphismus.
- 3. Seien  $e_1, \ldots, e_n$  die Standard Basis von  $K^n$  und betrachte die Bilinearform  $b(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$ . Linearformen auf  $K^n$  werden als Zeilenvektoren aufgefasst. Sei  $v_1, \ldots, v_n$  irgendeine Basis und sei S die Matrix mit den Spalten  $v_1, \ldots, v_n$ . Zeige, dass  $v_1^*, \ldots, v_n^*$  die Zeilen der Matrix  $S^{-1}$  sind.
- 4. Sei

$$0 \to V_0 \to \cdots \to V_n \to 0$$

eine exakte Sequenz von endlich-dimensionalen Vektorraeumen. Zeige, dass

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \dim(V_{j}) = 0.$$