Bestimme die JNF von $A \otimes B$. Schreibt man A und B jeweils als Summe von Jordan-Blöcken, sieht man, dass es reicht, den Fall $A - J_p(\lambda)$ und $B = J_q(\mu)$ zu betrachten. Dann gilt folgendes: Die JNF ist

$$\begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{\min(p,q)} J_{p+q-(2k-1)}(\lambda\mu) & \text{falls } \lambda \neq 0 \neq \mu \\ pJ_q(0) & \text{falls } \lambda \neq 0 = \mu \\ qJ_p(0) & \text{falls } \lambda = 0 \neq \mu \\ \displaystyle 2\bigoplus_{k=1}^{\min(p,q)} J_k(0) \;\oplus\; \big(|p-q|+1\big)J_{\min(p,q)}(0) & \text{falls } \lambda = 0 = \mu. \end{cases}$$

Lösungsskizze: Es gilt

$$J_p(\lambda) \otimes J_q(\mu) = \big(\lambda + N_p\big) \otimes (\mu + N_q) = \lambda\mu + \underbrace{\mu N_p \otimes 1 + \lambda 1 \otimes N_q + N_p \otimes N_q}_{N}.$$

Die Matrix N ist nilpotent. Sind $e_1, \dots, e_p$ und $f_1, \dots, f_q$ die jeweiligen Jordan-Basen, dann gilt

$$N(e_i \otimes f_j) = \mu\big(e_{i-1} \otimes f_j\big) + \lambda\big(e_i \otimes f_{j-1}\big) + \big(e_{i-1} \otimes f_{j-1}\big),$$

wobei wir $e_0 = 0 = f_0$ setzen. Ist jetzt $\lambda = \mu = 0$, dann bildet $\big(v_j = e_{l+j} \otimes f_{j-1}\big)_j$ eine Jordan-Basis fuer gegebenes l und diese gibt jeweils einen Jordan-Block, so dass dieser Fall erledigt ist. Der Rest folgt ähnlich. □