

Mathematische Logik

Anton Deitmar
WS 2018/19

Inhaltsverzeichnis

1	Aussagenlogik und Logik erster Stufe	1
1.1	Aussagenlogik	1

1 Aussagenlogik und Logik erster Stufe

1.1 Aussagenlogik

Die formale Aussagenlogik besteht aus

- einer abzählbaren Menge von Aussagensymbolen A, B, C oder $A_1, A_2, A_3, \dots$,
- Klammern “(” und “)” sowie den Junktoren “ $\neg$ ” und “ $\rightarrow$ ”.

Definition 1.1.1. Eine **Aussage** ist eine Zeichenkette, die sich aus den Symbolen der Aussagenlogik zusammensetzt und auf folgende Weise entsteht (induktive Definition)

- Jedes Aussagensymbol ist eine Aussage,
- Sind A und B Aussagen, so sind $(A \rightarrow B)$ und $(\neg A)$ Aussagen.

Der Begriff der induktiven Definition beinhaltet, dass jede Aussage durch endliche Anwendung dieser Prinzipien entsteht.

Lemma 1.1.2. (a) *Jede Aussage besitzt genausoviele Linksklammern wie Rechtsklammern.*

(b) *Eine Aussage kann **nur auf genau eine Weise** durch sukzessives Anwenden der Definitionsprinzipien gewonnen werden. Genauer heißt das: Ist C eine Aussage, dann gilt genau einer der drei Fälle:*

- (i) *C ist ein (eindeutig bestimmtes) Aussagensymbol, oder*

(ii) es gibt genau eine Aussage $\mathcal{A}$ mit

$$\mathcal{C} \equiv (\neg \mathcal{A}),$$

oder

(iii) es gibt genau ein Paar von Aussagen $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, so dass

$$\mathcal{C} \equiv (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}).$$

Beweis. Induktion nach der Laenge der Zeichenkette. Wir zeigen zunaechst, dass jede Aussage $\mathcal{A}$ gleichviele Linksklammern wie Rechtsklammern besitzt. Sei dazu $l(\mathcal{A})$ die Anzahl der Linksklammern und $r(\mathcal{A})$ die Anzahl der Rechtsklammern.

- Ist $\mathcal{A}$ ein Aussagensymbol, so besitzt die Formel $\mathcal{A}$ weder Links- noch Rechtsklammern.
- Ist $\mathcal{A} = (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ mit Formeln $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, so haben $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ kleinere Laenge als $\mathcal{A}$, wir koennen also nach Induktionsvoraussetzung annehmen, dass $l(\mathcal{B}) = r(\mathcal{B})$ und ebenso fuer $\mathcal{C}$. Dann folgt $l(\mathcal{A}) = 1 + l(\mathcal{B}) + l(\mathcal{C}) = 1 + r(\mathcal{B}) + r(\mathcal{C}) = r(\mathcal{A})$.
- Ist $\mathcal{A} = (\neg \mathcal{B})$ fuer eine Formel $\mathcal{B}$, dann koennen wir ebenfalls nach IV annehmen, dass $l(\mathcal{B}) = r(\mathcal{B})$ gilt, also ist $l(\mathcal{A}) = 1 + l(\mathcal{B}) = 1 + r(\mathcal{B}) = r(\mathcal{A})$.

Fuer den Beweis der zweiten Aussage beachten wir folgendes: Das erste Symbol einer Aussage ist entweder ein Aussagensymbol oder eine Linksklammer. Fuer eine beliebige Zeichenkette $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ sei der **Defekt**: $d(\mathcal{Z}) = l(\mathcal{Z}) - r(\mathcal{Z})$. Ist dann $\mathcal{W} \neq \emptyset$ eine weitere Zeichenkette so dass $\mathcal{A} = \mathcal{Z}\mathcal{W}$ eine Aussage ist, dann gilt $d(\mathcal{Z}) > 0$. (Dies muss man streng genommen wieder durch eine Induktion nach der Laenge von $\mathcal{A}$ beweisen.)

Nun koennen wir die zweite Aussage zeigen: Ist die Laenge von $\mathcal{C}$ gleich 1, so ist $\mathcal{C}$ ein Aussagensymbol und wir sind fertig. Ist die Laenge > 1 , so muss $\mathcal{C}$ mit einer Linksklammer beginnen. Ist das erste Zeichen nach der Linksklammer ein " $\neg$ ", dann kann $\mathcal{C}$ nicht von der Form $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ sein, da keine Aussage $\mathcal{A}$ mit einem " $\neg$ " beginnt. Also ist $\mathcal{C}$ von der Form $(\neg \mathcal{A})$ fuer eine Aussage $\mathcal{A}$, diese ist eindeutig bestimmt, denn sie entsteht aus $\mathcal{C}$ durch Wegnahme der ersten beiden und des letzten Zeichens. Ist das erste Symbol nach der Linksklammer kein " $\neg$ ", dann muss $\mathcal{C}$ von der Form $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ sein. Es bleiben zwei Faelle: ist der erste Zeichen nach der Klammer ein Aussagensymbol, dann ist $\mathcal{A}$ ein Aussagensymbol, welches eindeutig bestimmt ist und ebenso ist die Aussage $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt. Andernfalls ist das erste Symbol nach der Linksklammer wieder eine Linksklammer, der Defekt steigt also auf den

Wert 2. Das erste Zeichen, das den Defekt wieder auf 1 bringt, muss eine Rechtsklammer sein, die die Formel $\mathcal{A}$ beendet. Damit ist $\mathcal{A}$ und also auch $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt. $\square$

Zur Schreibweise: Wir lassen äußere Klammern meistens weg. Wir lassen auch innere Klammern manchmal weg, wobei wir vereinbaren, dass $\neg$ stärker bindet als $\rightarrow$, also soll etwa

$$\neg A \rightarrow B$$

als $(\neg A) \rightarrow B$ gelesen werden. Innere Klammern können nicht immer weggelassen werden, denn $\neg(A \rightarrow B)$ ist durchaus verschieden von $\neg A \rightarrow B$.

Definition 1.1.3. Wir führen die folgenden Abkürzungen ein:

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ steht für $\neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ steht für $\neg(\mathcal{A} \rightarrow \neg \mathcal{B})$

Beispiele 1.1.4. • $\neg(A \rightarrow B)$ ist eine Aussage, ebenso ist $(\neg A) \rightarrow (\neg B)$ eine Aussage.

• $() \rightarrow \neg ABCD((($ ist keine Aussage.

Ferner vereinbaren wir, dass bei gleichen Zeichen **Rechtsklammerung** herrscht, also soll

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$$

dasselbe sein wie

$$A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D)).$$

* * *