

**Algebra**

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Abgabe: 13.5.2026 12:00

**Blatt 4**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei  $F_2$  die freie Gruppe in zwei Erzeugern  $a, b$ .

(a) Zeige, dass es für jedes Element  $z \in F_2$  Zahlen  $k, l \in \mathbb{Z}$  gibt, so dass

$$z = a^l b^k k_1 \cdots k_r,$$

wobei die  $k_j$  Kommutatoren sind.

(b) Zeige:

$$F_2^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^2.$$

2. Zeige, dass die Kommutatorgruppe von  $\text{Per}(n)$ ,  $n \geq 3$ , gleich  $\text{Per}^+(n)$  ist, der Gruppe der geraden Permutationen.  
(Hinweis: Zeige, dass  $\text{Per}^+(n)$  von den Zykeln der Länge 3 erzeugt wird.)
3. Zeige, dass eine Gruppe der Ordnung 40 nicht einfach ist.
4. (a) Bestimme alle kommutativen Ringe mit Eins, die den Nullring (als Ring mit Eins) als Unterring haben.  
(b) Zeige, dass der Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{3} \subset \mathbb{R}$  unendlich viele Einheiten hat.

**Algebra**

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

**Blatt 3**

Abgabe: 6.5.2026 12:00

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei  $G$  eine unendliche Gruppe. Ist  $H$  eine Untergruppe, dann nennen wir die Zahl  $|G/H| \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  den *Index* von  $H$  in  $G$ . Zeige:
  - (a) Haben die Untergruppen  $A, B$  endlichen Index, so auch ihr Schnitt  $A \cap B$  und es gilt  $|G/A \cap B| \leq |G/A| |G/B|$ .
  - (b) Hat die Untergruppe  $H$  endlichen Index, dann enthaelt  $H$  einen Normalteiler von endlichem Index.
2. Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $p$  der kleinste Primteiler der Gruppenordnung. Die Gruppe  $G$  habe einen Normalteiler  $N$  der Ordnung  $p$ . Zeige, dass  $G$  ein nichttriviales Zentrum hat.
3. Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ . Gib eine vollstaendige Liste aller Gruppen der Ordnung  $\leq 7$  bis auf Isomorphie (mit Beweis!).  
(Hinweis: Ist  $G$  eine nichabelsche Gruppe der Ordnung 6, dann operiert  $G$  auf der Menge seiner 2-Sylow-Gruppen.)
4. Für eine Gruppe  $G$  definieren wir

$$G_0 = G, \quad G_{k+1} = [G, G_k] = \langle gxg^{-1}x^{-1} : g \in G, x \in G_k \rangle$$

Die Gruppe  $G$  heißt *nilpotent*, falls  $G_n = 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

Sei  $K$  ein Koerper und sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass die Gruppe  $G$  der oberen Dreiecks- $n \times n$ -Matrizen mit Einsen auf der Diagonale nilpotent ist.

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Die Gruppe  $G$  operiere auf der Menge  $X$ . Seien  $g \in G, x \in X$ . Zeige, dass

$$gG_xg^{-1} = G_{g \cdot x}.$$

2. Sei  $G$  eine Gruppe und sei  $\text{Inn}(G)$  die Menge aller *inneren Automorphismen* von  $G$ , d.h., die Menge aller Abbildungen der Form

$$\begin{aligned} C_g : G &\rightarrow G, \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

mit  $g \in G$ . Zeige dass  $\text{Inn}(G)$  in  $\text{Aut}(G)$  liegt und ein Normalteiler in dieser Gruppe ist.

3. Seien  $H \subseteq G$  endliche Gruppen. Zeige

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

4. Eine Gruppenoperation heisst *transitiv*, falls es nur eine Bahn gibt.

Eine endliche Gruppe  $G$  operiere transitiv auf einer Menge  $X$ , so dass jedes  $g \in G$  mindestens einen Fixpunkt in  $X$  hat, d.h., zu jedem  $g \in G$  gibt es ein  $x \in X$  mit  $gx = x$ . Zeige, dass  $X$  aus nur einem Punkt besteht.

**Algebra**

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Abgabe: 22.4.2026 12:00

**Blatt 1**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $n$ . Sei  $1 \in S \subset G$  eine Teilmenge. Zeige, dass

$$S^n = \{s_1 \cdots s_n : s_1, \dots, s_n \in S\}$$

eine Untergruppe von  $G$  ist.

2. Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist zyklisch.
3. Sei  $N$  ein zyklischer Normalteiler der Gruppe  $G$  und sei  $H \subset N$  eine Untergruppe. Ist  $H$  ein Normalteiler in  $G$ ?
4. Wir sagen: Eine Gruppe  $G$  hat *Exponent*  $m \in \mathbb{N}$ , falls  $x^m = 1$  für jedes  $x \in G$  gilt.  
Für welche Primzahlen  $p$  gilt: Jede endliche Gruppe  $G$  mit Exponent  $p$  ist abelsch?