

Funktionalanalysis
Anton Deitmar

Inhaltsverzeichnis

1	Normierte Räume	2
1.1	Definition	2

1 Normierte Räume

1.1 Definition

In dieser Vorlesung werden nur Vektorräume über $\mathbb{C}$ betrachtet. Viele Aussagen gelten auch ueber $\mathbb{R}$. Die lassen sich dann meist aus der komplexen Version folgern.

Definition 1.1.1. Ein **normierter Vektorraum** ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum V mit einer Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ so dass für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

- $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (Definitheit)
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ (Multiplikativität)
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung).

Mit der Metrik

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

wird V dann ein metrischer Raum. Ein normierter Raum, der vollständig ist, in dem also jede Cauchy-Folge konvergiert, heisst **Banach-Raum**.

Beispiele 1.1.2. (a) Ist X ein topologischer Raum, dann ist der Vektorraum $C_b(X)$ aller beschränkten stetigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ein Banach-Raum mit der Norm

$$\|f\|_X = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Beweis. Die Normeigenschaften sind trivial. Es ist Vollständigkeit zu zeigen. Sei also (f_j) eine Cauchy-Folge. Dann gilt für jedes $x \in X$,

$$|f_j(x) - f_k(x)| \leq \sup_{y \in X} |f_j(y) - f_k(y)| = \|f_j - f_k\|_X.$$

Also ist $(f_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, konvergiert also. Nennen wir den Limes $f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es j_0 so dass für alle $j, k \geq j_0$ und alle $x \in X$ gilt

$$|f_j(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Mit $k \rightarrow \infty$ folgt, dass für jedes $j \geq j_0$ und jedes $x \in X$ gilt

$$|f_j(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Das bedeutet aber, dass f_j gleichmässig gegen f konvergiert. Wir zeigen, dass f stetig ist. Hierzu muessen wir zeigen, dass es zu gegebenem $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U von x gibt, so dass $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Um dies zu zeigen, beachte, dass es ein $j \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. Da f_j stetig ist, gibt es eine offene Umgebung U von x , so dass $|f_j(x) - f_j(u)| < \varepsilon/3$ fuer jedes $u \in U$ gilt. Dann ist fuer jedes $u \in U$

$$|f(x) - f(u)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(u)| + |f_j(u) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Damit folgt, dass f stetig ist.

Es ist leicht einzusehen, dass f auch beschränkt ist, also $f \in C_b(X)$, womit die Vollständigkeit gezeigt wäre. □

- (b) Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ und jeden Maßraum (X, μ) ist $L^p(\mu)$ ein Banach-Raum. Der Beweis gehoert in die Analysis 3 und findet sich in meinem Buch zur Analysis.

* * *