Algebra

Anton Deitmar

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppen

1.1 Permutationen

Für eine beliebige Menge M bezeichnen wir mit $\mathrm{Per}(M)$ die Gruppe der **Permutationen** von M, d.h., die Menge aller bijektiven Abbildungen $\sigma : M \to M$ mit der Hintereinanderausführung als Gruppenmultiplikation. Für eine natürliche Zahl n sei dann $\mathrm{Per}(n)$ die Gruppe $\mathrm{Per}(\{1, \dots, n\})$. Wir nennen $\mathrm{Per}(n)$ auch die Gruppe der Permutationen in n Buchstaben.

Die Elemente der Permutationsgruppe $\mathrm{Per}(n)$ schreibt man zB in der Form $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, wobei wir das Bild jeweils unter das Element schreiben, also in diesem Beispiel $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 3$ und $\tau(3) = 1$. Eine andere Schreibweise für dasselbe Element ist die **Zykelschreibweise**:

$$\tau = (1, 2, 3)$$

was soviel bedeutet wie 1 geht auf 2 geht auf 3 geht auf 1. Das Element, das 1 und 2 vertauscht, schreibt sich dann als $(1, 2)$. Nicht jedes Element von $\mathrm{Per}(n)$ ist als ein einziger Zykel schreibbar, so ist zum Beispiel in $\mathrm{Per}(4)$ das Element $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ in der Zykelschreibweise gleich

$$(1, 2)(3, 4).$$

Definition 1.1.1. Ein **Zykel** in $\mathrm{Per}(n)$ ist ein Tupel $(j_1, j_2, \dots, j_r)$, $r \geq 2$ von verschiedenen natürlichen Zahlen $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_r \leq n$. Ein Zykel repräsentiert eine Permutation, die j_ν auf $j_{\nu+1}$ und j_r auf j_1 wirft und alle anderen Zahlen festhält. Der Zykel $(j_1, \dots, j_r)$ repräsentiert dieselbe Permutation wie der Zykel $(j_2, j_3, \dots, j_r, j_1)$, deshalb kann man den

Zykel stets durch einen ersetzen, für den j_1 die kleinste der Zahlen $j_1, \ldots, j_k$ ist. Ein Zykel in dieser Form heisst **kanonisch**.

Zwei Zykel $(j_1, \ldots, j_k)$ und $(i_1, \ldots, i_s)$ heissen **disjunkt**, falls sie keine gemeinsamen Zahlen haben, also falls

$$\left\{j_1, \ldots, j_k\right\} \cap \left\{i_1, \ldots, i_s\right\} = \emptyset.$$

Beispiel 1.1.2. Wir schreiben die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 7 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ als Produkt kanonischer Zykel:

$$(2, 6, 4, 5)(3, 7).$$