Analytische Zahlentheorie

Anton Deitmar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Primfaktorzerlegung

1.1 Primzahlen

In diesem Abschnitt erinnern wir an einige Fakten aus der Algebra.

- Eine **Primzahl** ist eine natuerliche Zahl $p \geq 2$ die keinen echten Teiler in $\mathbb{N}$ hat, für die also gilt

$$d \mid p \quad \Rightarrow \quad d = 1 \text{ oder } d = p.$$

- Jede natuerliche Zahl ≥ 2 kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden.

  Insbesondere wird jede Zahl $n \geq 2$ von einer Primzahl geteilt.

  (Beweis durch Induktion)

- Es gibt unendlich viele Primzahlen.

  Beweis. Seien $p_1, \dots p_n$ verschiedene Primzahlen. Wir zeigen, dass es eine Primzahl gibt, die von allen p_j verschieden ist. Sei $N = p_1 \cdots p_n + 1$. Es gibt eine Primzahl p, die N teilt. Waere nun p gleich einem der p_j, so teilte p also das Produkt $p_1 \cdots p_n$ und damit teilte p auch die Zahl $1 = N - p_1 \cdots p_n$, was nicht sein kann! □

- (Division mit Rest) Zu je zwei natuerlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

  Mit anderen Worten: $\mathbb{Z}$ ist ein euklidischer Ring.

  Beweis. Nach der archimedischen Eigenschaft gibt es ein $q \in \mathbb{N}_0$ so dass $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$. Dies bedeutet $bq \leq a < bq + b$, so dass $a = bq + r$ mit $0 \leq r = a - bq < b$. □

- Der **groesste gemeinsame Teiler** $\mathrm{ggT}(m, n) \in \mathbb{N}$ zweier $m, n \in \mathbb{N}$ ist auch der Erzeuger des Ideals $\mathbb{Z}m + \mathbb{Z}n$, also gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ so dass

$$\mathrm{ggT}(m, n) = am + bn.$$

Wenn wir im folgenden "Ring" schreiben, soll immer ein kommutativer Ring mit Eins gemeint sein.

Definition 1.1.1. Sind $k, l \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ und haben k und l dasselbe Bild in $\mathbb{Z}/m$, dann schreiben wir

$$k \equiv l \mod m.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} k \equiv l \mod m &\Leftrightarrow m \text{ teilt } (k - l) \\ &\Leftrightarrow k = l + dm \text{ fuer ein } d \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Proposition 1.1.2. *Der Ring $\mathbb{Z}/m$ ist genau dann ein Koerper, wenn m eine Primzahl ist.*

Beweis. Algebra. □

* * *

1.2 Der chinesische Restsatz und die Euler-Funktion

Satz 1.2.1 (Chinesischer Restsatz). *Sind die natuerlichen Zahlen m, n teilerfremd, dann ist die natuerliche Projektion*

$$P : \mathbb{Z}/(mn) \ \to \ \mathbb{Z}/m \ \times \ \mathbb{Z}/n$$

ein Isomorphismus von Ringen.

Beweis. Algebra. □

Korollar 1.2.2. *Ist*

$$n = \prod_p p^{v_p}$$

die Primfaktorzerlegung einer natuerlichen Zahl n, d.h., das Produkt laeuft ueber alle Primzahlen p und p^{v_p} ist die maximale p-Potenz, die n teilt, dann gilt

$$\mathbb{Z}/n \ \cong \ \prod_p \mathbb{Z}/(p^{v_p}),$$

wobei das Produkt endlich ist, weil fast alle v_p gleich Null sind.

Beweis. Man wendet den Satz iteriert an. □

Definition 1.2.3. Ein Element $a \in R$ eines Rings R heisst **invertierbar**, oder **Einheit** des Rings, wenn es ein $b \in R$ gibt, so dass $ab = 1$ ist.

- Die Einheiten des Ringes $\mathbb{Z}$ sind genau die Zahlen 1 und -1. Die Einheiten eines Koerpers K sind genau alle Elemente $x \neq 0$.
- Wir schreiben $R^\times$ für die Menge aller Einheiten des Rings R. Dies ist eine abelsche Gruppe bezueglich der Multiplikation.

Definition 1.2.4. Fuer $m \in \mathbb{N}$ sei $\phi(m)$ die Anzahl der Einheiten des endlichen Rings $\mathbb{Z}/m$, also

$$\phi(m) = \left|(\mathbb{Z}/m)^\times\right|.$$

Man kann auch sagen: $\phi(n)$ ist die Anzahl aller $1 \leq k \leq m$, die teilerfremd zu m sind. Die Funktion ϕ heisst **Eulersche ϕ-Funktion**.

Lemma 1.2.5. *Die Eulersche ϕ-Funktion ist multiplikativ, d.h.*

$$(m,n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(mn) = \phi(m)\phi(n),$$

falls m und n teilerfremd sind. Fuer eine Primzahl p und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1).$$

Beweis. Seien m und n teilerfremd. Nach dem chinesischen Restsatz ist

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

so dass

$$(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

und damit auch

$$\phi(mn) = \left|(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times\right| = \left|(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\right| \left|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right| = \phi(m)\phi(n).$$

Sei nun p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Eine Zahl $1 \leq k \leq p^k$ ist genau dann nicht zu p teilerfremd, wenn sie ein Vielfaches von p ist, wenn sie also von der Form $k = pt$ ist. Da $1 \leq k \leq p^k$, folgt $1 \leq t \leq p^{k-1}$, es gibt also p^{k-1} Moeglichkeiten für k. Es folgt $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. □

Satz 1.2.6 (Euler). *Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Ist $(a,m) = 1$, dann gilt*

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \mod (m).$$

Beweis. Fuer jede endliche Gruppe G und jedes Element $g \in G$ gilt $g^{|G|} = 1$. Die Gruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ hat die Ordnung $\phi(m)$. Daher ist $[a]^{\phi(m)} = [1]$, was nichts anderes heisst als die Behauptung. □

Satz 1.2.7. *Fuer jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{d|m} \phi(d) = m.$$

Beweis. Beide Seiten der Gleichung sind Multiplikativ, denn gilt $(m,n) = 1$, dann ist jeder Teiler d von mn ein Produkt $d = d_1 d_2$ mit eindeutig bestimmten Teilern d_1 von m und d_2 von n. Daher

$$\sum_{d|mn} \phi(d) = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} \phi(d_1 d_2) = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} \phi(d_1)\phi(d_2) = \sum_{d_1|m} \phi(d_1) \sum_{d_2|n} \phi(d_2).$$

Es reicht also, die Aussage für eine Primpotenz $m = p^k$ zu zeigen. Dann ist aber

$$\sum_{d|m} \phi(d) = \sum_{j=0}^{k} \phi(p^j) = 1 + \sum_{j=1}^{k} p^j - p^{j-1} = p^k = m. \qquad \square$$

* * *

2 Das quadratische Reziprozitaetsgesetz

2.1 Ein Beispiel

Das Problem, eine Gleichung des Typs

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

zu loesen, hat zur Entwicklung der Galois-Theorie gefuehrt. Eine solche Gleichung heisst **Diophantische Gleichung**, wenn alle a_j in $\mathbb{Z}$ liegen und man fragt sich dann, ob es Loesungen gibt, die in $\mathbb{Z}$ liegen. Dies ist ein ganz anderes (und schwierigeres) Problem als ueber $\mathbb{Q}$. Fangen wir also mal mit dem Fall $n = 2$ an. Will man eine quadratische Gleichung ueber $\mathbb{Z}$ loesen, hilft es, wenn man sie ueber $\mathbb{Z}/m$ loesen kann. Dazu ist es wichtig, zu wissen, welche Zahlen modulo m einen quadratischen Rest haben. Das quadratische Reziprozitaetsgesetz hilft einem, dies zu entscheiden. Zunaechst aber noch ein Beispiel, das zeigt, wie wichtig die Frage ist, ob eine Zahl ein quadratischer Rest ist.

Definition 2.1.1. Seien $0 < p, q \in \mathbb{Q}$. Die Matrizen

$$i = \begin{pmatrix} \sqrt{p} & \\ & -\sqrt{p} \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} & \sqrt{q} \\ \sqrt{q} & \end{pmatrix}$$

erzeugen eine $\mathbb{Q}$-Unteralgebra $M = M(p, q)$ von $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit den Relationen

$$i^2 = p, j^2 = q, ij = -ji.$$

Ais diesen Relationen folgt, dass $1, i, j, ij$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von M sind, also ist M ein 4-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Dies ist ein Beispiel einer **Quaternionenalgebra**.

Satz 2.1.2. *Seien p und q Primzahlen so dass q kein quadratischer Rest modulo p ist, d.h., es gelte $q \not\equiv k^2 \mod p$ fuer jedes $k \in \mathbb{Z}$.*

Dann ist $M(p, q)$ eine **Divisionsalgebra** *ueber $\mathbb{Q}$, d.h., jedes $m \in M \setminus \{0\}$ ist invertierbar.*

Beweis. Fuer $x = a + bi + cj + dij \in M$ sei

$$x^c = a - bi - cj - dij.$$

Die Abbildung $x \mapsto x^c$ ist $\mathbb{Q}$-linear und erfuellt

$$(xy)^c = y^c x^c, \qquad 1^c = 1, \qquad x^{cc} = x.$$

Die erste Formel gilt auf den Basiselementen und wegen Bilinearitaet auf allen. Sei $N(x) = xx^c$. Dann gilt $N(x)^c = N(x)$, also gilt $N(x) \in \mathbb{Q}$.

Lemma 2.1.3. *Es gilt*

$$N(xy) = N(x)N(y).$$

Ein gegebenes $x \in M$ ist genau dann invertierbar, wenn $N(x) \neq 0$ gilt.

Beweis. Wir rechnen

$$N(xy) = (xy)(xy)^c = xyy^cx^c = xN(y)x^c = N(x)N(y).$$

Ist x inverierbar, etwa $xy = 1$, dann folgt $N(x)N(y) = N(xy) = 1$, also ist $N(x) \neq 0$.

Ist $N(x) \neq 0$, dann ist $y = \frac{x^c}{N(x)}$ ein Inverses zu x. □

Sei $x \in M$ ungleich Null. Wir muessen zeigen, dass $N(x) \neq 0$ gilt. Sei hierzu $x = a + bi + cj + dij$. Wir koennen Nenner herausmultiplizieren und annehmen, dass a, b, c, d in $\mathbb{Z}$ liegen und teilerfremd sind. **Angenommen**, $N(x) = 0$, also

$$N(x) = a^2 - b^2p - c^2q + d^2pq = 0.$$

Modulo p bedeutet das

$$a^2 \equiv c^2q \mod p.$$

Waere nun $c \not\equiv 0 \mod p$, dann ist c in $\mathbb{Z}/p = \mathbb{F}_p$ invertierbar, es gilt als ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $kc \equiv 1 \mod p$ und daher

$$q \equiv k^2c^2q \equiv (ka)^2 \mod p,$$

was im **Widerspruch** zur Annahme steht, dass q kein quadratischer Rest ist. Es folgt also, dass $p \mid c$ und damit auch $p \mid a$. wir schreiben $a = p\alpha$ und $c = p\gamma$ und erhalten

$$\alpha^2p^2 - b^2p - \gamma^2p^2q + d^2pq = 0.$$

Division durch p gibt

$$\alpha^2p - b^2 - \gamma^2pq + d^2q = 0,$$

also

$$d^2q \equiv b^2 \mod p.$$

Mit demselben Schluss wie ober erhalten wir $p \mid d, b$ und damit einen **Widerspruch!** zur angenommenen Teilerfremdheit. □

* * *

2.2 Das Legendre Symbol

Definition 2.2.1. Sei p eine Primzahl ≥ 3 und a eine ganze Zahl mit $(a, p) = 1$. Falls es eine ganze Zahl x gibt mit $x^2 \equiv a \mod (p)$, nennen wir a einen **quadratischen Rest** modulo p. Andernfalls heisst a ein **nichtquadratischer Rest**.

Die Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \mathbb{F}_p^\times$ hat $p - 1$ Elemente, dies ist eine gerade Zahl.

Lemma 2.2.2. *Sei p eine ungerade Primzahl. Dann gibt es genau $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste und $\frac{p-1}{2}$ nichtquadratische Reste modulo p.*

Beweis. Die Abbildung $\phi : x \mapsto x^2$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\mathbb{F}_p^\times \to \mathbb{F}_p^\times$. Der Kern besteht aus allen Elementen x, die die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ erfuellen. Das Polynom $x^2 - 1$ hat die beiden Nullstellen $1 \neq -1$ und kann nicht mehr haben, da ein Polynom f ueber einem Koerper nicht mehr als $\mathrm{grad}(f)$ Nullstellen hat. Also hat der Kern von ϕ die Ordnung 2 und damit hat das Bild die Ordnung

$$\left|\mathrm{Bild}(\phi)\right| = \left|\mathbb{F}_p^\times / \ker(\phi)\right| = \frac{p-1}{2}.$$

Also gibt es $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste und $(p-1) - \frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{2}$ nichtquadratische Reste. □

Beispiele 2.2.3.

- Fuer $p = 5$ zeigt die Tafel

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

  dass 1 und $-1 = 4$ die quadratischen Reste sind.

- Fuer $p = 7$ sehen wir,

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

  dass $1, 2, 4$ die quadratischen Reste sind. Also ist zum Beispiel -1 ein quadratischer Rest modulo 5, aber nicht modulo 7.

Definition 2.2.4. Sei p eine ungerade Primzahl und $m \in \mathbb{Z}$. Definiere das **Legendre Symbol** durch

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \begin{cases} 1 & m \text{ quadratischer Rest} \mod (p), \\ -1 & m \text{ kein quadratischer Rest} \mod (p), \\ 0 & p \mid m. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ falls $a \equiv b \mod (p)$.

Da es genausoviele quadratische Reste wie nichtquadratische Reste gibt, folgt

$$\sum_{m=0}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right) = 0.$$

* * *

2.3 Die Saetze von Wilson und Euler

Satz 2.3.1 (Wilson). *Fuer jede Primzahl p gilt*

$$(p-1)! \equiv -1 \mod (p).$$

Beweis. Fuer $p = 2$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $p \geq 3$. Die Aussage bedeutet nichts anderes, als dass im endlichen Koerper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt $\prod_{x\neq 0} x = -1$. Fuer die endliche abelsche Gruppe $G = \mathbb{F}_p^\times$ gilt

$$\prod_{g\in G} g = \prod_{g:g=g^{-1}} g,$$

denn für die Elemente g mit $g \neq g^{-1}$ heben sich g und g^{-1} im Produkt auf. Nun bedeutet $g = g^{-1}$ aber gerade $g^2 - 1 = 0$ und dieses Polynom hat genau zwei Nullstellen: 1 und -1, deren Produkt gleich -1 ist. □

Satz 2.3.2 (Euler). *Sei p eine ungerade Primzahl $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \mod (p).$$

Insbesondere folgt

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$$

fuer alle $a, b \in \mathbb{Z} \smallsetminus p\mathbb{Z}$. Das Legendre-Symbol ist also stark multiplikativ.

Es folgt auch, dass -1 genau dann ein quadratischer Rest modulo p ist, wenn $p \equiv 1 \mod (4)$.

Beweis. Ist $(a, p) \neq 1$, dann gilt $a \equiv 0 \mod (p)$ und dasselbe gilt dann für $a^{\frac{p-1}{2}}$. Sei also $(a, p) = 1$. Ist a ein quadratischer Rest mod p, also etwa $a \equiv b^2$, dann gilt $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{p-1} \equiv 1$. Die Kongruenzgleichung $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ hat genau $\frac{p-1}{2}$ Loesungen modulo p, also gilt für alle nichtquadratischen Reste a, dass $a^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 \mod (p)$. Da aber für die Zahl $q = a^{\frac{p-1}{2}} \in \mathbb{F}_p$ gilt $q^2 \equiv a^{p-1} \equiv 1$, muss $q = 1$ oder $q = -1$ sein. Es bleibt also nichts anderes uebrig, als dass für alle nichtquadratischen Reste a gilt $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \mod (p)$. □

* * *

2.4 Der Reziprozitaetssatz

Satz 2.4.1 (Quadratisches Reziprozitaetsgesetz von Gauß). *Sind p, q verschiedene ungerade Primzahlen, dann gilt*

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right).$$

Da $\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}$ genau dann ungerade ist, wenn $p \equiv q \equiv 3 \mod (4)$, kann man den Satz auch so formulieren:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right) \qquad \text{falls } p \equiv q \equiv 3 \mod (4)$$

und

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \qquad \text{sonst.}$$

Um mit dem QRG das Legendre-Symbol berechnen zu koennen, brauchen wir noch einen sogenannten Ergaenzungssatz.

Satz 2.4.2 (Ergaenzungssatz)**.** *Es gilt*

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Mit anderen Worten: 2 *ist genau dann quadratischer Rest modulo p, wenn* $p \equiv \pm 1 \mod (8)$ *ist.*

Zur Wohldefiniertheit beachte man, dass $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$ und einer dieser beiden geraden Faktoren muss durch 4 teilbar sein, also ist $p^2 - 1$ durch 8 teilbar.

Beispiel 2.4.3. Wir berechnen als Beispiel $\left(\frac{691}{277}\right)$ Es ist $691 \equiv 137 \mod (277)$. Also folgt

$$\left(\frac{691}{277}\right) = \left(\frac{137}{277}\right)$$

Nun ist $137 \equiv 1 \mod 4$ und ebenso fuer 277. Ferner ist $277 \equiv 3 \mod 137$. Daher folgt

$$\left(\frac{137}{277}\right) = \left(\frac{277}{137}\right) = \left(\frac{3}{137}\right) = \left(\frac{137}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1.$$

Zum Beweis des Reziprozitaetsgesetzes und von Satz 2.4.2 benoetigen wir das sogenannte Gauß-Lemma. Sei p eine ungerade Primzahl und sei

$$H = \left\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \frac{p-1}{2}\right\} \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p.$$

Dann hat jedes Element aus $\mathbb{F}_p^\times$ die Gestalt $\pm h$ mit $h \in H$. Sei nun $a \in \mathbb{F}_p^\times$ ein fixiertes Element. Dann erhalten wir Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}
a &= \varepsilon_1 h_1, & h_1 &\in H, \varepsilon_1 \in \{\pm 1\},\\
2a &= \varepsilon_2 h_2, & h_2 &\in H, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\},\\
&\vdots \\
\frac{p-1}{2}a &= \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} h_{\frac{p-1}{2}}, & h_{\frac{p-1}{2}} &\in H, \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} \in \{\pm 1\}.
\end{aligned}$$

Lemma 2.4.4 (Gauss-Lemma)**.**
$$\left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_j.$$

Beweis. Zunaechst zeigen wir, dass die h_j paarweise verschieden sind. Ist $h_i = h_j$, dann folgt $ai = \pm aj$, also $i \equiv \pm j \mod (p)$. Wegen $i, j \in H$ ist dann $i = j$. Also taucht jedes $h \in H$ genau einmal als h_j auf und wir erhalten
$$a^{\frac{p-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_j \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} h_j = \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_j \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j$$

Teilen wir beide Seiten durch $\prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j$, so erhalten wir mit Satz 2.3.2,

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_j.$$ □

Beweis der QRG und des Ergaenzungssatzes. **1. Schritt.** Fuer $1 \leq j \leq \frac{p-1}{2}$ schreiben wir

$$aj = \varepsilon_j h_j + e_j p,$$

mit $e_j \in \mathbb{Z}$. Sei [.] die Gauß-Klammer. Es folgt

$$\left[\frac{2aj}{p}\right] = \left[\frac{2\varepsilon_j h_j}{p}\right] + 2e_j = \begin{cases} 2e_j & \varepsilon_j = 1, \\ 2e_j - 1 & \varepsilon_j = -1. \end{cases}$$

Also
$$\varepsilon_j = (-1)^{[2aj/p]}.$$

2.Schritt. Nach dem Gauss-Lemma und Schritt 1 gilt

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_j = (-1)^{\sum_{j=1}^{(p-1)/2} [\frac{2aj}{p}]}.$$

3. Schritt. Sei a ungerade. Dann gilt

$$\left(\frac{2a}{p}\right) = \left(\frac{2a+2p}{p}\right) = \left(\frac{4\frac{a+p}{2}}{p}\right) = \underbrace{\left(\frac{4}{p}\right)}_{=1} \left(\frac{\frac{a+p}{2}}{p}\right).$$

Aus Schritt 2 erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\left(\frac{2a}{p}\right) &= \left(\frac{\frac{a+p}{2}}{p}\right)\\ &= (-1)^{\sum_{j=1}^{(p-1)/2}[\frac{(a+p)j}{p}]}\\ &= (-1)^{\sum_{j=1}^{(p-1)/2}[\frac{aj}{p}]+\sum_{j=1}^{(p-1)/2} j}\\ &= (-1)^{\sum_{j=1}^{(p-1)/2}[\frac{aj}{p}]+\frac{p^2-1}{8}}.\end{aligned}$$

Setzt man hier $a = 1$, erhaelt man den Ergaenzungssatz.

4. Schritt. Aus der Multiplikativitaet des Legendre-Symbols erhaelt man nun für ungerades a die Gleichung

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{j=1}^{(p-1)/2}[\frac{aj}{p}]}.$$

5. Schritt. Jetzt sei $a = q$ eine ungerade Primzahl. Wir setzen

$$\begin{aligned}S_1 &= \#\left\{(i,j) : 1 \le i \le \frac{p-1}{2},\ 1 \le j \le \frac{q-1}{2},\ qi < pj\right\},\\ S_2 &= \#\left\{(i,j) : 1 \le i \le \frac{p-1}{2},\ 1 \le j \le \frac{q-1}{2},\ qi > pj\right\}.\end{aligned}$$

Weil stets $qi \neq pj$ ist, gilt $S_1 + S_2 = \frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}$. Fuer ein fest gewaehltes i ist $qi > pj$ aequivalent zu $j \le [\frac{qi}{p}]$. Von diesen j gibt es dann $[\frac{qi}{p}$ viele. Also gilt

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p}\right],\\ S_2 &= \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q}\right].\end{aligned}$$

Mit Schritt 4 zeigt dies

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{(p-1)/2}[\frac{qi}{p}]+\sum_{j=1}^{(q-1)/2}[\frac{pj}{q}]} = (-1)^{S_1+S_2} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}. \qquad \square$$

* * *

3 Arithmetische Funktionen

3.1 Allgemeines

Definition 3.1.1. Eine **arithmetische Funktion** ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Definition 3.1.2. (Groß O Notation) Seien f, g arithmetische Funktionen. Wir schreiben

$$f \ll g,$$

wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass

$$f(n) \leq Cg(n)$$

fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Sind f, g, h arithmetische Funktionen, dann schreiben wir

$$f = h + O(g),$$

wenn

$$|f - h| \ll g.$$

Manchmal schreibt man auch

$$f(n) = h(n) + O(g(n)), \qquad \text{fuer } n \to \infty$$

und mein damit, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Abschaetzung $|f(n) - g(n)| \leq Cg(n)$ nur fuer alle $n \geq n_0$ gilt.

Definition 3.1.3. Eine arithmetische Funktion f heisst **multiplikativ**, wenn $f \neq 0$ und

$$(m, n) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(mn) = f(m)f(n).$$

Jede multiplikative Funktion muss $f(1) = 1$ erfuellen.

Ist f multiplikativ und ist

$$n = \prod_p p^{v_p(n)}$$

die eindeutige Primfaktorzerlegung mit $v_p(n) \in \mathbb{N}_0$, fast alle Null, dann gilt

$$f(n) = \prod_p f\left(p^{v_p(n)}\right).$$

Beispiel 3.1.4. Die Eulersche ϕ-Funktion ist multiplikativ

* * *

3.2 Die Gitterpunktfunktion r(n)

Es sei $r(n)$ die Anzahl aller Paare $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ so dass $x^2 + y^2 = n$. Es gilt dann $r(1) = 4$, denn die Darstellungen der Eins sind $1 = (\pm 1)^2 + 0 = 0 + (\pm 1)^2$. Also ist $r(n)$ nicht multiplikativ. Sei

$$R(N) = 1 + \sum_{n=1}^{N} r(n),$$

dann ist $R(N)$ die Anzahl der Gitterpunkte in $\mathbb{Z}^2$ im abgeschlossenen Kreis $\bar{B}_{\sqrt{N}}(0)$.

Satz 3.2.1 (Gauß)**.**

$$R(N) = \pi N + O\left(\sqrt{N}\right) \qquad \textit{fuer } N \to \infty.$$

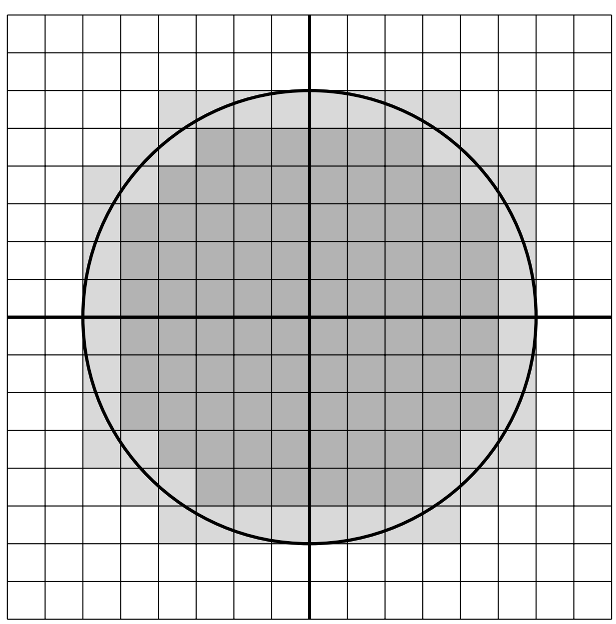
Beweis. Sei S die Menge aller Gitterpunkte $z \in \mathbb{Z}^2$ mit $\|z\|^2 \leq N$. Dann ist $R(N) = |S|$ oder gleich der Flaeche des Gebietes A, das man erhaelt, wenn man zu jedem $s \in S$ das Quadrat $s + [0, 1]^2$ addiert. Da die Diagonale des Einheitsquadrats gleich $\sqrt{2}$ ist, liegen alle diese Quadrate ganz im Kreis vom Radius $\sqrt{N} + \sqrt{2}$, also

$$R(N) \leq \pi\left(\sqrt{N} + \sqrt{2}\right)^2.$$

Andererseits wird der Kreis vom Radius $\sqrt{N} - \sqrt{2}$ komplett von den Quadraten ueberdeckt, so dass

$$\pi\left(\sqrt{N} - \sqrt{2}\right)^2 \leq R(N) \leq \pi\left(\sqrt{N} + \sqrt{2}\right)^2.$$

Also folgt $R(N) = \pi N + O(\sqrt{N})$. □



* * *

3.3 Die Divisorfunktion

Sei $d(n)$ die Anzahl der Teiler k von n mit $1 \le k \le n$. Dann ist d multiplikativ und mit $n = \prod_p p^{v_p}$ gilt

$$d(n) = \prod_p (v_p + 1).$$

Satz 3.3.1. *Es gilt $d(n) = O(n^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$.*

Beweis. Es gilt

$$\frac{d(n)}{n^\varepsilon} = \prod_{p^k \| n} \frac{k+1}{p^{k\varepsilon}} \le \prod_{p^k \| n} \frac{2k}{p^{k\varepsilon}} = \prod_{p^k \| n} \frac{2}{p^{k\varepsilon}} \frac{\log(p^k)}{\log p} \le \prod_{p^k \| n} \frac{2}{\log 2} \frac{\log(p^k)}{p^{k\varepsilon}}.$$

Fuer $m \in \mathbb{N}$ sei $f(m) = \frac{2}{\log 2} \frac{\log m}{m^\varepsilon}$. Da $f(m) \to 0$ wenn $m \to \infty$, ist die Menge

$$M = \left\{ m \in \mathbb{N} : f(m) > 1 \right\}$$

endlich. Sei $C = \prod_{m \in M} f(m)$. Es folgt

$$\frac{d(n)}{n^\varepsilon} \le \prod_{p^k \| n} f(p^k) \le \prod_{m \in M} f(m) = C.$$

□

Sei

$$D(N) = \sum_{n=1}^{N} d(n).$$

Satz 3.3.2. *Es gilt $D(N) = N \log N + O(N)$.*

Wir brauchen folgendes Lemma.

Lemma 3.3.3. *Sei $g \ge 0$ eine monoton fallende Funktion auf $[1, \infty)$. Dann gilt*

$$\sum_{1 \le n \le X} g(n) = \int_1^X g(t)\, dt + A + O(g(X)),$$

wobei A eine Konstante ist.

Beweis. Es ist $\sum_{1 \le n \le X} g(n) = \int_1^{[X]+1} g([t])\, dt$ und damit

$$\sum_{1 \le n \le X} g(n) - \int_1^X g(t)\, dt = \int_1^{[X]+1} g([t]) - g(t)\, dt + \underbrace{\int_X^{[X]+1} g(t)\, dt}_{=O(g(X))}$$

Es ist also zu zeigen

$$\int_1^{[X]+1} g([t]) - g(t)\,dt = A + O(g(X)).$$

Indem man ggF eine Konstante abzieht, kann man $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ annehmen. Es ist dann

$$\int_1^{[X]+1} g([t]) - g(t)\,dt = \underbrace{\int_1^{\infty} g([t]) - g(t)\,dt}_{=A} - \int_{[X]+1}^{\infty} g([t]) - g(t)\,dt.$$

Die Konvergenz des Integrals und die Behauptung folgen aus

$$\int_{[X]+1}^{\infty} g([t]) - g(t)\,dt = O(g(X)),$$

und dies gilt wegen $\int_k^{k+1} g([t]) - g(t)\,dt \le \int_k^{k+1} g([t]) - g([t]+1)\,dt = g(k) - g(k+1)$ für $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_k^{\infty} g([t]) - g(t)\,dt \le g(k) - g(k+1) + g(k+1) - g(k+2) + \cdots = g(k). \qquad \square$$

Korollar 3.3.4. *Es gibt eine Konstante $\gamma > 0$ (Euler-Konstante) so dass*

$$\sum_{1\le n\le X} \frac{1}{n} = \log X + \gamma + O\left(\frac{1}{X}\right).$$

Beweis des Satzes. Es gilt

$$D(N) = \sum_{n=1}^{N} d(n) = \sum_{1\le n\le N} \sum_{xy=n} 1 = \sum_{1\le xy\le N} 1 = \sum_{x=1}^{N} \left[\frac{N}{x}\right].$$

Schreibe $N/x = [N/x] + \theta_x$ mit $0 \le \theta_x < 1$, dann gilt

$$D(N) = N\sum_{x=1}^{N} \frac{1}{x} - \sum_{x=1}^{N} \theta_x = N\sum_{x=1}^{N} \frac{1}{x} + O(N).$$

Mit Korollar 3.3.4 folgt der Satz. $\square$

* * *

3.4 Teilerpotenzsummen

Fuer $s \in \mathbb{C}$ sei

$$\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s.$$

Dann ist σ_s multiplikativ, denn für $(m, n) = 1$ gilt

$$\sigma_s(mn) = \sum_{d|mn} d^s = \sum_{d_1|m} \sum_{d_2|n} d_1^s d_2^s = \sigma_s(m)\sigma_s(n).$$

Proposition 3.4.1. *Fuer $n = \prod_p p^{k_p}$ und $s \notin \frac{2\pi i}{\log p}\mathbb{Z}$ gilt*

$$\sigma_s(n) = \prod_p \frac{p^{(k_p+1)s} - 1}{p^s - 1}.$$

Beweis. Da σ_s multiplikativ ist, reicht es, die Aussage für den Fall $n = p^k$ für eine Primzahl p zu zeigen. Dann ist

$$\sigma_s(n) = \sum_{d|p^k} d^s = \sum_{j=0}^{k} p^{js} = \frac{(p^s)^{k+1} - 1}{p^s - 1}.$$ □

* * *

3.5 Multiplikative Faltung

Auf der Menge $\mathcal{A}$ aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ installieren wir das **multiplikative Faltungsprodukt**:

$$f \circledast g(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Da man das Faltungsprodukt auch als $f \circledast g(n) = \sum_{kl=n} f(k)g(l)$ schreiben kann, folgt sofort

$$f \circledast g = g \circledast f.$$

Satz 3.5.1. *Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{A}$ bildet mit dem Faltungsprodukt eine kommutative $\mathbb{C}$-Algebra, d.h. die Abbildung $(f, h) \mapsto f \circledast g$ ist bilinear, erfuellt das Kommutativgesetz, also $f \circledast g = g \circledast f$ und ist assoziativ, also*

$$(f \circledast g) \circledast h = f \circledast (g \circledast h)$$

gilt für alle $f, g, h \in \mathcal{A}$. Die Funktion

$$e(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

ist ein neutrales Element, d.h. es gilt $e \circledast f = f$ für jedes $f \in \mathcal{A}$.

Die Menge M aller Funktionen $\alpha : [1, \infty) \to \mathbb{C}$ bildet einen Modul unter der Algebra $\mathcal{A}$ mit der Operation

$$f.\alpha(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} f(n) \alpha\left(\frac{x}{n}\right), \qquad f \in \mathcal{A},\ \alpha \in M.$$

Beweis. Die Bilinearitaet ist klar. Fuer die Assoziativitaet rechne

$$\begin{aligned}(f \circledast g) \circledast h(n) &= \sum_{kl=n} f \circledast g(k)h(l) = \sum_{kl=n} \sum_{mp=k} f(m)g(p)h(l) \\ &= \sum_{mpl=n} f(m)g(p)h(l) + \sum_{mr=n} f(m) \sum_{pl=r} g(p)h(l) \\ &= f \circledast (g \circledast h)(n).\end{aligned}$$

Um zu sehen, dass M ein Modul ist, ist zu zeigen, dass $(f, \alpha) \to f.\alpha$ bilinear ist und dass

$$e.\alpha = \alpha, \qquad (f \circledast g).\alpha = f.(g.\alpha)$$

fuer alle $f, g \in \mathcal{A}$ und alle $\alpha \in M$ gilt.

Bilinearitaet und $e.\alpha = \alpha$ sind klar. Fuer die letzte Aussage rechnen wir

$$\begin{aligned}(f \circledast g).\alpha(x) &= \sum_{1 \le n \le x} \sum_{kl=n} f(k)g(l)\alpha\left(\frac{x}{kl}\right) \\ &= \sum_{1 \le kl \le x} f(k)g(l)\alpha\left(\frac{x}{kl}\right) \\ &= \sum_{1 \le k \le x} f(k) \sum_{1 \le l \le x/k} g(l)\alpha\left(\frac{x/k}{l}\right) \\ &= f.(g.\alpha)(x).\end{aligned}$$

□

* * *

3.6 Die Möbius-Funktion

Sei

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n \text{ ein Produkt von } k \text{ verschiedenen Primzahlen ist,} \\ 0 & \text{falls } p^2 \mid n \text{ für eine Primzahl } p. \end{cases}$$

Dann ist insbesondere $\mu(1) = 1$

Proposition 3.6.1. *Die Möbius-Funktion ist multiplikativ. Es gilt*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } n = 1, \\ 0 & \textit{falls } n \ge 2. \end{cases}$$

Beweis. Die Multiplikativitaet ist klar aus der Definition. Fuer die zweite Aussage ist der Fall $n = 1$ klar. Sei also $n \ge 2$ und sei $n = \prod_{p|n} p^{k_p}$ die Primfaktorzerlegung von n. Ist d ein Teiler von n, so ist $\mu(d) = 0$ ausser wenn $d = d_I$, wobei I eine Teilmenge von $\{p \mid n\}$ ist und $d_I = \prod_{p \in I} p$. In diesem Fall ist $\mu(d_I) = (-1)^{|I|}$. Sei N die Anzahl der Primteiler von n. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von

$\{p \mid n\}$ ist gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{N}{k}$. Also ist

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} = (1-1)^N = 0. \qquad \square$$

Satz 3.6.2 (Erste Möbius-Umkehrformel)**.** *Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ und*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d),$$

dann gilt

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g(n/d).$$

Ist umgekehrt g gegeben und f durch die zweite Formel definiert, dann erhaelt man g durch die erste Formel zurueck.

Satz 3.6.3 (Zweite Möbius-Umkehrformel)**.**
Sei α eine Funktion, die für $x \geq 1$ definiert ist und sei

$$\beta(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \alpha\left(\frac{x}{n}\right),$$

dann gilt

$$\alpha(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n) \beta\left(\frac{x}{n}\right)$$

und umgekehrt.

Beweis der Umkehrformeln. Die konstante Funktion $\mathbf{1}(n) = 1$ liegt auch in $\mathcal{A}$ und Proposition 3.6.1 besagt gerade, dass

$$\mu \circledast \mathbf{1} = e,$$

also ist μ das Inverse zu $\mathbf{1}$. Mit diesen Informationen lassen sich die beiden Inversionsformeln leicht beweisen: Die erste Inversionsformel besagt gerade

$$\mu \circledast (\mathbf{1} \circledast f) = f, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{1} \circledast (\mu \circledast g) = g,$$

was aus dem Assoziativgesetz und $\mu \circledast \mathbf{1} = e$ folgt. Die zweite Inversionsformel besagt

$$e.(\mathbf{1}.\alpha) = \alpha, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{1}.(e.\beta) = \beta,$$

was nun ebenfalls klar ist. $\square$

Fuer spaeter definieren wir noch die **Mangoldt-Funktion**

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{falls } n \text{ eine Primpotenz } p^k, k > 0 \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Proposition 3.6.4. *Es gilt* $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log(n)$.

Beweis. Ist $n = \prod_{p|n} p^{k_p}$, dann gilt

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{p|n} k_p \log(p) = \sum_{p|n} \log(p^{k_p}) = \log(n). \qquad \square$$

* * *

3.7 Dirichlet-Reihen

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ hat **moderates Wachstum**, falls

$$f(n) = O(n^a)$$

fuer ein $a \in \mathbb{R}$ gilt.

Satz 3.7.1 (Konvergenz- und Identitaetssatz für Dirichlet-Reihen)**.** *Ist f von moderatem Wachstum, etwa $f(n) = O(n^a)$, dann konvergiert die* **Dirichlet-Reihe**

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

lokal-gleichmäßig absolut in $\{\mathrm{Re}(s) > a + 1\}$ *und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Die Abbildung $f \mapsto L(f, s)$ ist injektiv in dem Sinne, dass für eine zweite Funktion $g(n) = O(n^b)$ mit $L(f, s) = L(g, s)$, für alle* $\mathrm{Re}(s) > (a + 1), (b + 1)$ *gilt $f = g$.*

Beweis. Sei $f(n) = O(n^a)$ und sei $\delta > 0$. Wir zeigen, dass $L(f, s)$ gleichmäßig absolut in der Menge $\{\mathrm{Re}(s) \geq a + 1 + \delta\}$ konvergiert. Sei also $M > 0$ mit $|f(n)| \leq Mn^a$ gegeben. Dann ist für $\mathrm{Re}(s) \geq a + 1 + \delta$,

$$\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \frac{M}{n^{1+\delta}},$$

woraus wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty$$

die verlangte Konvergenz folgt. Die Reihe ist dann ein lokal-gleichmäßiger Limes von holomorphen Funktionen, also nach dem Satz von Weierstraß selbst wieder holomorph.

Sei nun $g(n) = O(n^b)$ eine weitere Funktion gegeben, so dass die Dirchlet-Reihen $L(s, f)$ und $L(g, s)$ für grosse Realteile von s uebereinstimmen. Dann folgt

$$f(1) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} L(f, s) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} L(g, s) = g(1).$$

Durch Abziehen einer konstanten Funktion koennen wir nun also $f(1) = 0 = g(1)$ annehmen. Dann aber ist

$$f(2) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} 2^s L(f, s) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} 2^s L(g, s) = g(2).$$

mit einer offensichtlichen Iteration dieses Arguments folgt $f(n) = g(n)$ für jedes n. □

Lemma 3.7.2 (Abelsche partielle Summation)**.** *Seien $m \le n$ in $\mathbb{N}$ und seien $a_m, \dots, a_n, b_m, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, dann gilt*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_{m,n} b_n - \sum_{k=m}^{n-1} A_{m,k}(b_{k+1} - b_k),$$

wobei $A_{m,k} = a_m + \cdots + a_k$ gesetzt ist.

Beweis. Die rechte Seite ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k b_n - \sum_{k=m}^{n-1}\sum_{\nu=m}^{k} a_\nu (b_{k+1} - b_k) &= \sum_{k=m}^{n} a_k b_n - \sum_{\nu=m}^{n-1}\sum_{k=m}^{\nu} a_k (b_{\nu+1} - b_\nu)\\ &= \sum_{k=m}^{n} a_k b_n - \sum_{k=m}^{n-1} a_k \sum_{\nu=k}^{n-1} (b_{\nu+1} - b_\nu)\\ &= \sum_{k=m}^{n} a_k b_n - \sum_{k=m}^{n-1} a_k (b_n - b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k b_k\end{aligned}$$

hierbei haben in der ersten Zeile k und ν die Rollen getauscht. □

Definition 3.7.3. Fuer eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}^\times$ sei $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ die eindeutige Zahl mit

$$z = |z|\, e^{i \arg(z)}.$$

Mit anderen Worten: $\arg(z)$ ist der Winkel, den die Halbgerade $\mathbb{R}_{\ge 0} z$ mit der positiven x-Achse macht. Ferner ist

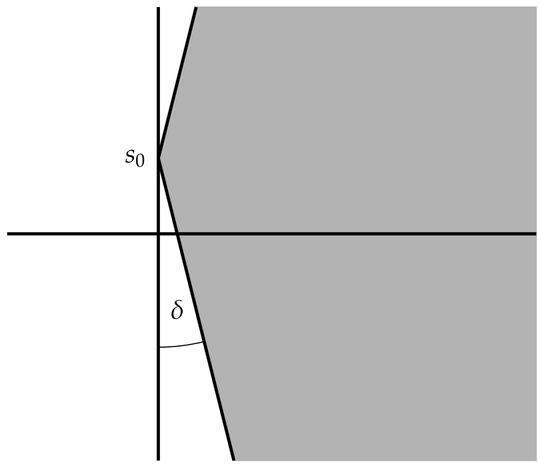
$$\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$$

der Hauptzweig des Logarithmus.

Satz 3.7.4. *Sei $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$.*

(a) *Konvergiert die Dirichlet-Reihe $L(s)$ für ein $s_0 \in \mathbb{C}$, egal ob absolut oder nicht, dann konvergiert die Reihe gleichmäßig in jedem Gebiet der Form $\left\{s_0 + z : z \neq 0,\ |\arg(z)| < \frac{\pi}{2} - \delta\right\}$, $\delta > 0$ und stellt daher eine für $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ holomorphe Funktion dar. Ausserdem gilt $a_n = O\left(n^{\mathrm{Re}(s_0)}\right)$, so dass die Reihe für $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0) + 1$ absolut konvergiert.*

(b) *Sind die partiellen Summen $A_{m,n} = \sum_{j=m}^{n} a_j$ beschraenkt, dann konvergiert die Reihe* $L(s)$ *für jedes s mit* $\mathrm{Re}(s) > 0$.



Beweis. (a) Indem wir $a'_n = a_n n^{-s_0}$ schreiben, sehen wir, dass wir $s_0 = 0$ annehmen duerfen, was bedeutet, dass wir annehmen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Wir rechnen mit Hilfe von partieller Summation:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{k^s} = \frac{A_{m,n}}{n^s} - \sum_{k=m}^{n-1} A_{m,k} \left(\frac{1}{(k+1)^s} - \frac{1}{k^s} \right).$$

Schreibe $s = \sigma + it$ mit $\sigma, t \in \mathbb{R}$ und nimm $\sigma > 0$ und $|\arg(s)| < \frac{\pi}{2} - \delta$ an, was soviel bedeutet wie

$$\frac{\sigma}{|s|} > \sin(\delta) > 0.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(k+1)^s} - \frac{1}{k^s} \right| &= \left| s \int_k^{k+1} z^{-s-1}\, dz \right| \\ &\le |s| \int_k^{k+1} z^{-\sigma-1}\, dz \\ &= \frac{|s|}{\sigma} \left(\frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{(k+1)^\sigma} \right) \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein m_0 so dass $|A_{m,n}| < \varepsilon$ für alle $m_0 \le m \le n$ gilt. Fuer solche m, n gilt dann

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{k^s}\right| &\le \frac{\varepsilon}{n^\sigma} + \varepsilon\frac{|s|}{\sigma}\sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{(k+1)^\sigma}\\ &= \frac{\varepsilon}{n^\sigma} + \varepsilon\frac{|s|}{\sigma}\left(\frac{1}{m^\sigma} - \frac{1}{n^\sigma}\right)\\ &\le \frac{\varepsilon}{m^\sigma}\left(1 + \frac{2|s|}{\sigma}\right) \qquad (*)\\ &< \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\sin(\delta)}\right).\end{aligned}$$

(b) Es gelte $|A_{m,n}| \le M$ für ein $M > 0$. Dieselbe Rechnung mit $s = \sigma$ bis zur Zeile $(*)$ fuehrt zu

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{k^\sigma}\right| \le \frac{M}{m^\sigma}\left(1 + \frac{2|s|}{\sigma}\right),$$

woraus für $\sigma > 0$ die verlangte Konvergenz folgt. □

Beispiel 3.7.5. Die Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^s}$$

konvergiert lokal-gleichmaessig fuer $\mathrm{Re}(s) > 0$ und fuer $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$f(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s),$$

wobei $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ die **Riemannsche Zetafunktion** ist.

Beweis. Nur die zweite Aussage ist zu beweisen. Fuer $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\begin{aligned}f(s) &= \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n^s} - \sum_{n \text{ gerade}} \frac{1}{n^s}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} - 2\sum_{n \text{ gerade}} \frac{1}{n^s}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} - 2\sum_{n \text{ gerade}} \frac{1}{n^s}\\ &= \zeta(s) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \zeta(s) - 2^{1-s}\zeta(s).\end{aligned}$$ □

* * *

3.8 Konvergenzabszisse

Definition 3.8.1. Nach Satz 3.7.4 gibt es für jede Dirichlet-Reihe $L(s) = \sum_n \frac{a_n}{n^s}$ ein $\alpha \in [-\infty, \infty]$ so dass die Reihe für $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ konvergiert und für $\mathrm{Re}(s) < \alpha$ divergiert. Man nennt α die **Konvergenzabszisse** von $L(s)$.

Satz 3.8.2 (Landau). *Sei $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichlet-Reihe mit Konvergenzabszisse $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gelte $a_n \geq 0$ für alle n. Dann laesst sich die für* $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ *holomorphe Funktion $L(s)$ nicht holomorph nach α fortsetzen.*

Sei umgekehrt $L(s)$ eine Dirichlet-Reihe mit positiven Koeffizienten, die in einem Punkt in $\mathbb{C}$ konvergiert. Die Funktion $L(s)$ lasse sich holomorph in eine Halbebene $\mathrm{Re}(s) > a$ *fortsetzen. Dann muss in dieser Halbebene auch die Reihe konvergieren.*

Beweis. Indem man s durch $s - \alpha$ ersetzt, kann man $\alpha = 0$ annehmen. **Angenommen**, $L(s)$ lasse sich auf einen Kreis um Null holomorph fortsetzen. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $L(s)$ holomorph im Kreis um 1 vom Radius $1 + 2\varepsilon$ ist. Die Taylorreihe um 1 ist

$$L(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(k)}(1)}{k!}(s-1)^k.$$

Diese Reihe konvergiert also auch für $s = -\varepsilon$. Die Reihe $\sum_n \frac{a_n}{n^s}$ konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 0$ lokal-gleichmäßig, also konvergieren ihre Ableitungen $(-1)^k \sum_n \frac{a_n (\log n)^k}{n^s}$ lokal-gleichmäßig. Wegen $a_n \geq 0$ konvergiert die folgende Doppelsumme absolut, was die Vertauschung der Summation rechtfertigt.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(k)}(1)}{k!}(-\varepsilon - 1)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon+1)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\log n)^k}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon+1)^k (\log n)^k}{k!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{(\varepsilon+1)\log n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{-\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Ausserdem folgt die Konvergenz der Dirichlet-Reihe bei $s = -\varepsilon$ was der Tatsache, dass 0 die Konvergenzabszisse ist, **widerspricht!** □

Satz 3.8.3. *Sind f, g Funktionen von moderatem Wachstum auf $\mathbb{N}$, dann ist auch das Faltungsprodukt $f \circledast g$ von moderatem Wachstum und es gilt*

$$L(f \circledast g, s) = L(f, s) L(g, s),$$

falls $\mathrm{Re}(s)$ *hinreichend gross ist.*

Beweis. Seien $|f(n)|, |g(n)| \leq Mn^a$, so gilt

$$|f \circledast g(n)| \leq \sum_{kl=n} |f(k)||g(l)| \leq \sum_{kl=n} M^2 k^a l^a = M^2 n^a d(n),$$

wobei $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n ist. Da $d(n) \leq n$, folgt $f \circledast g(n) = O(n^{a+1})$. Damit ist die erste Aussage bewiesen. Fuer die zweite rechnen wir

$$\begin{aligned} L(f \circledast g, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f \circledast g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{kl=n} \frac{f(k)g(l)}{k^s l^s} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(l)}{l^s} = L(f,s)L(g,s). \end{aligned}$$ □

Definition 3.8.4. Wir sagen: Ein Produkt $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ komplexer Zahlen ist ein **konvergentes Produkt**, falls die Folge $p_k = \prod_{j=1}^{k} a_j$ in $\mathbb{C}^\times$ liegt und dort konvergiert. Dies ist aequivalent dazu, dass die Summe $\sum_j \log(a_j)$ für den Standardzweig des Logarithmus konvergiert.

Wir sagen, das Produkt **konvergiert absolut**, falls

$$\sum_j |\log(a_j)| < \infty$$

gilt.

Satz 3.8.5. *Sei* $f(n) = O(n^\alpha)$.

(a) *Die Funktion f ist genau dann multiplikativ, wenn für jedes* $\mathrm{Re}(s) > \alpha + 1$ *gilt*

$$L(f,s) = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right),$$

wobei das Produkt lokal gleichmäßig absolut konvergiert.

(b) *Die Funktion f ist genau dann stark multiplikativ wenn für* $\mathrm{Re}(s) > \alpha + 1$ *gilt*

$$L(f,s) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}},$$

wobei das Produkt lokal-gleichmäßig absolut konvergiert. Ein solches Produkt nennt man **Euler-Produkt***.*

Beweis. (a) Sei f multiplikativ und sei $f(n) \leq Mn^\alpha$. Fixiere ein $\sigma_0 > \alpha + 1$. Fuer $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_0$ gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^{k(\sigma_0 - \alpha)}} = M \frac{p^{\alpha - \sigma_0}}{1 - p^{\alpha - \sigma_0}} \leq p^{\alpha - \sigma_0} \frac{M}{1 - 2^{\alpha - \sigma_0}}.$$

Da der Hauptzweig des Logarithmus im abgeschlossenen Ball um 1 vom Radius 1/2 holomorph ist und $\log(1) = 0$ erfuellt, existiert eine Konstante $C > 0$ so dass $|\log(1+z)| \le C|z|$ für $|z| < \frac{1}{2}$. Daher ist

$$\begin{aligned}\left|\log\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right)\right| &= \left|\log\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right)\right| \\ &\le p^{\alpha-\sigma_0}\frac{CM}{1-2^{\alpha-\sigma_0}} = p^{\alpha-\sigma_0}C',\end{aligned}$$

so dass für jedes s mit $\mathrm{Re}(s) \ge \sigma_0$ gilt

$$\sum_p \left|\log\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right)\right| \le C'\sum_p p^{\alpha-\sigma_0} \le C'\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\sigma_0} < \infty.$$

Daher konvergiert das Produkt. Die Identitaet folgt durch Ausmultiplizieren des Produktes.

Sei umgekehrt $L(f,s)$ durch das Produkt gegeben. Durch Ausmultiplizieren folgt

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde f(n)}{n^s},$$

wobei

$$\tilde f(p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}) = f(p_1^{k_1})\cdots f(p_r^{k_r}),$$

fuer je verschiedene Primzahlen $p_1,\dots,p_r$ gilt. Aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten einer Dirichlet-Reihe folgt $f = \tilde f$ und damit ist f multiplikativ. Teil (b) folgt aehnlich. □

* * *

3.9 Der Satz von Perron

Satz 3.9.1 (Perron). *Sei $c > 0$ und die Reihe $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ konvergiere gleichmäßig absolut in $\mathrm{Re}(s) > c - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $x > 0,\ x \notin \mathbb{N}$,*

$$\sum_{n\le x} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(s)x^s\frac{ds}{s}.$$

Ist $x \in \mathbb{N}$, dann muss a_x durch $\frac{1}{2}a_x$ ersetzt werden.

Sei

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2} & y = 1, \\ 1 & y > 1. \end{cases}$$

Lemma 3.9.2. *Sei*

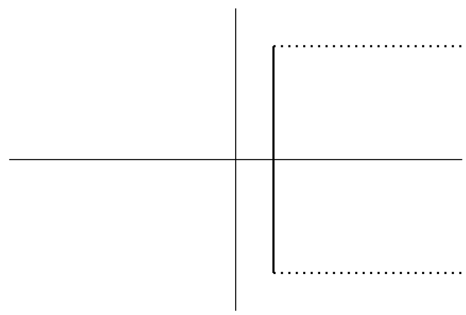
$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} y^s\frac{ds}{s}.$$

Fuer $c, T, y > 0$ gilt dann

$$|I(y,T) - \delta(y)| \ll \begin{cases} y^c \min\left(\frac{1}{T|\log y|}, 1\right) & y < 1, \\ \frac{c}{T} & y \geq 1. \end{cases}$$

Beweis. Sei $0 < y < 1$. Die Funktion y^s/s geht für $\sigma = \mathrm{Re}(s) \to \infty$ gleichmäßig in $t = \mathrm{Im}(s)$ gegen Null. Daher gilt nach dem Residuensatz

$$I(y,T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{\infty+iT} y^s \frac{ds}{s} + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{\infty-iT} y^s \frac{ds}{s}.$$

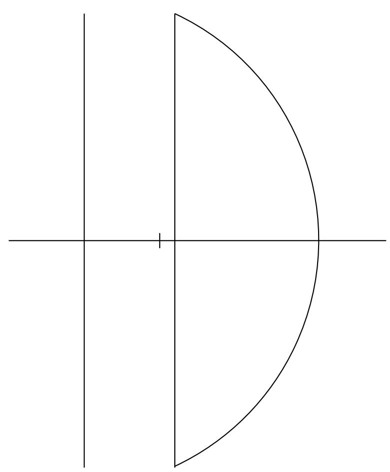


Es ist nun

$$\left|\int_{c\pm iT}^{\infty\pm iT} y^s \frac{ds}{s}\right| \leq \frac{1}{T}\int_c^\infty y^\sigma \, d\sigma = \frac{y^c}{T|\log y|},$$

womit die erste Abschätzung im Fall $0 < y < 1$ bewiesen ist.

Fuer die zweite Abschaetzung im Fall $0 < y < 1$ sei S das Kreissegment vom Radius $r = |c + iT|$ um Null mit Endpunkten $c \pm iT$.



Sei Γ der geschlossene Weg, der aus dem Geradensegment von $c - iT$ nach $c + iT$ gefolgt von S besteht. Wegen $y < 1$ gilt fuer jedes $s \in \Gamma$, dass $|y^s| = y^{\mathrm{Re}(s)} \leq y^c$. Da $\int_\Gamma \frac{y^s}{s}\, ds = 0$, folgt

$$|I(y,T)| \leq y^c \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{r} = y^c.$$

Im Fall $y > 1$ ersetzen wir den vertikalen Integrationsweg durch die entsprechenden Wege, die diesmal links liegen. Der Pol des Integranden bei $s = 0$ liefert das Residuum 1, wohingegen der Integrand wie im vorigen Fall beschraenkt ist. Zuletzt rechnen wir direkt

$$\begin{aligned} I(1,T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T}\frac{idt}{c+it} = \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{c\,dt}{c^2+t^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{T/c}\frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{T/c}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}, \end{aligned}$$

und das letzte Integral ist

$$\int_{T/c}^{\infty}\frac{du}{1+u^2} < \int_{T/c}^{\infty}\frac{du}{u^2} = \frac{c}{T}$$

Bleibt schliesslich der Fall $y = 1$. In diesem Fall schreiben wir $c + iT = Le^{i\alpha}$. Dann ist

$$\begin{aligned} T(y,T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i}\left(\log(c+iT) - \log(c-iT)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(i\alpha + \log L - (-i\alpha + \log L\right) + \frac{1}{2\pi i}2i\alpha = \frac{\alpha}{\pi}. \end{aligned}$$

Nun ist $\alpha = \arctan(T/c)$ und daher ist $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \le \frac{c}{T}$. Hierzu braucht man $\frac{\pi}{2} - \arctan x < \frac{\pi}{x}$. Dies sieht man ein, indem man $f(x) = \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{2} + \arctan x$ betrachtet. Man sieht dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $f'(x) > 0$ fuer alle x, also ist $f(x) > 0$. □

Korollar 3.9.3. *Bei festem $c > 0$ gilt für $y > 0$,*

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s\frac{ds}{s}.$$

Beweis des Satzes. Ist $x \notin \mathbb{N}$, dann gilt wegen gleichmäßiger Konvergenz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(s)x^s\frac{ds}{s} &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} L(s)x^s\frac{ds}{s} \\ &= \lim_{T\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s} \\ &= \lim_{T\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n I\left(\frac{x}{n},T\right) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\left|a_n\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right| \le \frac{|a_n|}{n^c}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{T}\int_{C-iT}^{C+iT} x^c\,ds = \frac{|a_n|}{n^c}\frac{x^c}{\pi}.$$

Wegen der Konvergenz der Dirichlet-Reihe darf der Limes nach dem Satz über dominierte Konvergenz in die Summe gezogen werden, das Ergebnis ist $\sum_{n\le x} a_n$. Der Fall $x \in \mathbb{N}$ geht ebenso. □

Satz 3.9.4. *Für $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^k,\ \ k \in \mathbb{N},\ \ p \text{ Primzahl} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Sei

$$\psi(x) = \sum_{p^m \le x} \log p$$

die **Tschebyscheff-ψ Funktion**. *Dann gilt insbesondere für $x \notin \mathbb{N}$,*

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{ds}{s}.$$

Beweis. Mit der Logarithmus-Reihe $\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ rechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= (\log \zeta(s))' \\ &= \left(\log\left(\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right)' = \left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-ks}}{k}\right)' \\ &= -\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} p^{-ks} \log p = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \end{aligned}$$

Und $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Perron 3.9.1. □

* * *

3.10 Analytische Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion

Wir erinnern zuerst an die Γ-Funktion:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt.$$

Satz 3.10.1. *Das Γ-Integral konvergiert lokal-gleichmäßig absolut für* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Sie erfuellt die Funktionalgleichung:*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

und kann zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Sie ist holomorph in $\mathbb{C}$ ausser für $s = -k$, $k \in \mathbb{N}_0$, wo sie einen einfachen Pol vom Residuum $(-1)^k/k!$ *hat.*

Beweis. Da die Funktion e^{-t} schneller faellt als jede Potenz von t, konvergiert das Integral $\int_1^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt$ lokal-gleichmäßig absolut für alle $s \in \mathbb{C}$ und stellt dort nach dem Satz von Weierstrass eine holomorphe Funktion dar. Der Integrand von $\int_0^1 e^{-t}t^{s-1}\,dt$ ist im Betrag durch $t^{\mathrm{Re}(s)-1}$ abgeschaetzt und daher konvergiert das Integral lokal-gleichmäßig absolut für $\mathrm{Re}(s) > 0$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Fuer $\mathrm{Re}(s) > 0$ rechnen wir mit partieller Integration:

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^s\,dt = -e^{-t}t^s\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}st^{s-1}\,dt = s\Gamma(s).$$

Damit ist die Funktionalgleichung bewiesen. Diese kann man auch so lesen: $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist holomorph in $\mathrm{Re}(s) > -1$ bis auf einen einfachen Pol in $s = 0$ vom Residuum $\Gamma(1) = 1$, also gilt dies für die Γ-Funktion. liest man dann die Funktionalgleichung nochmal, sieht man, dass sie eine holomorphe Fortsetzung nach $\mathrm{Re}(s) > -2$ besitzt mit einem weiteren einfachen Pol in $s = -1$ vom Residuum -1. Die behauptete Fortsetzbarkeit folgt durch Iteration. □

Satz 3.10.2. *Die Riemannsche Zetafunktion*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s},$$

definiert und holomorph fuer $\mathrm{Re}(s) > 1$, *setzt fort zu einer in* $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ *holomorphen Funktion mit einem einfachen Pol bei* $s = 1$ *vom Residuum 1.*

Beweis. Wir rechnen fuer $\mathrm{Re}(s) > 1$ bei ansoluter Konvergenz:

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^\infty t^s\, e^{-t}\, \frac{dt}{t} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \left(\frac{t}{n}\right)^s e^{-t}\, \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^s\, e^{-nt}\, \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty t^s \sum_{n=1}^\infty \left(e^{-t}\right)^n \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty t^s\, \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty t^{s-1}\, \frac{1}{e^t - 1}\, dt \\
&= \int_0^1 t^{s-1}\, \frac{1}{e^t - 1}\, dt + \underbrace{\int_1^\infty t^{s-1}\, \frac{1}{e^t - 1}\, dt}_{\text{ganz}}.
\end{aligned}$$

Das zweite Integral konvergiert fuer alle $s \in \mathbb{C}$ und definiert eine ganze Funktion in s. Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{e^z-1}$ ist homolorph im Kreisring $B_1(0) \smallsetminus \{0\}$ und daher konvergiert dort die Laurent-Reihe

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} + \sum_{n=0}^\infty b_n t^n.$$

Wieder mit absoluter Konvergenz erhalten wir fuer $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{s-1}\, \frac{1}{e^t - 1}\, dt &= \int_0^1 t^{s-1} \left(\frac{1}{t} + \sum_{n=0}^\infty b_n t^n\right) dt \\
&= \int_0^1 t^{s-2}\, dt + \sum_{n=0}^\infty b_n \int_0^1 t^{s-1+n}\, dt \\
&= \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^\infty b_n \frac{1}{s+n}.
\end{aligned}$$

Die letzte Reihe ist eine Mittag-Leffler-Reihe. da sie fuer $\mathrm{Re}(s) > 1$ konvergiert, konvergiert sie in $\mathbb{C} \smallsetminus \{1, 0, -1, -2, \dots\}$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Diese hat einfache Pole in $s = 1, 0, -1, -2, \dots$. Das Residuum in $s = 1$ ist 1. Da die Gamma-Funktion $\Gamma(s)$ einfache Pole in $s = 0, -1, -2, \dots$ hat, folgt die Behauptung. □

* * *

4 Die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion

4.1 Periodische Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt **periodisch** mit **Periode** $L > 0$, falls für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x + L) = f(x).$$

Ist f periodisch mit Periode L, dann ist die Funktion $F(x) = f(Lx)$ periodisch mit Periode 1. Da andererseits $f(x) = F(x/L)$, so reicht es, Funktionen mit Periode 1 zu betrachten. Diese werden dann einfach nur **periodisch** genannt.

Beispiel 4.1.1. Die Funktionen $f(x) = \sin(2\pi x)$, $f(x) = \cos(2\pi x)$, und $f(x) = e^{2\pi ix}$ sind periodisch. Des Weiteren kann jede Funktion auf dem halboffenen Intervall $[0, 1)$ auf eindeutige Weise zu einer periodischen Funktion fortgesetzt werden.

Definition 4.1.2. Der Raum der stetigen periodischen Funktionen wird mit $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ bezeichnet und der Raum der unendlich oft differenzierbaren periodischen Funktionen mit $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Dies ist konsistent mit der Bezeichnung von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ als der Menge der Äquivalenzklassen von $\mathbb{R}$ modulo $\mathbb{Z}$. Mit Hilfe der Abbildung $t \mapsto e^{2\pi it}$ identifiziert man die Menge $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit dem Einheitskreis $\mathbb{T}$.

Definition 4.1.3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch und auf dem Intervall $[0, 1]$ Riemann-integrierbar, d.h. Real- und Imaginärteil sind jeweils Riemann-integrierbar. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei der k-te **Fourier-Koeffizienten** von f als

$$c_k = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}\,dt$$

definiert Die **Fourier-Reihe** von f ist die Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikx}.$$

Definition 4.1.4. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine unbeschränkte Teilmenge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **schnell fallend**, falls für jedes gegebene $N \in \mathbb{N}$ die Funktion $x^N f(x)$ auf D beschränkt ist.

Für $D = \mathbb{N}$ erhält man den Spezialfall einer schnell fallenden Folge.

Beispiele 4.1.5.

- Für $D = \mathbb{N}$ ist die Folge $a_k = \frac{1}{k!}$ schnell fallend.
- Für $D = [0, \infty)$ ist die Funktion $f(x) = e^{-x}$ schnell fallend.
- Für $D = \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ schnell fallend.

Satz 4.1.6 (Fourier-Reihen). *Ist g in $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$,*

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikx},$$

wobei $c_k = c_k(g) = \int_0^1 g(t)e^{-2\pi ikt}\,dt$. Die Summe konvergiert gleichmäßig. Die Fourier-Koeffizienten c_k bilden eine schnell fallende Funktion in $k \in \mathbb{Z}$.

Die Fourier-Koeffizienten c_k sind eindeutig bestimmt, d.h., ist $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Familie komplexer Zahlen so dass die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x}$ lokal-gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert und die Funktion $g(x)$ darstellt. Dann folgt $a_k = c_k(g)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Durch wiederholte partielle Integration erhält man für $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} |c_k(g)| &= \left|\int_0^1 g(t)e^{-2\pi i t k}\,dt\right| = \left|\frac{1}{-2\pi i k}\int_0^1 g'(t)e^{-2\pi i k t}\,dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{-4\pi^2 k^2}\int_0^1 g''(t)e^{-2\pi i k t}\,dt\right| \leq \dots \\ &\leq \frac{1}{(4\pi^2k^2)^n}\left|\int_0^1 g^{(2n)}(t)e^{-2\pi i k t}\,dt\right| \leq \frac{1}{k^{2n}}\int_0^1 |g^{(2n)}(t)|\,dt. \end{aligned}$$

Daher ist die Folge $(c_k(g))$ schnell fallend. Also konvergiert die Summe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g)|$ und da $\left|e^{2\pi i k x}\right| = 1$ ist, konvergiert die Summe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)e^{2\pi i k x}$ gleichmäßig absolut. Es ist nur zu zeigen, dass sie gegen $g(x)$ konvergiert. Es reicht, dies am Punkte $x = 0$ zu tun, denn ist die Konvergenz für jedes g im Punkte $x = 0$ gezeigt, dann kann man für gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion $g_{x_0}(x) = g(x + x_0)$ betrachten, die wieder in $C^\infty(\mathbb{R})$ liegt und man erhält $g(x_0) = g_{x_0}(0) = \sum_k c_k(g_{x_0})$. Wegen $c_k(g_{x_0}) = \int_0^1 g(x + x_0)e^{-2\pi i k x}\,dx = e^{2\pi i k x_0}c_k(g)$ folgt dann die Behauptung. Es reicht also, $g(0) = \sum_k c_k(g)$ zu zeigen. Diese Behauptung gilt für konstante Funktionen. Daher kann man $g(x)$ durch $g(x) - g(0)$ ersetzen und so annehmen, dass $g(0) = 0$ ist, so dass $\sum_k c_k(g) = 0$ zu zeigen ist. Sei

$$h(x) = \frac{g(x)}{e^{2\pi i x} - 1}.$$

Außerhalb der Nullstellen des Nenners ist diese Funktion glatt. Um zu sehen, dass sie auch in den Nullstellen des Nenners, also in $\mathbb{Z}$ glatt ist, reicht es zu zeigen, dass h in einer Umgebung der Null glatt ist, denn die Funktion h ist periodisch. Da $g(0) = 0$, ist die Funktion $\frac{g(x)}{x}$ glatt in einer Umgebung der Null, was man einsieht, wenn man g durch seine Taylor-Entwicklung ersetzt. Ebenso ist die Funktion $\phi(x) = \frac{e^{2\pi i x}-1}{x}$ ist in einer Umgebung der Null glatt. Außerdem ist sie $\neq 0$ in einer Umgebung der Null, also ist $1/\phi(x)$ glatt. Zusammengenommen ist h eine glatte Funktion, also in $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Weiter gilt

$$c_k(g) = \int_0^1 h(x)(e^{2\pi i x} - 1)e^{-2\pi i k x}\,dx = c_{k-1}(h) - c_k(h).$$

Da h in $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ liegt, konvergiert die Reihe $\sum_k c_k(h)$ absolut und es ist $\sum_k c_k(g) = \sum_k (c_{k-1}(h) - c_k(h)) = 0$ wie verlangt.

Nun zur Eindeutigkeit der Fourier-Koeffizienten. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ wie in dem Satz. Die nun folgende Vertauschung von Integration und Summation ist wegen lokal-gleichmäßiger Konvergenz gerechtfertigt. Für $l \in \mathbb{Z}$ gilt

$$c_l(g) = \int_0^1 g(t)e^{-2\pi i l t}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi k t}e^{-2\pi i l t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^1 e^{2\pi k t}e^{-2\pi i l t}\,dt.$$

Nun ist
$$\int_0^1 e^{2\pi kt}e^{-2\pi ilt}\,dt = \int_0^1 e^{2\pi(k-l)t}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l, \\ 0 & \text{falls } k \neq l. \end{cases}$$
Damit folgt $c_l(g) = a_l$. □

* * *

4.2 Die Poissonsche Summenformel

Eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ heißt **Schwartz-Funktion**, falls sie glatt ist und jede Ableitung $f^{(m)}$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ schnell fallend ist. Sei $\mathcal{S}$ die Menge der Schwartz-Funktionen. Für eine Schwartz-Funktion f sei die **Fourier-Transformierte** $\hat{f}$ als
$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-2\pi ixy}\,dx$$
definiert. Da f stetig ist und schnell fällt, existiert das Integral für jedes $y \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.2.1. *Für jedes $f \in \mathcal{S}$ gelten die folgenden Aussagen.*

(a) *Ist $g(x) = f(x)e^{2\pi iax}$ für ein $a \in \mathbb{R}$, dann gilt $\hat{g}(y) = \hat{f}(y-a)$.*

(b) *Ist $g(x) = f(x-a)$, dann gilt $\hat{g}(y) = \hat{f}(y)e^{-2\pi iay}$.*

(c) *Ist $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ für $\lambda > 0$, dann gilt $\hat{g}(y) = \lambda\hat{f}(\lambda y)$.*

(d) *Ist $g(x) = f'(x)$, dann ist $\hat{g}(y) = 2\pi iy\hat{f}(y)$. Es folgt, dass $\hat{f}$ schnell fallend ist.*

(e) *Sind $f, g \in \mathcal{S}$, dann auch das* **Faltungsprodukt**
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy$$
und es gilt
$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Beweis. Die Aussagen (a)-(c) folgen durch ein paar einfache Substitutionen. Für Teil (d) liefert partielle Integration
$$\begin{aligned}\widehat{f'}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi ixy}\,dx \\ &= \underbrace{f(x)e^{-2\pi ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-2\pi iy)e^{-2\pi ixy}\,dx = 2\pi iy\hat{f}(y)\end{aligned}$$

(e) Da g beschraenkt ist und $|f(y)| \leq \frac{C}{1+y^2}$ für eine Konstante $C > 0$, konvergiert das Integral. Da andererseits $|g(z)| \leq \frac{D_k}{1+|z|^k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, sieht man, dass $f * g$ schnell fallend ist. Es gilt nun $f' * g = f * g' = (f * g)'$ und damit ist $f * g$ unendlich oft differenzierbar und alle Ableitungen sind schnell fallend. Schliesslich gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f * g(y) e^{-2\pi i x y}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g(y-z) e^{-2\pi i x y}\, dz\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \int_{-\infty}^{\infty} g(y-z) e^{-2\pi i x y}\, dy\, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-2\pi i x (y+z)}\, dy\, dz = \hat{f}(x)\hat{g}(x).
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.2.2. *Die Funktion $f(x) = e^{-\pi x^2}$ liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und ist ihre eigene Fourier-Transformierte, d.h., es gilt $\hat{f} = f$.*

Beweis. Man zeigt mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass jede Ableitung $f^{(n)}(x)$ in der Form $p_n(x)e^{-\pi x^2}$ geschrieben werden kann, wobei p_n ein Polynom ist. Damit folgt $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zum Beweis der Aussage $\hat{f} = f$ liefert partielle Integration

$$\begin{aligned}
(\hat{f}(y))' &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-2\pi i x) e^{-2\pi i x y}\, dx = i \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi x) e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y}\, dx \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\pi x^2})' e^{-2\pi i x y}\, dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} (-2\pi i y) e^{-2\pi i x y}\, dx \\
&= -2\pi y \hat{f}(y).
\end{aligned}$$

Jede Lösung h der Differentialgleichung $h'(x) = -2\pi x h(x)$ muss ein Vielfaches von $e^{-\pi x^2}$ sein, wie man einsieht, indem man die Funktion $\frac{h(x)}{e^{-\pi x^2}}$ differenziert:

$$(h(x)e^{\pi x^2})' = h'(x)e^{\pi x^2} + h(x)2\pi x e^{\pi x^2} = -2\pi x h(x) e^{\pi x^2} + 2\pi x h(x) e^{\pi x^2} = 0.$$

Also existiert eine Konstante c mit $h(x) = e^{\pi x^2}$, oder $h(x) = ce^{-\pi x^2}$. Es folgt $\hat{f}(y) = ce^{-\pi y^2}$. Um c zu bestimmen setze $y = 0$. Es ist

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Damit ist $c = 1$ also $\hat{f} = f$. □

Satz 4.2.3. *Die Fourier-Transformation ist eine Bijektion $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Es gilt die Inversionsformel:*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

Beweis. Sei $T(f)(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$. Wir muessen zeigen $T(f) = f$ fur jedes $f \in \mathcal{S}$. Sei $f_0(x) = e^{-\pi x^2}$. Dann gilt

$\hat{f_0} = f_0$, also $T(f_0)(x) = \hat{\hat{f_0}}(-x) = \hat{f_0}(-x) = f_0(-x) = f_0(x)$, da f_0 auch gerade ist, also insgesamt

$$T(f_0) = f_0.$$

Nimm zunaechst an, dass $f(0) = 0$ gilt. Nach dem Satz ueber Taylor-Entwicklung ist dann die Funktion $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ glatt.

Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\phi \equiv 1$ in einer Umgebung der Null. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \phi(x)f(x) + (1-\phi(x))f(x) \\ &= x\phi(x)g(x) + x\frac{x(1-\phi(x))f(x)}{x^2} \\ &= xh(x) \end{aligned}$$

mit einer Funktion $h \in \mathcal{S}$. Damit folgt

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \hat{h}}{\partial x}(x).$$

Und daher

$$T(f)(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x}(x)\,dx = 0 = f(0).$$

Sei nun $f \in \mathcal{S}$ beliebig. Sei dann

$$h(x) = f(x) - f(0)f_0(x).$$

Dann ist $h \in \mathcal{S}$ und wegen $f_0(0) = 1$ folgt dann $h(0) = 0$ Also $T(h)(0) = 0$ oder

$$T(f)(0) = f(0)T(f_0)(0) = f(0)f_0(0) = f(0).$$

Schliesslich sei $f \in \mathcal{S}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $g(x) = f(x + x_0)$. Dann ist

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y + x_0)e^{-2\pi ixy}\,dy = e^{2\pi ixx_0}\hat{f}(x).$$

Also

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(0) = T(g)(0) = \hat{\hat{g}}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\langle x,x_0\rangle}\hat{f}(x)\,dx = T(f)(x_0). \end{aligned}$$ □

Satz 4.2.4 (Poissonsche Summenformel)**.** *Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann gilt*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$

Beweis. Sei $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$. Da f schnell fallend ist, konvergiert die Reihe absolut gleichmäßig und definiert eine stetige periodische Funktion g. Dasselbe gilt für sämtliche Ableitungen und daher folgt, dass g unendlich oft differenzierbar ist. Es folgt, dass die Fourier-Reihe von g gleichmäßig konvergiert und die Funktion überall darstellt. Es gilt also insbesondere:

$$\sum_k f(k) = g(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k(0),$$

wobei $c_k = \int_0^1 g(x)e^{-2\pi ikx}\,dx$. In der folgenden Rechnung wird $e_k(0) = 1$ benutzt, sowie die Tatsache dass Integration und Summation wegen gleichmäßiger Konvergenz vertauscht werden dürfen. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 g(x)e^{-2\pi ikx}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x+l)e^{-2\pi ikx}\,dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+l)e^{-2\pi ikx}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_l^{l+1} f(x)e^{-2\pi ikx}\,dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ikx}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k).\end{aligned}$$ □

Satz 4.2.5 (Theta-Reihe)**.** *Für $t > 0$ sei*

$$\Theta(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-t\pi k^2}.$$

Dann gilt für jedes $t > 0$,

$$\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\Theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Beweis. Sei $f_t(x) = e^{-t\pi x^2}$. Nach obigem Beispiel gilt $\hat{f}_1 = f_1$, also nach Proposition 4.2.1,

$$\hat{f}_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} f_{1/t}(x).$$

Die Poissonsche Summenformel impliziert dann die Behauptung. □

* * *

4.3 Die Zetafunktion

Sei wieder

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

die Riemannsche Zetafunktion. Diese besitzt eine Fortsetzung zu einer Meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$.

Satz 4.3.1. *Die Funktion*
$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$
erfuellt die Funktionalgleichung
$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s).$$
Die Nullstellen der Zetafunktion liegen bei $s = -2m$, $m \in \mathbb{N}$ (triviale Nullstellen) und im Gebiet $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ (nichttriviale Nullstellen).

Die beruehmte **Riemannsche Vermutung** besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen bei $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen sollen.

Beweis. Die Aussage ueber die Konvergenz und Holomorphie wurde allgemeiner in Satz 3.7.1 bewiesen. Fuer die Funktionalgleichung rechnen wir für $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{\pi})^s} \int_0^\infty e^{-t} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{n^2\pi}\right)^{s/2} \frac{dt}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-tn^2\pi} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2\pi}\right) t^{s/2} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\Theta(t) - 1)\, t^{s/2} \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Die Funktion $\frac{1}{2}(\Theta(t) - 1)$ erfuellt für $t \geq 1$,

$$\frac{1}{2}(\Theta(t) - 1) \leq e^{-(t-1)\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi}$$

und ist deshalb schnell fallend. Also ist

$$A(s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty (\Theta(t) - 1)\, t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

eine ganze Funktion. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 (\Theta(t)-1)\, t^{s/2}\frac{dt}{t} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Theta(t)t^{s/2}\frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int_0^1 t^{s/2-1}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Theta(t)t^{s/2}\frac{dt}{t} - \frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty \Theta\left(\frac{1}{t}\right)t^{-s/2}\frac{dt}{t} - \frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty \sqrt{t}\Theta(t)t^{-s/2}\frac{dt}{t} - \frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty \Theta(t)t^{(1-s)/2}\frac{dt}{t} - \frac{1}{s} \\
&= A(1-s) + \frac{1}{2}\int_1^\infty t^{(1-s)/2}\frac{dt}{t} - \frac{1}{s} \\
&= A(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Wir stellen also fest,

$$\hat{\zeta}(s) = A(s) + A(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s} = \hat{\zeta}(1-s).$$

Die Aussagen ueber die Nullstellen werden spaeter bewiesen. □

* * *

4.4 Werte an den ganzen Zahlen

Satz 4.4.1. *Die Werte der Zetafunktion an den negativen ganzen Zahlen sind rational. Genauer ist*

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

und

$$\zeta(-2n) = 0,$$

fuer $n \in \mathbb{N}$ und

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n},$$

wobei die **Bernoulli-Zahlen** $B_k \in \mathbb{Q}$ *definiert sind durch*

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k.$$

Es ist $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}$. Die Werte an den positiven geraden Zahlen sind gegeben durch

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}.$$

Insbesondere ist

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Die Werte an den positiven Zahlen ergeben sich durch die Funktionalgleichung aus denen an den negativen, so dass nur diese bewiesen zu werden brauchen.

Zum Beweis brauchen wir ein Lemma.

Lemma 4.4.2. *Fuer* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *gilt*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,dt.$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{n}\right)^s \frac{dt}{t} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-tn} t^s \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^s \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,dt.\end{aligned}$$

□

Beweis des Satzes. Wir definieren die B_k wie im Satz. Aus der Gleichung

$$\frac{t}{e^t - 1} - \frac{-t}{e^{-t} - 1} = -t$$

folgt, dass abgesehen von $B_1 = -\frac{1}{2}$ alle B_k mit ungeraden k verschwinden. Das Integral

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,dt.$$

wird zerlegt in $\int_0^1 + \int_1^\infty = A(s) + B(s)$. DasIntgeral $B(s) = \int_1^\infty$ konvergiert für alle $s \in \mathbb{C}$ und stellt damit eine ganze Funktion dar. Die Potenzreihe $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} t^k$ konvergiert für $|t| < 2\pi$ und damit auf $[0, 1]$ gleichmäßig. Damit ist für $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\begin{aligned}A(s) &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 \frac{B_k}{k!} t^{k+s-2}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} \frac{1}{k+s-1} t^{k+s-1}\Big|_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} \frac{1}{k+s-1}.\end{aligned}$$

Diese Mittag-Leffler-Reihe konvergiert für $s > 1$ absolut und damit überall außerhalb der Pole. Daher ist $\zeta(s)\Gamma(s)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph mit Ausnahme von $1 - \mathbb{N}_0$ und in $s = 1 - k$ hat es das Residuum $\frac{B_k}{k!}$. Die Funktion $\Gamma(s)$ hat einen einfachen Pol in $s = 1 - k$, $k \in \mathbb{N}$ vom Residuum $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$. Daher folgt dann für $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\zeta(1-k) = \frac{B_k}{k!}(-1)^{k-1}(k-1)! = (-1)^{k+1}\frac{B_k}{k}.$$

Also verschwindet $\zeta(-2n)$, $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta(1-2n) = -B_{2n}/2n$ wie versprochen. Die Werte an den positiven Zahlen ergeben sich dann aus der Funktionalgleichung. $\square$

* * *

5 Der Primzahlsatz

5.1 Formulierung

Fuer reelles $x \ge 0$ sei
$$\pi(x) = \#\{\, p \text{ Primzahl},\ p \le x \,\}.$$

Satz 5.1.1 (Primzahlsatz)**.** *Fuer $x \to \infty$ gilt*
$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Dieser Satz wird in den naechsten Abschnitten bewiesen.

* * *

5.2 Chebyshev-Funktionen

Sei
$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p,$$
wobei die Summe ueber alle Primzahlen $\le x$ laeuft. Ferner sei
$$\psi(x) = \sum_{p^m \le x} \log p,$$
wobei die Summe ueber alle Primzahlen p und alle natuerlichen $m \in \mathbb{N}$ laeuft, so dass $p^m \le x$. So ist zum Beispiel
$$\psi(10) = 3\log 2 + 2\log 3 + \log 5 + \log 7.$$

Ferner sei
$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^m,\ m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
die **Mangoldt-Funktion**. Es ist klar, dass
$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \quad \text{und} \quad \Lambda(n) = \psi(n) - \psi(n-1),$$
sowie
$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \dots$$
und
$$\psi(x) = \sum_{p \le x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p.$$

Satz 5.2.1. *Seien*

$$l_1 = \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x}, \qquad L_1 = \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x},$$
$$l_2 = \liminf_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}, \qquad L_2 = \limsup_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x},$$
$$l_3 = \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}, \qquad L_3 = \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

Dann gilt $l_1 = l_2 = l_3$ und $L_1 = L_2 = L_3$. Das bedeutet insbesondere, der Primzahlsatz ist aequivalent zu $\psi(x) \sim x$.

Beweis. Wir fuehren den Beweis von $L_1 = L_2 = L_3$ aus, der von $l_1 = l_2 = l_3$ laeuft dann ebenso. Aus den obigen Formeln folgt $\vartheta(x) \le \psi(x)$ und dass

$$\psi(x) \le \sum_{p\le x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \log x \sum_{p \le x} 1,$$

also

$$\vartheta(x) \le \psi(x) \le \log x\, \pi(x).$$

Wir teilen durch x und lassen $x \to \infty$ gehen, dann folgt

$$L_2 \le L_3 \le L_1.$$

Waehle eine reelle Zahl $0 < \alpha < 1$. Fuer $x > 1$ gilt dann

$$\vartheta(x) \ge \sum_{x^\alpha < p \le x} \log p$$

und wegen $\log p > \log x^\alpha$ folgt

$$\vartheta(x) \ge \alpha \log x \sum_{x^\alpha < p \le x} 1,$$

was soviel bedeutet wie

$$\vartheta(x) \ge \alpha \log x \left(\pi(x) - \pi(x^\alpha)\right).$$

Wegen $\pi(x^\alpha) < x^\alpha$ erhalten wir

$$\vartheta(x) > \alpha\pi(x) \log x - \alpha x^\alpha \log x,$$

oder

$$\frac{\vartheta(x)}{x} > \alpha\pi(x)\frac{\log x}{x} - \alpha\frac{\log x}{x^{1-\alpha}}.$$

Wegen $0 < \alpha < 1$ folgt $(\log x/x^{1-\alpha}) \to 0$ für $x \to \infty$. Daher

$$L_2 \ge \alpha L_1,$$

fuer jedes $0 < \alpha < 1$, so dass die Behauptung folgt. □

* * *

5.3 Der Satz von Hadamard und de la Vallée-Poussin

Satz 5.3.1. *Ist $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, dann gilt $\zeta(1+it) \neq 0$.*

Beweis. Nach Satz 3.8.5 hat die Riemannsche Zeta-Funktion das Euler-Produkt

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

fuer $\mathrm{Re}(s) > 1$. Wir nehmen den Logarithmus und erhalten

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p \sum_{k=1}^\infty \frac{p^{-ks}}{k} = \sum_p \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{kp^{ks}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n}{n^s},$$

wobei

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & n = p^k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist

$$\log|\zeta(s)| = \mathrm{Re}(\log\zeta(s)) = \mathrm{Re}\left(\sum_n \frac{c_n}{n^s}\right).$$

Ist $s = \sigma + it$, dann ist

$$\frac{c_n}{n^s} = \frac{c_n}{n^\sigma} n^{-it} = \frac{c_n}{n^\sigma}\left(\cos(t\log n) - i\sin(t\log n)\right),$$

so dass

$$\log|\zeta(s)| = \sum_{n=2}^\infty \frac{c_n}{n^\sigma}\cos(t\log n).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} &\log|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)| \\ &= 3\log|\zeta(\sigma)| + 4\log|\zeta(\sigma+it)| + \log|\zeta(\sigma+2it)| \\ &= \sum \frac{c_n}{n^\sigma}(3 + 4\cos(t\log n) + \cos(2t\log n)) \geq 0, \end{aligned}$$

da für reelles θ gilt

$$c_n \geq 0, \quad \text{und} \quad 3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0.$$

Deshalb

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)| \geq 1, \quad \sigma > 1,$$

so dass

$$|(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}.$$

Wir zeigen nun, dass die Annahme $\zeta(1+it_0)=0$ für $t_0 \neq 0$ zu einem Widerspruch fuehrt. Denn setzen wir $t=t_0$ und lassen $\sigma \to 1$, dann geht die rechte Seite gegen ∞, wohingegen die linke Seite einen endlichen Grenzwert hat. $\square$

Korollar 5.3.2. *Sei $L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichlet-Reihe mit beschraenkten positiven Koeffizienten $0 \leq a_n \leq T$. Nimm an, die Funktion $L(s)$, $\mathrm{Re}(s)>1$ setzt holomorph fort nach $\mathrm{Re}(s)=1$ bis auf einen einfachen Pol in $s=1$. Dann gilt $L(1+it)\neq 0$ für alle reellen $t\neq 0$.*

Beweis. Im Beweis des Satzes wurde nur $c_n \geq 0$ gebraucht. $\square$

* * *

5.4 Der Satz von Wiener-Ikehara

Definition 5.4.1. Eine Schwartz-Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ heisst **Paley-Wiener-Funktion**, falls $\hat{f}$ kompakten Traeger hat. Sei $PW(\mathbb{R})$ die Menge der Paley-Wiener Funktionen, dann gilt

$$PW(\mathbb{R}) = \widehat{C_c^\infty(\mathbb{R})}.$$

Satz 5.4.2. *Sei $A(x)\geq 0$ eine monoton wachsende Funktion auf $(0,\infty)$. Nimm an, dass das Integral*

$$L(s)=\int_0^\infty A(x)e^{-sx}\,dx$$

fuer $\mathrm{Re}(s)>1$ konvergiert gegen eine Funktion $L(s)$, die für $\mathrm{Re}(s)\geq 1$ holomorph ist, bis auf einen einfachen Pol bei $s=1$ vom Residuum 1. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}A(x)=1.$$

Beweis. Sei $f \in PW(\mathbb{R})$ eine Paley-Wiener-Funktion. Sei

$$g(s)=L(s)-\frac{1}{s-1}.$$

Dann ist g holomorph in $\left\{\mathrm{Re}(s)\geq 1\right\}$. Sei

$$F(x)=\begin{cases} e^{-x}A(x) & x>0,\\ 0 & x\leq 0.\end{cases}$$

Fuer $\mathrm{Re}(s) > 1$ folgt
$$g(s) = \int_0^\infty (F(x) - 1)e^{-(s-1)x}\,dx.$$
Sei $\varepsilon > 0$. Fuer $y \in \mathbb{R}$ ist das Integral
$$\int_{-\infty}^\infty g(1 + \varepsilon + 2\pi it)\hat{f}(t)e^{2\pi ity}\,dt$$
gleich
$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty (F(x) - 1)e^{-(\varepsilon+2\pi it)x}\hat{f}(t)e^{2\pi ity}\,dx\,dt \\
&= \int_0^\infty (F(x) - 1)e^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi itx}\hat{f}(t)e^{2\pi ity}\,dt\,dx \\
&= \int_0^\infty (F(x) - 1)e^{-\varepsilon x} f(y - x)\,dx
\end{aligned}$$
Wir duerfen hier die Integrationsreihenfolge wegen absoluter Konvergenz vertauschen. Da g in $\left\{\mathrm{Re}(s) \geq 1\right\}$ analytisch ist, koennen wir ε gegen Null gehen lassen und erhalten
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty g(1 + 2\pi it)\hat{f}(t)e^{2\pi ity}\,dt &= \int_0^\infty (F(x) - 1)f(y - x)\,dx \\
&= \int_{-y}^\infty (F(x + y) - 1)f(-x)\,dx.
\end{aligned}$$
Als Fourier-Transformation einer Schwartz-Funktion geht dies gegen Null, wenn $y \to \infty$. Wir ersetzen $f(x)$ durch $f(-x)$ und sehen also, dass für jedes $f \in PW(\mathbb{R})$,
$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^\infty F(x + y)f(x)\,dx &= \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^\infty F(x + y)f(x)\,dx \\
&= \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^\infty f(x)\,dx \qquad (*) \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.
\end{aligned}$$
Es gilt nun für $x, y > 0$,
$$F(y) = A(y)e^{-y} \leq A(x + y)e^{-(x+y)}e^x = F(x + y)e^x,$$
also $F(y)e^{-x} \leq F(x + y)$, so dass für $f \geq 0$ nach $(*)$ gilt
$$\begin{aligned}
\limsup_{y\to\infty} F(y) \int_0^\infty f(x)e^{-x}\,dx &\leq \limsup_{y\to\infty} \int_{-\infty}^\infty F(x + y)f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx. \qquad (**)
\end{aligned}$$
Sei $f \in PW(\mathbb{R})$ so dass $0 \leq f \leq 1$ und $f(0) = 1$. Sei dann $\delta > 0$ und definiere $f_n(x) = nf(n(x - \delta))$. Dann ist

jedes f_n in $PW(\mathbb{R})$ und es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_n(x)e^{-x}\,dx &= \int_0^\infty n f(n(x-\delta))e^{-x}\,dx\\ &= \int_{-\delta}^\infty n f(nx)e^{-x}\,dx\,e^{-\delta} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx\,e^{-\delta},\end{aligned}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{-\infty}^\infty f_n(x)\,dx}{\int_0^\infty f_n(x)e^{-x}\,dx} = e^{\delta}.$$

Setzt man f_n in (∗∗) ein, so ergibt sich $\limsup_{y\to\infty} F(y) \le e^\delta$ und da $\delta > 0$ beliebig war, ist dieser limes superior ≤ 1.

Seien schliesslich $\varepsilon, \delta > 0$ und $f \ge 0$ so dass $f(-x) = f(x)$, sowie $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$ und $\int_\delta^\infty f(x)\,dx < \varepsilon$. Fuer jedes $0 < x < \delta$ gilt nach obiger Abschaetzung $F(x+y) \le F(y+\delta)e^\delta$. Also folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty F(x+y)f(x)\,dx &\le \int_0^\delta F(x+y)f(x)\,dx + \varepsilon\\ &\le F(y+\delta)e^\delta \int_0^\infty f(x)\,dx + \varepsilon\\ &= F(y+\delta)e^\delta + \varepsilon.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\liminf_{y\to\infty} F(y+\delta) &\ge \lim_{y\to\infty} \int_0^\infty F(x+y)f(x)\,dx\,e^{-\delta} - \varepsilon e^{-\delta}\\ &= \int_0^\infty f(x)\,dx\,e^{-\delta} - \varepsilon e^{-\delta}\\ &= e^{-\delta}(1-\varepsilon).\end{aligned}$$

Hier kann man ε und δ gegen Null gehen lassen und erhaelt insgesamt $\lim_{y\to\infty} F(y) = 1$, also die Behauptung. □

Beweis des Primzahlsatzes. Wir erinnern

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^k,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases} \qquad\qquad \psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n),$$

also $\Lambda(n) = \psi(n) - \psi(n-1)$. der Primzahlsatz besagt, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$. Wir rechnen für $\operatorname{Re}(s) > 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= (\log \zeta(s))' = -\left(\sum_p \log(1-p^{-s})\right)' \\
&= \left(\sum_p \sum_{k=1}^\infty \frac{p^{-ks}}{k}\right)' = -\sum_p \sum_{k=1}^\infty \log(p)\, p^{-ks} \\
&= -\sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\psi(n-1)-\psi(n)}{n^s}.
\end{aligned}$$

Setzen wir $A(x) = \psi(e^x)$, für $x > 0$, so ist A monoton wachsend und für $\operatorname{Re}(s) > 1$ gilt

$$\begin{aligned}
L(s) &= \int_0^\infty A(x)e^{-sx}\,dx = \int_0^\infty \psi(e^x)e^{-sx}\,dx \\
&= \int_1^\infty \psi(t)t^{-s}\,\frac{dt}{t} = \sum_{n=1}^\infty \psi(n) \int_n^{n+1} t^{-s-1}\,dt \\
&= \sum_{n=1}^\infty \psi(n) \frac{n^{-s}-(n+1)^{-s}}{s} = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^\infty \frac{\psi(n)-\psi(n-1)}{n^s} = -\frac{1}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s).
\end{aligned}$$

Diese Funktion ist holomorph in $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ bis auf einen einfachen Pole bei $s = 1$ vom Residuum 1. Mit dem Satz von Wiener-Ikehara folgt

$$1 = \lim_{x\to\infty} A(x)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

Damit ist der Primzahlsatz bewiesen. □

* * *

6 Primzahlen in Progressionen

6.1 Primzahlsatz in Progressionen

Satz 6.1.1. *Seien $a, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd und sei*

$$\pi_{a,m}(x) = \#\left\{ p \le x,\ p \equiv a \mod m \right\}.$$

Dann gilt für $x \to \infty$,

$$\pi_{a,m}(x) \sim \frac{1}{\phi(m)} \frac{x}{\log x},$$

wobei ϕ die Eulersche ϕ-Funktion ist, also

$$\phi(m) = \left|(\mathbb{Z}/m)^\times\right|.$$

Der Satz wird in den naechsten Abschnitten bewiesen.

6.2 Charaktere endlicher abelscher Gruppen

Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Die Anzahl der Elemente $|A|$ wird auch **Ordnung** der Gruppe genannt. Die Gruppe A heisst **zyklisch**, falls sie von einem Element erzeugt wird, d.h., falls es ein $\tau \in A$ gibt, so dass $A = \left\{1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{N-1}\right\}$.

Satz 6.2.1 (Hauptsatz ueber endliche abelsche Gruppen)**.** *Jede endliche abelsche Gruppe A ist isomorph zu einem Produkt $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ von zyklischen Gruppen.*

Beweis. Der Beweis findet sich z.B. in Langs Algebra Buch. □

Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Ein **Charakter** von A ist ein Gruppenhomomorphismus $\chi : A \to \mathbb{T}$, wobei

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

die **Kreisgruppe** ist. Ein Charakter ist also eine Abbildung, die die Gleichung

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$$

fuer alle $a, b \in A$ erfuellt. Sei $\widehat{A}$ die Menge aller Charaktere von A.

Lemma 6.2.2. *Mit dem punktweisen Produkt $(\chi, \eta) \mapsto \chi\eta$ gegeben durch*

$$\chi\eta(a) = \chi(a)\eta(a)$$

wird $\widehat{A}$ eine endliche abelsche Gruppe. Wir nennen $\widehat{A}$ die **duale Gruppe**, *oder das* **Pontryagin Dual** *von A.*

Beweis. Klar. □

Lemma 6.2.3. *Sei A zyklisch von Ordnung N und waehle einen Erzeuger τ von A, also, $A = \left\{1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{N-1}\right\}$ und $\tau^N = 1$. Dann sind die Charaktere von A gegeben durch $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1}$, wobei*

$$\eta_j(\tau^k) = e^{2\pi i k j/N}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Gruppe $\widehat{A}$ ist wieder zyklisch von Ordnung N.

Beweis. Sei η ein Charakter von A. Dann liegt $\eta(\tau)$ in μ_N, also gibt es genau ein $0 \le j \le N-1$ so dass $\eta(\tau) = e^{2\pi i j/N}$ und damit folgt $\eta_j(\tau^k) = e^{2\pi i k j/N}$. Es ist dann auch $\eta = \alpha^j$, wobei $\alpha(\tau) = e^{2\pi i/N}$ ist. □

Fuer eine endliche zyklische Gruppe A ist die duale Gruppe $\widehat{A}$ also ebenfalls zyklisch von derselben Ordnung, also sind diese beiden Gruppen Isomorph. Es gibt viele Isomorphismen und keiner davon ist kanonisch ausgewaehlt. Wenn man allerdings einen Schritt weiter geht, erhaelt man einen kanonischen Isomorphismus von A zu seinem **Bidual** $\widehat{\widehat{A}}$.

Satz 6.2.4 (Pontryagin-Dualitaet)**.** *Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Dann ist die Abbildung $A \to \widehat{\widehat{A}}$, $a \mapsto \delta_a$ mit*

$$\delta_a(\chi) = \chi(a)$$

ein Isomorphismus.

Die Abbildung $a \mapsto \delta_a$ ist ein Homomorphismus, denn

$$\delta_{ab}(\chi) = \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) = \delta_a(\chi)\delta_b(\chi).$$

Nach dem folgenden Lemma ist diese Abbildung auch injektiv.

Lemma 6.2.5. *Sei A eine endliche abelsche Gruppe und sei $a \in A$. Nimm an, dass $\chi(a) = 1$ für jedes $\chi \in \hat{A}$. Dann gilt $a = 1$. Es gilt $|A| = |\widehat{A}|$.*

Beweis. Lemma 6.2.3 zeigt, dass die Behauptung für zyklische Gruppen richtig ist. Wir zeigen, dass sie sich auf Produkte vererbt. Fuer das Produkt zweier abelscher Gruppen A, B gilt

$$\begin{aligned} \widehat{A} \times \widehat{B} &\cong \widehat{A \times B}, \\ (\chi, \eta) &\mapsto \big((a,b) \mapsto \chi(a)\eta(b)\big). \end{aligned}$$

Es gelte also $\chi(a)\eta(b) = 1$ fuer alle $a, b \in A \times B$. Insbesondere ist dann $\chi(a) = \chi(a)\eta(1) = 1$ fuer jedes $a \in A$ und damit $\chi \equiv 1$, ebenso folgt $\eta \equiv 1$. Das Lemma folgt. □

Beweis des Satzes. Nach dem Lemma ist die Pontryagin-Abbildung $a \mapsto \delta_a$ injektiv. Da die Kardinalitaet von A mit der von $\widehat{A}$ und diese mit der von $\widehat{\widehat{A}}$ uebereinstimmt, folgt der Satz. □

Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Der Hilbert-Raum $\ell^2(A)$ ist gleich der Menge aller Abbildungen von A nach $\mathbb{C}$. Insbesondere liegen die Charaktere $\chi : A \to \mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ in dem Raum $\ell^2(A)$. Das Skalarprodukt ist

$$\langle f, g \rangle = \sum_{a \in A} f(a)\overline{g(a)}.$$

Proposition 6.2.6 (Charaktersumme)**.** *Seien χ, η Charaktere von A. Dann gilt für das Skalarprodukt*

$$\langle \chi, \eta \rangle = \begin{cases} |A| & \text{falls } \chi = \eta, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist

$$\sum_{a \in A} \chi(a)\overline{\eta(a)} = |A|\delta_{\chi,\eta}, \qquad \textit{(Kronecker-}\delta\textit{)}.$$

Indem wir dieselbe Aussage auf $\widehat{A}$ anwenden, finden wir für $a, b \in A$,

$$\sum_{\chi \in \widehat{A}} \chi(a)\overline{\chi(b)} = |A|\delta_{a,b}.$$

Beweis. Betrachte zunaechst den Fall $\chi = \eta$. Dann gilt

$$\langle \chi, \eta \rangle = \sum_{a \in A} \chi(a)\overline{\eta(a)} = \sum_{a \in A} |\chi(a)|^2 = \sum_{a \in A} 1 = |A|.$$

Sei nun $\chi \neq \eta$. Sei $a_0 \in A$ ein Element mit $\chi(a_0) \neq \eta(a_0)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \chi(a_0)\langle \chi, \eta \rangle &= \chi(a_0) \sum_{a \in A} \chi(a)\overline{\eta(a)} = \sum_{a \in A} \chi(a_0 a)\overline{\eta(a)} \\ &= \sum_{a \in A} \chi(a)\overline{\eta(a_0^{-1}a)} = \sum_{a \in A} \chi(a)\overline{\eta(a_0)^{-1}\eta(a)} \\ &= \eta(a_0) \sum_{a \in A} \chi(a)\overline{\eta(a)} = \eta(a_0)\langle \chi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Wegen $\chi(a_0) \neq \eta(a_0)$ folgt $\langle \chi, \eta \rangle = 0$. □

* * *

6.3 Dirichlet L-Reihen

Sei $m \in \mathbb{N}$ fest gewaehlt. Wir betrachten die endliche abelsche Gruppe $A = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. Ein Charakter $\chi : A \to \mathbb{T}$ wird als Funktion auf den $k \in \mathbb{Z}$ mit $(k, m) = 1$ aufgefasst und dann fortgesetzt nach $\mathbb{Z}$, indem wir $\chi(k) = 0$ setzen, falls $(k, m) \neq 1$. Fuer einen solchen Charakter χ modulo m setzen wir

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Da $|\chi(n)| \leq 1$, konvergiert diese Reihe nach Satz 3.7.1 für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Da χ stark multiplikativ ist, hat $L(\chi, s)$ das Euler-Produkt

$$L(\chi, s) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

Satz 6.3.1. (a) *Ist χ ein nichttrivialer Charakter modulo m, dann konvergiert die Reihe $L(\chi, s)$ lokal-gleichmäßig für* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.*

(b) *Ist χ_0 der triviale Charakter modulo m, dann setzt $L(\chi_0, s)$ zu einer meromorphem Funktion in* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *fort. Diese ist holomorph, ausser für $s = 1$, wo sie einen einfachen Pol vom Residuum $\frac{\phi(m)}{m}$ hat.*

Beweis. Nach Proposition 6.2.6 gilt $\sum_{k=n}^{m+n} \chi(k) = 0$. Daher sind die partiellen Summen $A_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} \chi(k)$ beschraenkt und Teil (a) folgt aus Satz 3.7.4.

Fuer Teil (b) beachte, dass $\chi_0(p) = 0$ genau dann, wenn $p|m$, so dass wir für $\mathrm{Re}(s) > 1$ erhalten

$$L(\chi_0, s) = \prod_{p \nmid m} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \zeta(s) \prod_{p|m} (1 - p^{-s}).$$

Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ hat einen einfachen Pol bei $s = 1$ vom Residuum 1, so dass $L(\chi_0, s)$ einen einfachen Pol vom Residuum

$$\prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\phi(m)}{m}$$

erbt. □

Lemma 6.3.2. *Sei*

$$F(s) = \prod_\chi L(\chi, s),$$

wobei das Produkt ueber alle Dirichlet-Charaktere χ modulo m laeuft. Dann gilt $F(s) \geq 1$ für alle $s > 1$. Insbesondere hat $f(s)$ keine Nullstelle in $s = 1$.

Beweis. Fuer $s > 1$ gilt

$$F(s) = \prod_\chi \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}.$$

Die Behauptung folgt aus der Umordnung der folgenden absolut konvergenten Reihen

$$\begin{aligned}\log(F(s)) &= \sum_\chi \sum_p \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{\nu}\left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^\nu \\ &= \sum_p \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{\nu p^{\nu s}} \sum_\chi \chi(p^\nu) = \sum_{\substack{p,\nu \\ p^\nu \equiv 1(m)}} \frac{\phi(m)}{\nu p^{\mu s}} \ge 0\end{aligned}$$

□

Satz 6.3.3. (a) *Fuer jeden Charakter χ modulo m und jedes reelle $t \neq 0$ gilt*

$$L(\chi, 1+it) \neq 0.$$

(b) *Sei $\chi \neq \chi_0$ ein nichttrivialer Charakter modulo m. Dann ist $L(\chi, 1) \neq 0$.*

Beweis. (a) Indem man Korollar 5.3.2 auf die Funktion $F(s)$ aus dem Lemma anwendet, folgt $F(1+it) \neq 0$, woraus die Behauptung folgt.

(b) **Angenommen**, $L(\chi, 1) = 0$. Da $F(s)$ nach dem letzten Lemma keine Nullstelle in $s = 1$ hat, ist χ der einzige Charakter modulo m, für den $L(\chi, s)$ in $s = 1$ verschwindet. Insbesonder ist χ reell, da sonst $\overline{\chi}$ die gleiche Eigenschaft haette. Setze $G(s) = \zeta(s)L(\chi, s)$. Dann ist $G(s)$ holomorph in $\mathrm{Re}(s) > 0$. Es ist

$$G(s) = \zeta(s)L(\chi, s) = \sum_n \frac{a_n}{n^s},$$

mit $a_n = \sum_{d|n} \chi(d)$. Da χ multiplikativ ist, gilt dasselbe für a_n. Es ist

$$a_{p^r} = \sum_{k=0}^r \chi(p^k) = \sum_{k=0}^r \chi(p)^k.$$

daher ist stets $a_{p^r} \ge 1$, ausser wenn $\chi(p) = -1$ und r ungerade ist. In diesem Fall ist $a_{p^r} = 0$. Wegen der Multiplikativitaet folgt $a_n \ge 0$ und $a_{n^2} \ge 1$ für alle n. Nach dem Satz von Landau 3.8.2 konvergiert die Dirichlet-Reihe $G(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$. Also insbesondere für $s = \frac{1}{2}$. Aber

$$\sum_n \frac{a_n}{\sqrt{n}} \ge \sum_n \frac{a_{n^2}}{n} \ge \sum_n \frac{1}{n} = \infty,$$

ein **Widerspruch!** □

Lemma 6.3.4. *Sei $a \in \mathbb{Z}$, teilerfremd zu m, so gilt für* $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\sum_{n \equiv a(m)} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{1}{\phi(m)} \sum_\chi \overline{\chi(a)} \frac{L'}{L}(\chi, s).$$

Beweis. Wegen $L(\chi, s) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$ ist

$$\frac{L'}{L}(\chi, s) = (\log L(\chi, s))' = \left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(p^k)}{kp^{ks}} \right)'$$
$$= -\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \log p \frac{\chi(p^k)}{p^{ks}},$$

fuer ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $ab \equiv 1(m)$ gilt

$$-\frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \frac{L'}{L}(\chi, s) = \frac{1}{\phi(m)} \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \log p \frac{1}{p^{ks}} \sum_{\chi} \chi(p^k b)$$
$$= \sum_{\substack{k,p \\ p^k \equiv a(m)}} \log p \frac{1}{p^{ks}} = \sum_{n \equiv a(m)} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

□

Zum Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes sei nun

$$\psi_a(x) = \sum_{\substack{p^k \leq x \\ p^k \equiv a(m)}} \log p,$$

sowie

$$\Lambda_a(n) = \psi_a(n) - \psi_a(n-1) = \begin{cases} \log p & n = p^k \equiv a(m), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze nun $A_a(x) = \psi_a(e^x)$, dann laeuft der Beweis komplett analog zum Beweis des Primzahlsatzes.

* * *

7 Die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion

7.1 Die Jensensche Formel

Lemma 7.1.1. *Sei f eine ganze Funktion mit*

$$\mathrm{Re}(f(z)) \leq C|z|^{\lambda}$$

fuer alle z mit $|z| \geq T$ mit Konstanten $T, C, \lambda > 0$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq [\lambda]$.

Beweis. Fuer $k, n \in \mathbb{N}$ gelten die Orthogonalitaetsrelationen

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt)\sin(nt)\,dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt)\cos(nt)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin(kt)\sin(nt)\,dt = \begin{cases} \pi & k = n, \\ 0 & k \neq n. \end{cases}$$

Indem man $f(z)$ durch $f(z) - f(0)$ ersetzt, kann man $f(0) = 0$ annehmen. Dann hat f die Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) z^n,$$

mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Schreiben wir $z = re^{i\theta}$, so folgt

$$\mathrm{Re}\, f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos(n\theta) - b_n \sin(n\theta)\right).$$

Wegen gleichmäßiger Konvergenz duerfen wir Summe und Integral vertauschen:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\,\mathrm{Re}(f(re^{i\theta}))\,d\theta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\cos(n\theta) - b_n \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\sin(n\theta)\,d\theta\right) = a_k r^k \pi. \end{aligned}$$

Dies gilt auch für $k = 0$, also gilt $\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f(z))\,d\theta = 0$. Wegen $\mathrm{Re}(f(z)) \leq C|z|^{\lambda} = Cr^{\lambda}$ folgt

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq \frac{1}{\pi r^k} \int_0^{2\pi} |\mathrm{Re}(f(z))|\,d\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^k} \int_0^{2\pi} |\mathrm{Re}(f(z))| + \mathrm{Re}(f(z))\,d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi r^k} \int_0^{2\pi} 2\max(0, \mathrm{Re}(f(z)))\,d\theta \\ &\leq \frac{2}{\pi r^k} \cdot 2\pi C r^{\lambda} = 4Cr^{\lambda-k}. \end{aligned}$$

Mit $r \to \infty$ folgt $a_k = 0$ für $k > \lambda$. Analog mit sin anstatt cos erhaelt man $b_k = 0$ für $k > \lambda$ und damit ist die Behauptung gezeigt. □

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass es genuegt, die Abschaetzung für alle $|z| - R_\nu$ zu haben, wobei R_ν eine Folge von Radien ist, die gegen Unendlich geht.

Definition 7.1.2. Sei f eine ganze Funktion. Die Zahl $\alpha \in [0, \infty]$, definiert durch

$$\alpha = \inf\left\{\beta : f(z) = O(\exp(|z|^\beta))\right\}$$

heisst **Ordnung** von f.

Lemma 7.1.3. *Sei f eine ganze Funktion endlicher Ordnung. Hat f keine Nullstellen, dann ist $f(z) = \exp(p(z))$ für ein Polynom p.*

Beweis. Da f keine Nullstellen hat, existiert ein holomorpher Logarithmus $p(z)$. Es folgt $\mathrm{Re}(p(z)) \leq C|z|^\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass p ein Polynom ist. □

Satz 7.1.4 (Jensensche Formel)**.** *Sei f in einer Umgebung von $\left\{|z| \leq R\right\}$ holomorph und es seien $f(0) \neq 0$ und $f(z) \neq 0$ für $|z| = R$. Seien $z_1, \ldots, z_n$ die Nullstellen von f in $|z| < R$ mit Vielfachheiten gezaehlt. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\theta})\right| d\theta &= \log|f(0)| + \log\frac{R^n}{|z_1 \cdots z_n|} \\ &= \log|f(0)| + \sum_{j=1}^{n} \log\frac{R}{|z_j|}.\end{aligned}$$

Beweis. **1. Fall:** f ist nullstellenfrei in $|z| \leq R$.
Es gilt $f(z) = e^{h(z)}$ fuer ein holomorphes h. Nach Cauchys Integralformel ist

$$h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(Re^{i\theta})\, d\theta.$$

Wegen $\mathrm{Re}(h(z)) = \log|f(z)|$ folgt die Behauptung.

2. Fall: $f(z) = z - \zeta$ für ein $0 < |\zeta| < R$.

In diesem Fall erfolgt der Beweis durch eine **explizite Rechnung** wie folgt:

Es sei

$$Q(z) = \frac{f(z)}{R^2 - z\bar{\zeta}} = \frac{z - \zeta}{R^2 - z\bar{\zeta}}.$$

Fuer $z = Re^{i\theta}$ ist

$$\begin{aligned} |Q(z)| &= \left| \frac{Re^{i\theta} - \zeta}{R^2 - \bar{\zeta} \cdot Re^{i\theta}} \right| = \frac{1}{R} \left| \frac{Re^{i\theta} - \zeta}{R - \bar{\zeta} e^{i\theta}} \right| \\ &= \frac{1}{R} \frac{|Re^{i\theta} - \zeta|}{\overline{|Re^{i\theta} - \zeta|}} = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Q(Re^{i\theta})| \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \log \frac{1}{R} = -\log R.$$

Wegen $|\zeta| < R$ hat $(R^2 - z\bar{\zeta})$ im Kreis $|z| \le R$ keine Nullstelle. Aus Fall 1 folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |R^2 - z\bar{\zeta}| \, d\theta = \log R^2 = 2 \log R.$$

Also

$$\begin{aligned} -\log R &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Q(Re^{i\theta})| \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |R^2 - z\bar{\zeta}| \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \, d\theta - 2 \log R. \end{aligned}$$

Zusammen haben wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \, d\theta = \log R = \log |f(0)| + \log \frac{R}{|\zeta|}$$

wie behauptet.

Der allgemeine Fall ergibt sich aus beiden Spezialfaellen, indem wir

$$f(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n) F(z)$$

mit einem nullstellenfreien $f(z)$ schreiben. □

Satz 7.1.5. *Sei f eine ganze Funktion endlicher Ordnung α. Die Nullstellen von f seien (entsprechend Vielfachheit) $z_1, z_2, \dots$ wobei $|z_j| \le |z_{j+1}|$ gilt. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$*

(a) $\displaystyle\sum_{|z_j| \le R} 1 = O(R^{\alpha+\varepsilon})$ *und*

(b) $\sum_{z_j \neq 0} |z_j|^{-\alpha-\varepsilon} < \infty$.

Beweis. Sei $e < \gamma < 2e$ so gewaehlt, dass f auf $|z| = \gamma R$ keine Nullstelle besitzt. Wegen $\log \gamma > 1$ folgt aus der Jensenschen Formel

$$\begin{aligned}\sum_{|z_j|\le R} 1 \le \sum_{|z_j|\le R} \log \frac{\gamma R}{|z_j|} \le \sum_{|z_j|\le \gamma R} \log \frac{\gamma R}{|z_j|} \\ = -\log|f(0)| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\gamma R e^{i\theta})|\,d\theta \\ \le -\log|f(0)| + \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi(\gamma R)^{\alpha+\varepsilon} = O(R^{\alpha+\varepsilon}).\end{aligned}$$

Das beweist (a). Zum Beweis von (b) sei $N(R) = \sum_{|z_j|<R} 1$ und sei $\alpha < \rho < \alpha + \varepsilon$. Nach (a) ist

$$N(R) < C_\rho R^\rho.$$

Speziell für $R = |z_n|$ folgt

$$n \le N(|z_n|) < C_\rho |z_n|^\rho,$$

also $|z_n|^{-\rho} < C_\rho n^{-1}$ und damit

$$|z_n|^{-\alpha-\varepsilon} = \left(|z|^{-\rho}\right)^{(\alpha+\varepsilon)/\rho} < C_\rho^{(\alpha+\varepsilon)/\rho} \cdot n^{-(\alpha+\varepsilon)/\rho}.$$

Es folgt

$$\sum_{z_j\ne 0} |z_j|^{-\alpha-\varepsilon} \ll \sum_{z_n\ne 0} n^{-(\alpha+\varepsilon)/\rho} < \infty.$$ □

* * *

7.2 Der Hadamardsche Produktsatz

Definition 7.2.1. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei eine komplexe Zahl $z_j \in \mathbb{C}$ gegeben. Man sagt, das **unendliche Produkt** $\prod_{j=1}^\infty z_j$ existiert, falls die Folge

$$p_n = \prod_{j=1}^n z_j$$

in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Der triviale Fall ist der, wenn eines der z_j gleich Null ist. Dann ist auch der Wert des Produktes gleich Null.

Lemma 7.2.2. *Konvergiert das unendliche Produkt $\prod_{j=1}^\infty z_j$ gegen einen Wert ungleich Null, dann geht die Folge (z_j) gegen* 1.

Beweis. Analysis-Buch. □

Proposition 7.2.3. *Es bezeichne* $\log : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ *den Hauptzweig des Logarithmus.*

(a) *Das Produkt $\prod_{j=1}^\infty z_j$ konvergiert genau dann in $\mathbb{C}^\times$, wenn die Summe der Logarithmen $\sum_{j=1}^\infty \log z_j$*

konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \log z_j\right) = \prod_{j=1}^{\infty} z_j.$$

(b) *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $w_j : D \to \mathbb{C}$, so dass $w_j(z) \neq -1$ für alle $z \in D$ und jedes $j \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Summe $\sum_{j=1}^{\infty} w_j(z)$ konvergiert absolut gleichmäßig in $z \in D$.*

(ii) *Die Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \log(1 + w_j(z))$ konvergiert absolut gleichmäßig in $z \in D$.*

Ist dies der Fall, so folgt, dass das Produkt $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + w_j(z))$ lokal-gleichmäßig konvergiert. Man sagt dann, dass das Produkt **absolut konvergiert***.*

Beweis. Analysis-Buch. □

Satz 7.2.4 (Hadamard)**.** *Sei f eine ganze Funktion der Ordnung 1. Sei k die Ordnung der Nullstelle von f bei 0. Seien z_j die Nullstellen $\neq 0$ mit Vielfachheiten gezaehlt. Dann gilt bei lokal-gleichmaessiger Konvergenz des Produktes*

$$f(z) = z^k e^{az+b} \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{z/z_j}.$$

Es gibt auch eine Version fuer beliebige Ordnung. Da wir aber nur Ordnung 1 brauchen, reicht diese Formulierung fuer unsere Zwecke.

Beweis. Wir koennen $k = 0$ annehmen, d.h. $f(0) \neq 0$. Nach Satz 9.1.5 konvergiert die Reihe $\sum_j |z_j|^{-2}$ und daher konvergiert das Produkt

$$P(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{z/z_j}$$

lokal-gleichmäßig absolut konvergent. Dann ist $f(z)/P(z)$ nullstellenfrei und ganz. Wir behaupten, dass $\mathrm{ord}(f/P) \leq 1$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sie im Folgenden R stets so gewaehlt, dass $|R - |z_j|| > |z_j|^{-2}$ für alle j gilt. Es gibt beliebig grosse Radien R, die diese Bedingung erfuellen, denn wir haben $\sum_{|z_j|\leq R} 1 \ll R^{1+\varepsilon}$, also ist unendlich oft $\big||z_j| - |z_{j-1}|\big| \geq R^{-1}$ für $R/2 \leq |z_{j-1}| \leq |z_j| \leq R$. Mit $R = \frac{|z_j|+|z_{j-1}|}{2}$ folgt für $|z_{j-1}| > 4$,

$$|R - |z_{j-1}|| = |R - |z_j|| > \frac{1}{2R} \geq \frac{1}{4|z_{j-1}|} > \frac{1}{|z_{j-1}|^2} \geq \frac{1}{|z_j|^2}.$$

Wir schaetzen nun $|P(z)|$ auf $|z| = R$ nach unten ab und unterscheiden drei Faelle.

<u>1. Fall:</u> $|z_j| \leq R/2$, also $w = z/z_j$ erfuellt $|w| \geq 2$. Es ist dann $|w| - 1 \geq 1$ und wegen $\mathrm{Re}(w) + |w| \geq 0$ ist $e^{\mathrm{Re}(w)+|w|} \geq 1$, so dass insgesamt

$$(|w| - 1)e^{\mathrm{Re}(w)} \geq e^{-|w|}$$

gilt. Damit also

$$\left|\left(1-\frac{z}{z_j}\right)e^{z/z_j}\right| \geq \left(\left|\frac{z}{z_j}\right|-1\right)e^{\mathrm{Re}(z/z_j)} \geq e^{-|z/z_j|} = e^{-R/|z_j|}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\left|\prod_{|z_j|\leq R/2}\left(1-\frac{z}{z_j}\right)e^{z/z_j}\right| &\geq \exp\left(-R\sum_{|z_j|\leq R/2}\frac{1}{|z_j|}\right)\\ &> \exp\left(-R^{1+\varepsilon}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|z_j|^{1+\varepsilon}}\right) \geq \exp\left(-CR^{1+\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

fuer ein $C>0$. Ist R hinreichend gross, ist dies dann $> \exp(-R^{1+2\varepsilon})$.

<u>2. Fall:</u> $|z_j| > 2R$. Zunaechst beachte

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{2^{n-2}n!} &= \frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-1}{2^{n-2}n!} \leq \frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}(n-1)!}\\ &\leq \frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 1\end{aligned}$$

Fuer $|\zeta| \leq \frac{1}{2}$ gilt $1-|\zeta|^2 \geq e^{-c|\zeta|^2}$ falls $c \geq (\log 4 - \log 3)/4$. Daher ist dann

$$\begin{aligned}|(1-\zeta)e^{\zeta}| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n-\zeta^{n+1}}{n!}\right|\\ &= \left|1+\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^n\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}\right)\right|\\ &= \left|1-\sum_{n=2}^{\infty}\zeta^n\frac{n-1}{n!}\right| \geq 1-\left|\sum_{n=2}^{\infty}\zeta^n\frac{n-1}{n!}\right|\\ &\geq 1-|\zeta|^2\sum_{n=2}^{\infty}|\zeta|^{n-2}\frac{n-1}{n!} \geq 1-|\zeta|^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{2^{n-2}n!}\\ &\geq 1-|\zeta|^2 \geq e^{-c|\zeta|^2}.\end{aligned}$$

Damit folgt für hinreichend grosses R

$$\begin{aligned}\left|\prod_{|z_j|>2R}\left(1-\frac{z}{z_j}\right)e^{z/z_j}\right| &\geq \exp\left(-c\sum_{|z_j|>2R}\left(\frac{R}{|z_j|}\right)^2\right)\\ &> \exp\left(-cR^{1+\varepsilon}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|z_j|^{1+\varepsilon}}\right) > \exp\left(-R^{1+2\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

<u>3. Fall:</u> $R/2 \leq |z_j| \leq 2R$.

Wegen $|z/z_j| \le 2$ ist $\mathrm{Re}(z/z_j) \ge -2$ und wegen $\big|R - |z_j|\big| > |z_j|^{-2}$ ist

$$\left|\left(1 - \frac{z}{z_j}\right)e^{z/z_j}\right| = \left|1 - \frac{z}{z_j}\right| \cdot e^{\mathrm{Re}(z/z_j)} \ge \frac{|z - z_j|}{2R}e^{-2}$$
$$\ge \frac{e^{-2}}{2R} \cdot \frac{1}{(2R)^2} > \frac{1}{60R^3}.$$

Nach Satz 9.1.5 gibt es hoechstens $O(R^{1+\varepsilon})$ viele Nullstellen z_j in obigem Bereich, also

$$\left|\prod_{R/2 \le |z_j| \le 2R}\left(1 - \frac{z}{z_j}\right)e^{z/z_j}\right| \ge \left(\frac{1}{60R^3}\right)^{CR^{1+\varepsilon}}.$$

Zusammen erhalten wir

$$|P(z)| \ge \left(\frac{1}{60R^3}\right)^{CR^{1+\varepsilon}} \exp(-2R^{1+2\varepsilon}) > \exp(-R^{1+3\varepsilon})$$

fuer hinreichen grosse R. Da f von der Ordnung 1 ist, folgt für $|z| = R$

$$\left|\frac{f(z)}{P(z)}\right| \ll \frac{\exp(R^{1+\varepsilon})}{\exp(-R^{1+3\varepsilon})} \ll \exp(R^{1+4\varepsilon}),$$

so dass $\log(f/p)$ ein lineares Polynom ist. □

* * *

7.3 Die Gammafunktion, die zweite

Wir erinnern zuerst an die Γ-Funktion:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt.$$

Satz 7.3.1. *Das Γ-Integral konvergiert lokal-gleichmäßig absolut für* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Sie erfuellt die Funktionalgleichung:*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

und kann zu einer meromorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ *fortgesetzt werden. Sie ist holomorph in* $\mathbb{C}$ *ausser für* $s = -k$, $k \in \mathbb{N}_0$, *wo sie einen einfachen Pol vom Residuum* $(-1)^k/k!$ *hat.*

Fuer jedes $s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ *gilt*

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s(n-1)!}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}.$$

Insbesondere hat $\Gamma(s)$ *keine Nullstelle in* $\mathbb{C}$ *und es folgt*

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^s}{1+\frac{s}{n}},$$

sowie

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n},$$

wobei

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k\le n} \frac{1}{k} - \log(n) \right)$$

die **Eulersche Konstante** *ist.*

Beweis. Da die Funktion e^{-t} schneller faellt als jede Potenz von t, konvergiert das Integral $\int_1^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt$ lokal-gleichmäßig absolut für alle $s \in \mathbb{C}$ und stellt dort nach dem Satz von Weierstrass eine holomorphe Funktion dar. Der Integrand von $\int_0^1 e^{-t}t^{s-1}\,dt$ ist im Betrag durch $t^{\mathrm{Re}(s)-1}$ abgeschaetzt und daher konvergiert das Integral lokal-gleichmäßig absolut für $\mathrm{Re}(s) > 0$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Fuer $\mathrm{Re}(s) > 0$ rechnen wir mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^s\,ds \\ &= -e^{-t}t^s\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}st^{s-1}\,ds \\ &= s\Gamma(s).\end{aligned}$$

Damit ist die Funktionalgleichung bewiesen. Diese kann man auch so lesen: $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist holomorph in $\mathrm{Re}(s) > -1$ bis auf einen einfachen Pol in $s = 0$ vom Residuum $\Gamma(1) = 1$, also gilt dies für die Γ-Funktion. liest man dann die Funktionalgleichung nochmal, sieht man, dass sie eine holomorphe Fortsetzung nach $\mathrm{Re}(s) > -2$ besitzt mit einem weiteren einfachen Pol in $s = -1$ vom Residuum -1. Die Behauptete Fortsetzbarkeit folgt durch Iteration. Fuer $n \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{C} \smallsetminus (-\mathbb{N}_0)$ sei

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s(n-1)!}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}.$$

Dann gilt, lokal-gleichmäßig in s,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_{n+1}(s)}{\Gamma_n(s)} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \frac{n}{s+n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} \\ &= \left(1+\frac{s}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{s}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

hieraus folgt $\log \frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n}(s) = O(\frac{1}{n^2})$ lokal-gleichmäßig in s, was beweist, dass die Folge

$$\prod_{n=2}^{N} \frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n} = \frac{1}{\Gamma_2(z)} \Gamma_{N+1}(z)$$

fuer $N \to \infty$ lokal-gleichmäßig in s konvergiert. Also existiert

$$F(s) = \lim_n \Gamma_n(s)$$

und ist ausserhalb von $-\mathbb{N}_0$ holomorph und nullstellenfrei, erfuellt $F(s+1) = sF(s)$ und hat einfache Pole in $-\mathbb{N}_0$, also ist $H(s) = \Gamma(s)/F(s)$ periodisch, also $H(s+1) = H(s)$ und holomorph fuer $\mathrm{Re}(s) > 0$ und damit wegen der Periodizitaet, ueberall, also ist H ganz. Fuer $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt nach der Definition der Gamma-Funktion, dass $|\Gamma(s)| \le \Gamma(\mathrm{Re}(s))$ und daher ist

$$\begin{aligned} |H(s)| = \left|\frac{\Gamma(s)}{F(s)}\right| &= \lim_n \left| \frac{\Gamma(s)s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n^s(n-1)!} \right| \\ &= \lim_n \frac{|\Gamma(s+n)|}{n^{\mathrm{Re}(s)}(n-1)!} \\ &\le \lim_n \frac{\Gamma(\mathrm{Re}\, s+n)}{n^{\mathrm{Re}\, s}(n-1)!} = \frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{F(\mathrm{Re}(s))} = |H(\mathrm{Re}(s))|, \end{aligned}$$

Damit ist die ganze Funktion $H(s)$ beschraenkt, also konstant. Es ist $\Gamma(1) = 1 = F(1)$ und daher folgt $\Gamma(s) = F(s)$. Fuer die erste Produktformel rechne

$$\frac{1}{s} \prod_{n=1}^{N} \frac{(1+\frac{1}{n})^s}{1+\frac{s}{n}} = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{N} \frac{(n+1)^s}{n^s} \frac{n}{n+s} = \frac{(N+1)^s N!}{s(s+1)\cdots(s+N)}.$$

Schliesslich für die zweite Produktformel

$$\begin{aligned} \frac{n^s((n-1)!)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)} &= \frac{n^s}{s} \prod_{j=1}^{n} \left(1+\frac{s}{j}\right)^{-1} \\ &= \frac{e^{s(\log(n)-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n})}}{s} \prod_{j=1}^{n} \left(1+\frac{s}{j}\right)^{-1} e^{s/j}. \end{aligned}$$

Da das letzte Produkt nach der Hadamard-Produktentwicklung konvergiert, konvergiert auch $\log(n) - 1 - \cdots - \frac{1}{n}$ und die Behauptung folgt. □

Satz 7.3.2. *Bei lokal-gleichmäßiger Konvergenz in $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$ gilt*

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right).$$

Beweis. Wegen

$$\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} = \frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{1}{n^2}\frac{2z}{\left(\frac{z}{n}\right)^2 - 1}$$

ist die lokal-gleichmäßige Konvergenz der Reihe klar. Sei $h(z)$ die rechte Seite der behaupteten Gleichung. Dann ist $h(z)$ also meromorph in $\mathbb{C}$. Es gilt

1. $h(z) = h(z+1)$, denn

$$\begin{aligned} & h(z+1) - h(z) \\ &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{z+n+1} + \frac{1}{z-(n-1)} - \frac{1}{z+n} - \frac{1}{z-n} + o(N) \\ &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z+N+1} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z-N} + o(N) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

2. Es gibt ein $C > 0$, so dass für $|\operatorname{Im}(z)| \geq 1$, $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ gilt

$$\frac{2|z|}{|z^2-n^2|} \;=\; \frac{1}{n^2}\frac{2|z|}{|(z/n)^2-1|} \;\leq\; C\frac{2|z|}{n^2}.$$

Das bedeutet $|h(z)| \leq D|z|$ für $|\operatorname{Im}(z)| \geq 1$ und eine Konstante D.

Sei $f(z) = \pi\cot\pi z - h(z)$. dann gilt

- f ist ganz,
- $f(z+1) = f(z)$,
- f ist ungerade, also $f(-z) = -f(z)$,
- $|f(z)| \leq D(|z|+1)$ für eine Konstante D.

Den letzten Punkt erhält man zunächst nur für $|\operatorname{Im}(z)| \geq 1$. Aber wegen der Periodizität ist f auf dem Streifen $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$ ohnehin beschränkt.

Da f ganz ist und die Wachstumsabschätzung erfüllt, folgt nach dem Maximumprinzip, dass $f(z) = az + b$. Wegen der Periodizität ist $a = 0$, da f ungerade ist, folgt $b = 0$. □

Satz 7.3.3. *Fuer $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Beweis. Wir bilden auf beiden Seiten die logarithmische Ableitung. Auf der linken Seite erhaelt man $\pi\cot(\pi z)$. Auf der rechten

$$\frac{(\pi z)'}{\pi z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)'}{1-\frac{z^2}{n^2}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}.$$

Also stimmen die logarithmischen Ableitungen ueberein, woraus

$$\sin(\pi z) = C\pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

mit einer Konstanten C folgt. Wegen $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = 1$ folgt $C = 1$. □

Satz 7.3.4. *Fuer $z \in \mathbb{C}$ gilt*

(a) *(Zweite Funktionalgleichung)*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Insbesondere folgt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

(b) *(Legendre-Verdopplungsformel)*

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, 2^{1-z}\Gamma(z).$$

Beweis. (a) Nach der Produktentwicklung haben wir

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(z)\Big(-z\Gamma(-z)\Big) \\
&= \left(\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^z}{1+\frac{z}{n}}\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{-z}}{1-\frac{z}{n}}\right) \\
&= \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{z^2}{n^2}} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.
\end{aligned}$$

(b) Wir rechnen

$$\begin{aligned}
2^z\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) &= 2^z \lim_{n\to\infty} \frac{n^{z/2}(n-1)!}{\frac{z}{2}(\frac{z}{2}+1)\cdots(\frac{z}{2}+n-1)}\,\frac{n^{(z+1)/2}(n-1)!}{\frac{z+1}{2}(\frac{z+1}{2}+1)\cdots(\frac{z+1}{2}+n-1)} \\
&= 2^z \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}n^{z+\frac{1}{2}}((n-1)!)^2}{z(z+2)\cdots(z+2n-2)}\,\frac{1}{(z+1)(z+3)\cdots(z+2n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[2^{2n}n^{\frac{1}{2}}\frac{(n-1)!^2}{(2N-1)!}\,\frac{(2n)^z(2n-1)!}{z(z+1)\cdots(z+2n-1)}\right] \\
&= C\Gamma(z),
\end{aligned}$$

wobei

$$C = \lim_{n\to\infty}\left[2^{2n}n^{\frac{1}{2}}\frac{(n-1)!^2}{(2n-1)!}\right].$$

Setzt man in $2^z\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = C\Gamma(z)$ den Wert $z = 1$ ein, erhaelt man $2\sqrt{\pi} = C$. □

Satz 7.3.5 (Stirlingsche Formel)**.** *Sei $\delta > 0$. Fuer $|\arg(z)| < \pi - \delta$ und $|z| > \delta$ gilt dann*

(a) $\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O_\delta\left(\frac{1}{|z|}\right)$.

(b) $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log z + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$.

Korollar 7.3.6. *Fuer $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad n \to \infty.$$

Beweis des Korollars. Nach dem Satz gilt

$$\begin{aligned} n! &= \Gamma(n+1) \\ &= \exp\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n+1) - n - 1 + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &\sim (n+1)^{n+\frac{1}{2}}e^{-n-1}\sqrt{2\pi} \\ &= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\to 1}\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1}}_{\to 1}. \end{aligned}$$

□

Beweis des Satzes. Nach der zweiten Produktentwicklung gilt

$$\log\Gamma(z) = -\log z - \gamma z - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{z}{j}\right) - \frac{z}{j}\right).$$

Differenzieren liefert

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+j} - \frac{1}{j}\right).$$

Fuer $\mathrm{Re}(w) > 0$ haben wir

$$\frac{1}{w} = \int_0^\infty e^{-wt}\,dt.$$

Damit gilt für $\mathrm{Re}(z) > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) &= -\gamma - \int_0^\infty e^{-tz}\,dt - \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty \left(e^{(j+z)t} - e^{-jt}\right)dt \\ &= -\gamma + \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\left(\sum_{j=1}^{n} e^{-jt} - e^{-tz}\sum_{j=0}^{n} e^{-jt}\right)dt \\ &= -\gamma + \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-(n+1)t}-1}{e^{-t}-1} - 1 - e^{-tz}\frac{e^{-(n+1)t}-1}{e^{-t}-1}\right)dt \\ &= -\gamma + \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-(n+1)t}-e^{-t}}{e^{-t}-1} - e^{-tz}\frac{e^{-(n+1)t}-1}{e^{-t}-1}\right)dt \\ &= -\gamma + \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\left(e^{-(n+1)t}\frac{1-e^{-tz}}{e^{-t}-1} - \frac{e^{-t}-e^{-tz}}{e^{-t}-1}\right)dt = -\gamma + \int_0^\infty \frac{1-e^{(1-z)t}}{e^t-1}\,dt. \end{aligned}$$

Fuer $\mathrm{Re}(w) > 0$ gilt ferner

$$\log w = \int_1^w \frac{dz}{z} = \int_0^\infty \int_1^w e^{-zt}\,dz\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-wt}}{t}\,dt.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\gamma = \lim_n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log n &= \lim_n \sum_{j=1}^n \int_0^\infty e^{-jt}\,dt - \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-nt}}{t}\,dt \\
&= \lim_n \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}}\,dt - \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-nt}}{t}\,dt \\
&= \lim_n \int_0^\infty \frac{te^{-t} - te^{-(n+1)t} - e^{-t} + e^{-2t} - e^{-nt} + e^{-(n+1)t}}{t(1 - e^{-t})}\,dt \\
&= \lim_n \int_0^\infty e^{-nt}\frac{-te^{-t} - 1 + e^{-t}}{t(1 - e^{-t})} + \frac{te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}}{t(1 - e^{-t})}\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}}{t(1 - e^{-t})}\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{t - 1 + e^{-t}}{t(e^t - 1)}\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{te^t}\,dt
\end{aligned}$$

Zusammen folgt

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{(1-z)t}}{e^t - 1}\,dt - \int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{te^t}\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{te^t} - \frac{e^{(1-z)t}}{e^t - 1}\,dt.$$

Wir ersetzen z durch $z + 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z + 1) &= \int_0^\infty \frac{1}{te^t} - \frac{e^{-zt}}{e^t - 1}\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-tz}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1}\right)dt + \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-tz}\,dt + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{t}\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-tz}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1}\right)dt + \frac{1}{2z} + \log(z).
\end{aligned}$$

Aus $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ folgt $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z + 1) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) + \frac{1}{z}$, so dass

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log(z) - \frac{1}{2z} + \int_0^\infty e^{-tz}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1}\right)dt.$$

Fuer $\mathrm{Re}(z) > \delta$ integrieren wir partiell

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-tz}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1}\right)dt &= -\frac{e^{-tz}}{z}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1}\right)\Bigg|_0^\infty \\
&\quad + \int_0^\infty \frac{e^{-tz}}{z}\left(-\frac{1}{t^2} + \frac{e^t}{(e^t - 1)^2}\right)dt \\
&= \frac{1}{z}\cdot O(1) + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-tz}\left(\frac{e^t}{(e^t - 1)^2} - \frac{1}{t^2}\right)dt.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{e^t}{(e^t - 1)^2} - \frac{1}{t^2} = O(1)$$

auf $0 < t < \infty$. Also

$$\int_0^\infty e^{-tz}\left(\frac{e^t}{(e^t - 1)^2} - \frac{1}{t^2}\right)dt = O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Damit gilt (b) für $\mathrm{Re}(z) > \delta$. Um (a) zu zeigen, integrieren wir ueber $[1, z]$. Es gilt

$$\begin{aligned}\log\Gamma(z) &= \int_1^z \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int_1^z \left(\log\zeta - \frac{1}{2\zeta}\right)d\zeta + \int_0^\infty \left(\int_1^z e^{-t\zeta}\,d\zeta\right)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1}\right)dt \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + C - \int_0^\infty e^{-tz}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1}\right)dt,\end{aligned}$$

wie man durch differenzieren sieht, wobei die Konstante spaeter noch explizit bestimmt wird. Das letzte Integral erweist sich wieder duch partielle Integration als $O(1/|z|)$. Damit gilt (a) in $\mathrm{Re}(z) > \delta$, allerdings ist C noch zu berechnen. Nach der soeben gezeigten Formel haben wir für $y > 0$,

$$\begin{aligned}&\log\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)\Gamma\left(1 - (\frac{1}{2} + iy)\right)\right) \\ &= iy\left(\log\left(\frac{1}{2} + iy\right) - \log\left(\frac{1}{2} - iy\right)\right) - 1 + 2C + O(1/y) \\ &= -2y \cdot \arg\left(\frac{1}{2} + iy\right) - 1 + 2C + O\left(\frac{1}{y}\right),\end{aligned}$$

wegen

$$2i\arg z = \log z - \log\bar{z}.$$

Es ist $\tan\arg(\frac{1}{2} + iy) = 2y$, also nach der Potenzreihenentwicklung von arctan,

$$\arg\left(\frac{1}{2} + iy\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

Es folgt

$$\log\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)\Gamma\left(1 - \left(\frac{1}{2} + iy\right)\right)\right) = -\pi y + 2C + O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Andererseits ist die linke Seite gleich

$$\begin{aligned}\log\frac{\pi}{\sin\pi(1/2 + iy)} &= \log\frac{2\pi}{e^{\pi y}(1 - e^{-2\pi y})} \\ &= \log(2\pi) - \pi y - \log(1 - e^{-2\pi y}).\end{aligned}$$

Mit $y \to \infty$ folgt $C = \frac{1}{2}\log(2\pi)$ wie behauptet. Zum Schluss erweitern wir den Gluetigkeitsbereich der Stirling-Formeln auf $|\arg z| < \pi - \delta$, indem wir die zweite Funktionalgleichung

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

benutzen. □

* * *

7.4 Nullstellen und logarithmische Ableitung

Zur Erinnerung: die Ordnung einer ganzen Funktion f ist

$$\mathrm{ord}(f) = \inf\left\{\beta : f(z) = O\left(\exp\left(|z|^\beta\right)\right)\right\}.$$

Lemma 7.4.1. *Sei f eine ganze Funktion von Ordnung 1 und $z_1, z_2, \dots$ ihre Nullstellen, wiederholt nach Vielfachheit. Sei ausserdem*

$$\sum_{f(z_j)=0} \frac{1}{|z_j|} < \infty,$$

Dann gilt $|f(z)| < Ce^{C|z|}$ für ein $C > 0$.

Beweis. Fuer $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|1 - z| \leq 1 + |z| \leq e^{|z|}$$

und

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \leq e^{|z|},$$

also

$$|(1 - z)e^z| \leq e^{2|z|}.$$

Wir ersetzen z durch z/z_j ein und folgern aus aus dem Satz von Hadamard,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| z^k e^{C_1 z + D} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) \right| \\ &\leq |z|^k e^{C_1|z| + D} \prod_{j=1}^{\infty} e^{|z/z_j|} \\ &= |z|^k e^{C_1|z|+D} \exp\left(\sum_{f(z_j)=0} \frac{|z|}{|z_j|} \right) < Ce^{C|z|} \end{aligned}$$

fuer ein geeignetes C. □

Definition 7.4.2. Sei

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = s(s-1)\hat{\zeta}(s).$$

Lemma 7.4.3. *Sei $\langle x \rangle = x - [x] \in [0, 1)$. Fuer $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt*

$$(s-1)\zeta(s) = s - s(s-1) \int_1^{\infty} \langle x \rangle \, x^{-s-1} \, dx.$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
(s-1)\zeta(s) &= (s-1)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = (s-1)\left(1+\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s}(n-(n-1))\right)\\
&= (s-1)\sum_{n=1}^{\infty} n\left(n^{-s}-(n+1)^{-s}\right) = s(s-1)\sum_{n=1}^{\infty} n\ \frac{x^{-s}}{-s}\bigg|_n^{n+1}\\
&= s(s-1)\sum_{n=1}^{\infty} n\int_n^{n+1} x^{-s-1}\,dx = s(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}[x]x^{-s-1}\,dx\\
&= s(s-1)\int_1^{\infty}[x]x^{-s-1}\,dx = s(s-1)\int_1^{\infty}(x-\langle x\rangle)x^{-s-1}\,dx\\
&= s(s-1)\int_1^{\infty}x^{-s}\,dx - s(s-1)\int_1^{\infty}\langle x\rangle\, x^{-s-1}\,dx\\
&= s-s(s-1)\int_1^{\infty}\langle x\rangle\, x^{-s-1}\,dx
\end{aligned}$$

□

Satz 7.4.4. *Die Funktion* $\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = s(s-1)\hat{\zeta}(s)$ *ist von Ordnung* 1*. Sie hat unendlich viele Nullstellen* ρ*, diese liegen im Streifen* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$*. Es gilt*

(a) $\xi(s) = e^{Bs}\prod_{\rho}^{\infty}(1-s/\rho)e^{s/\rho}$,

(b) $\sum_\rho |\rho|^{-1}$ *ist divergent,*

(c) $\sum_\rho |\rho|^{-1-\varepsilon}$ *ist konvergent für jedes* $\varepsilon > 0$.

Hier laeuft ρ *durch alle nichttrivialen Nullstellen (mit Vielfachheiten) von* ζ.

Beweis. Wir zeigen zunaechst, dass ξ von Ordnung 1 ist. Wegen der Funktionalgleichung $\xi(1-s) = \xi(s)$ reicht es, $\xi(s)$ in $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ abzuschaetzen. Hier liefert die Stirlingsche Formel

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = O\left(e^{|s\log s|}\right).$$

Das Lemma liefert

$$|(s-1)\zeta(s)| = |s-(s-1)s\int_1^{\infty}\langle x\rangle\, x^{-s-1}\,dx| = O(|s|^2).$$

Die Abschaetzung $s\pi^{-s/2}| \leq e^C|s|$ fuehrt insgesamt zu

$$|\xi(s)| \ll e^{|s\log s|}|s|^2e^{C|s|} \ll e^{|s|^{1+\varepsilon}}.$$

Damit ist ξ von Ordnung 1. Ausserhalb von $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ hat $\xi(s)$ keine Nullstellen. Wegen $\zeta(s) \to 1$ für $s \to +\infty$, $s \in \mathbb{R}$ folgt aus der Stirlingschen Formel

$$\xi(s) > \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) > e^{\frac{1}{4}s\log s}.$$

Aus Lemma 7.4.1 folgt damit, dass $\sum_\rho \frac{1}{|\rho|}$ divergiert. Damit folgt (b). Nach Satz 7.1.5 gilt auch (c). Der Produktsatz liefert (a), allerdings mit einem Faktor e^{A+Bs} statt e^{Bs}. Nach der Funktionalgleichung gilt dann

$$e^A = \xi(0) = \xi(1) = \left(\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)\right)\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \qquad \square$$

Wir verwenden im Folgenden die Abkuerzung:

$$\sum_\rho = \lim_{T\to\infty} \sum_{|\rho|\le T},$$

wobei ρ die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ durchlaeuft.

Lemma 7.4.5. *Fuer die Konstante B aus Satz 7.4.4 gilt*

$$B = -\sum_\rho \frac{1}{\rho}.$$

Beweis. Durch logarithmisches Ableiten erhalten wir aus Satz 7.4.4

$$\begin{aligned}\frac{\xi'}{\xi}(s) &= \log\left(e^{Bs}\prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}\right)' \\ &= \left(Bs + \sum_\rho \frac{s}{\rho} + \log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\right)' \\ &= B + \sum_\rho \frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}.\end{aligned}$$

Dies ist eine Partialbruchzerlegung von ξ'/ξ. Aus der Funktionalgleichung folgt

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = -\frac{\xi'}{\xi}(1-s).$$

Also gilt auch

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = -B - \sum_\rho \left(\frac{1}{1-s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Wegen $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$ ist mit ρ auch $\overline{\rho}$ eine Nullstelle, so dass

$$\begin{aligned}\sum_{|\rho|\le T} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{2}\sum_{|\rho|\le T}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar\rho}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{|\rho|\le T} \frac{2\,\mathrm{Re}(\rho)}{\rho\bar\rho} \le \sum_{|\rho|\le T} \frac{1}{|\rho|^2}.\end{aligned}$$

Damit ist die Summe $\sum_\rho \frac{1}{\rho}$ in dieser Anordnung konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Subtrahieren wir die beiden Formeln für ξ'/ξ, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2B &= -2\sum_\rho \frac{1}{\rho} + \sum_\rho \frac{1}{\rho - s} - \sum_\rho \frac{1}{1-\rho-s} \\ &= -2\sum_\rho \frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

denn nach der Funktionalgleichung ist mit ρ auch $1-\rho$ eine Nullstelle. □

Lemma 7.4.6. *Es gibt eine Konstante* $k > 0$ *so dass in* $\mathrm{Re}(s) \ge -5$, $|\mathrm{Im}(s)| > 1$ *gilt*

$$|\zeta(s)| \ll |\mathrm{Im}(s)|^k.$$

Beweis. In $\mathrm{Re}(s) \ge 2$ ist $|\zeta(s)| \le \zeta(2) = O(1)$. Fuer $\mathrm{Re}(s) \ge \frac{1}{2}$ hatten wir im Beweis von Satz 7.4.4 gezeigt

$$(s-1)\zeta(s) = O(|s|^2).$$

Es ist nun

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s).$$

Wir wollen die rechte Seite abschaetzen. Es ist

$$\left|\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\right| \le \left|e^{\frac{\pi s i}{2}}\right| + \left|e^{-\frac{\pi s i}{2}}\right| \ll e^{|\mathrm{Re}(\frac{\pi s i}{2})|} = e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(s)|}.$$

Zur Abschaetzung von $\Gamma(s)$ verwenden wir die Stirling-Formel

$$\log\Gamma(s) = (2 - \frac{1}{2})\log s - s + O(1).$$

Wir setzen $s = \sigma + it$. Dann gilt für $|\sigma| \le 5$

$$\begin{aligned} \log s &= \log\left(it\left(1 + \frac{\sigma}{it}\right)\right) = \log(\pm i) + \log|t| + \log\left(1 + \frac{\sigma}{it}\right) \\ &= \pm\frac{\pi i}{2} + \log|t| + O\left(\frac{1}{|t|}\right). \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\log\Gamma(s) &= \mathrm{Re}\left(\left(it + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\right)\left(\pm\frac{\pi i}{2} + \log|t| + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)\right) - \sigma + O(1) \\ &= -\frac{\pi}{2}|t| + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\log|t| + O(1). \end{aligned}$$

Das liefert

$$|\Gamma(s)| = e^{\mathrm{Re}\log\Gamma(s)} \ll e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\cdot|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}.$$

Wegen $|2^{1-s}| = 2^{1-\sigma}$ und $|\pi^{-s}| = \pi^{-\sigma}$ erhalten wir für $|\sigma| \le 5$,

$$|\zeta(1-s)| \ll |\mathrm{Im}(s)|^{\sigma-\frac{1}{2}}|\zeta(s)|.$$

Da wir die Behauptung für $\mathrm{Re}(s) \ge \frac{1}{2}$ bereits bewiesen haben, folgt sie nun auch für $-5 \le \mathrm{Re}(s) \le \frac{1}{2}$. □

Lemma 7.4.7. *Fuer $N(T) = \#\{\rho : 0 < \mathrm{Im}(\rho) \le T\}$, wobei die Nullstellen ρ von ζ mit Vielfachheiten gezaehlt werden, gilt*

(a) $N(T+1) - N(T-1) \ll \log T$,

(b) $N(T) \ll T \log T$.

Beweis. Wir waehlen einen Radius $3 \le r \le 4$ so dass

$$\zeta(2 + iT + r \cdot e^{i\theta}) \ne 0$$

fuer jedes $\theta \in \mathbb{R}$ gilt. Fuer jedes ρ sei $\rho' = \rho - 2 - iT$. Nach der Jensenschen Formel aus Satz 7.1.4 gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\zeta(2 + iT + re^{i\theta})|\, d\theta = \log|\zeta(2+iT)| + \sum_{\substack{\rho \\ |\rho'| \le r}} \log \frac{r}{|\rho'|}.$$

Das Integral und auch $\log|\zeta(2+iT)|$ lassen sich mit Lemma 7.4.6 zu $O(\log T)$ abschaetzen. Andererseits hat jedes ρ mit $|\mathrm{Im}(\rho) - T| \le 1$ von $2 + iT$ hoechstens den Abstand $\sqrt{5}$. Wegen $r \ge 3$ folgt

$$\begin{aligned} N(T+1) - N(T-1) = \sum_{\substack{\rho \\ |\mathrm{Im}(\rho) - T| \le 1}} 1 &\le \sum_{\substack{\rho \\ |\rho - (2+iT)| \le \sqrt{5}}} 1 = \sum_{\substack{\rho \\ |\rho'| \le \sqrt{5}}} 1 \\ &\le \sum_{\substack{\rho \\ |\rho'| \le \sqrt{5}}} 4 \log \frac{r}{|\rho'|} \ll \sum_{\substack{\rho \\ |\rho'| \le r}} \log \frac{r}{|\rho'|} \\ &\ll \log T. \end{aligned}$$

Damit ist (a) bewiesen. Aussage (b) folgt sofort wegen

$$N(T) \le \sum_{t=0}^{[T]} (N(t+1) - N(t-1)) \ll \sum_{t=0}^{[T]} \log t \ll T \log T.$$

□

Satz 7.4.8. *Es gilt*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{|\mathrm{Im}(s-\rho)|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(1 + \log|s|) & -1 \le \mathrm{Re}(s) \le 2, |\mathrm{Im}(s)| \ge 1, \\ O(1) & \mathrm{Re}(s) \ge 2, \\ O(\log|s|) & \mathrm{Re}(s) \le -1, |s + 2m| > \frac{1}{4},\ m \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

wobei ρ durch alle nichttrivialen Nullstellen (mit Vielfachheiten) von $\zeta(s)$ laeuft.

Beweis. Wir hatten in Satz 3.9.4 gezeigt, dass $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$. Daraus folgt für $\mathrm{Re}(s) \geq 2$, dass

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} < \infty.$$

Die Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^s \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$

erhaelt man aus der Funktionalgleichung aus Satz 4.3.1, zusammen mit der Legendre-Verdopplungsformel und der zweiten Funktionalgleichung der Gamma-Funktion, Satz 7.3.4. Wir setzen diese Funktionalgleichung fuer $\mathrm{Re}(s) \leq -1$ ein und erhalten durch logarithmisches Differenzieren

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) &= (\log \zeta(1-s))' \\
&= -\log 2 - \log \pi - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)}\frac{\pi}{2} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \\
&= -\log 2 - \log \pi - \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi s}{2}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s)
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\tan z = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Gilt etwa $|e^{\frac{\pi s i}{2}}| \geq 1$, so folgt $|e^{\frac{-\pi s i}{2}}| \leq 1$ und damit

$$\left|\tan \frac{\pi s}{2}\right| = \left|\frac{1 - e^{-\pi s i}}{1 + e^{-\pi s i}}\right| \leq \frac{2}{|1 + e^{-\pi s i}|}.$$

Der Nenner wird Null für $s = 1 + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, d.h. für $1 - s = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$. Aber nach Voraussetzung ist $|s - (-2m)| > \frac{1}{4}$. Daher ist

$$\left|\tan \frac{\pi s}{2}\right| \ll 1.$$

Mit der Stirling-Formel für Γ'/Γ folgt

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s)\right| \ll \log|s|,$$

also

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \ll \log|1-s| \ll \log|s|.$$

Es bleibt der Fall $-1 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2$, $|\mathrm{Im}(s)| \geq 1$. Es reicht, den Fall $s = \sigma + it$ mit $t \geq 1$ zu betrachten. Nach Definition von $\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ und der Stirling-Formel $\frac{\Gamma'}{\gamma}(s = \log s + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$ jedem Winkelraum $|\arg(s)| < \pi - \varepsilon$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\xi'}{\xi}(s) = (\log \xi(s))' &= \left(\log\left(s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\right)\right)' \\
&= \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\log \pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \\
&= \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + O(\log t).
\end{aligned}$$

Logarithmisches Differenzieren des Hadamard-Produktes aus Satz 7.4.4 liefert, wie wir im Beweis von Lemma 7.4.5 gesehen haben:

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = B + \sum_\rho \frac{1}{\rho} + \frac{1}{s-\rho}.$$

Daraus ergibt sich fuer ζ

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_\rho \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} + O(\log t).$$

Speziell für $s = 2 + it$ haben wir für $\rho' = 2 + it - \rho$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it) = \sum_\rho \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho}\right) + O(\log t).$$

Da $|\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it)| \leq \sum_n \frac{\log n}{n^2} = O(1)$, erhalten wir durch Subtraktion der beiden Formeln

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) + O(\log t).$$

Wir schaetzen nun in dieser Identitaet saemtliche Terme ab, die in der zu beweisenden Behauptung nicht vorkommen. Sei zunaechst $|\mathrm{Im}(s-\rho)| = |\mathrm{Im}(\rho) - t| \geq 1$. Wegen $-1 \leq \sigma \leq 2$ und $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$ gilt

$$|s-\rho| \ll |t - \mathrm{Im}(\rho)| \ll |s-\rho|.$$

Also ist

$$\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{2-\sigma}{(s-\rho)(2+it-\rho)} = O\left(\frac{1}{(t-\mathrm{Im}(\rho))^2}\right).$$

Wegen $N(T+1) - N(T-1) \ll \log T$ (Lemma 7.4.7) folgt für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0, -1$, wenn man beachtet, dass $t + n \leq \mathrm{Im}\,\rho \leq y + n + 1$ aequivalent ist zu $-n-1 \leq t - \mathrm{Im}(\rho) \leq -n$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\substack{\rho \\ t+n<\mathrm{Im}(\rho)\leq t+n+1}} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\right| &\ll \sum_{\substack{\rho \\ t+n<\mathrm{Im}(\rho)\leq t+n+1}} \frac{1}{n^2} \\
&\leq \frac{1}{n^2}\left(N(t+n+1) - N(t+n)\right) \\
&\ll \frac{\log|t+n|}{n^2},
\end{aligned}$$

wobei ρ durch alle nichttrivialen Nullstellen (mit Vielfachheiten) von ζ laeuft. Summation ueber n

ergibt

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\operatorname{Im}(\rho)-t|\geq 1}} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log|n+t|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log|n+nt|}{n^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)+\log(t+1)}{n^2}$$
$$= \zeta(2)\log|t+1| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \ll \log t.$$

Nun bleibt der Beitrag $1/\rho'$ mit $|\operatorname{Im}(\rho)-t| \leq 1$. Klar ist $|1/\rho'| \leq 1$ und nach Lemma 7.4.7 ist dann

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\operatorname{Im}(\rho)-t|\leq 1}} \frac{1}{|\rho'|} \leq N(t+1) - N(t-1) \ll \log t.$$

Es ergibt sich zusammen

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\substack{\rho \\ |\operatorname{Im}(s-\rho)|\leq 1}} \frac{1}{s-\rho} + O(\log t),$$

womit die erste Formel und damit der Satz gezeigt ist. □

* * *

7.5 Die explizite Formel

Erinnere

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$$

und setze

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \notin \mathbb{N}, \\ \psi(x) - \frac{1}{2}\Lambda(x) & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ausserdem setzen wir

$$\Omega(x) = \min\left\{|\log(x/p^k)| : p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N}, p^k \neq x\right\},$$

wobei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen ist.

Satz 7.5.1. *Fuer $x > 2$ gilt*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

wobei ρ durch alle nichttrivialen Nullstellen (mit Vielfachheiten) von ζ laeuft.

Der Satz folgt durch Uebergang $T \to \infty$ aus der folgenden approximativen Formel.

Lemma 7.5.2 (Approximative explizite Formel). *Fuer $x > e + 1$ und $T > 1$ gilt*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\substack{\rho \\ |\operatorname{Im}(\rho)| \le T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + R(x,T),$$

wobei ρ durch alle nichttrivialen Nullstellen (mit Vielfachheiten) von ζ laeuft und

$$R(x,T) \ll \frac{(\log T)^2}{T}\frac{x}{\log x} + \frac{x\log x}{T} + x^c \min\left(\frac{1}{T\Omega(x)}, 1\right).$$

Beweis. Es ist $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$

Sei

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2} & y = 1, \\ 1 & y > 1. \end{cases}$$

Sei

$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s}.$$

Fuer $c, T, y > 0$ wurde in Lemma 3.9.2 bewiesen:

$$|I(y,T) - \delta(y)| \ll \begin{cases} y^c \min\left(\frac{1}{T|\log y|}, 1\right) & y < 1, \\ \frac{c}{T} & y \ge 1. \end{cases}$$

Daher gilt fuer $T, c > 1$ und $x \neq p^k$ fuer alle Primzahlen p und jedes $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\frac{ds}{s} &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\, I\left(\frac{x}{n}, T\right) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P},k\in\mathbb{N}}(\log p)\;\, I\left(\frac{x}{p^k}, T\right) \\
&= \sum_{p^k<x}\log p + O\left(\frac{1}{T}\sum_{p^k<x}\log p\right) \\
&\quad + O\left(\sum_{p^k>x}(\log p)\left(\frac{x}{p^k}\right)^c\min\left(\frac{1}{T\log(x/p^k)}, 1\right)\right) \\
&= \psi_0(x) + O\left(\frac{x\log x}{T}\right) \\
&\quad + O\left(x^c\min\left(\frac{1}{T\Omega(x)}, 1\right)\sum_{n>x}\frac{\log n}{n^c}\right) \\
&= \psi_0(x) + O\left(\frac{x\log x}{T} + x^c\min\left(\frac{1}{T\Omega(x)}, 1\right)\right)
\end{aligned}$$

Fuer $x = p^k$ erhaelt man einen zusaetzlichen Summanden $O\left(\frac{c}{T}\right)$, der aber fuer $x > e + 1$ in $O\left(\frac{x\log x}{T}\right)$ aufgeht.

Insgesamt also

$$\psi_0(x) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s\frac{ds}{s} + O\left(\frac{x\log x}{T} + x^c\min\left(\frac{1}{T\Omega(x)}, 1\right)\right).$$

Ist nun ρ eine Nullstelle der Zetafunktion, dann hat $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ einen einfachen Pol vom Residuum gleich der Vielfachheit $v(\rho)$ in $s = \rho$. Also gilt

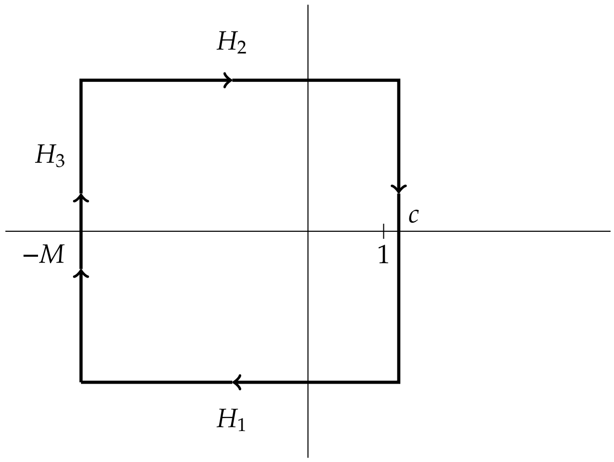
$$\mathrm{Res}_{s=\rho}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} = v(\rho)\frac{x^\rho}{\rho}.$$

Ausserdem ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{s=0}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} &= \frac{\zeta'}{\zeta}(0), \\
\mathrm{Res}_{s=1}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} &= -x.
\end{aligned}$$

Sei im Folgenden stets $T > 0$ so, dass $T \neq \mathrm{Im}\,\rho$ für jedes nichttriviale Nullstelle von ζ. Sei ausserdem $M \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$. Wir wenden den Residuensatz auf den Rand des Rechtecks mit den Ecken $-M \pm iT$ und $c \pm iT$ an. Wir setzen

$$I_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{H_j}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\,ds.$$



Dann folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\,ds = -x + \sum_{|\operatorname{Im}\rho|<T}\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \sum_{m\le\frac{1}{2}M}\frac{x^{-2m}}{-2m} + \sum_{j=1}^{3} I_j.$$

Zu I_3: Mit Satz 7.4.8 folgt sofort

$$|I_3| \le \int_{-T}^{T}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right|\cdot\frac{x^{-M}}{|s|}\,dt \ll (\log M)\,\frac{x^{-M}}{M}T, \qquad s = M+it$$

für $M\to\infty$ bei festem T.

Zu I_1, I_2: Die Abschaetzung dieser Integrale ist schwieriger, da H_1 bzw. H_2 dicht an den Polen erster Ordnung bei $s=\rho$ mit $\zeta(\rho)=0$ vorbeilaufen koennen. Diese Situation soll moeglichst vermieden werden. Nach Lemma 7.4.7 gibt es zu $n\in\mathbb{N}$ hoechstens $O(\log n)$ Nullstellen ρ mit $n<\operatorname{Im}(\rho)<n+1$. Also existiert ein $T_n\in(n,n+1]$ derart, dass $|\operatorname{Im}(\rho)-T_n|\gg\frac{1}{\log(T_n)}$ für alle nichttrivialen Nullstellen ρ von ζ. Wir ersetzen T durch das naechstgelegene T_n. Der Unterschied zwischen den Integralem mit T und T_n kann wieder durch den Residuensatz durch Teile der vertikalen Integrale abgeschaetzt und damit vernachlaessigt werden. Fuer $s=\sigma+iT$ mit $T=T_n$ und $-1\le\sigma\le 2$ folgt dann nochmals nach Lemma 7.4.7

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \ll \sum_{\substack{\rho\\ |\operatorname{Im}(\rho)-T|<1}}\frac{1}{|s-\rho|} + O(\log T) \ll (\log T)^2,$$

wobei ρ durch alle nichttrivialen Nullstellen (mit Vielfachheiten) von ζ laeuft. Wir wenden dies in $-1\le\sigma\le 2$ und Satz 7.4.8 in $\sigma<-1$ an. Dann gilt für $M\to\infty$,

$$\begin{aligned}
|I_1|+|I_2| &\le \int_{-1}^{c}(\log T)^2\left|\frac{x^{\sigma\pm iT}}{\sigma\pm iT}\right|d\sigma + \int_{-M}^{-1}\log|\sigma\pm iT|\cdot\left|\frac{x^{\sigma\pm iT}}{\sigma\pm iT}\right|d\sigma\\
&\ll \frac{(\log T)^2}{T}\int_{-1}^{c}x^\sigma\,d\sigma + \frac{\log T}{T}\int_{-M}^{-1}x^\sigma\,d\sigma\\
&\ll \frac{(\log T)^2}{T}\int_{-\infty}^{c}x^\sigma\,d\sigma\\
&= \frac{(\log T)^2}{T}\frac{e^{c\log x}}{\log x} \ll \frac{(\log T)^2}{T}\frac{x^c}{\log x}.
\end{aligned}$$

Dies gilt gleichmäßig in M und für alle $T \in \mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$. Wegen $I_3 \to 0$ für $M \to \infty$ erhalten wir insgesamt für $T \in \mathcal{T}$,

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= x - \sum_{|\operatorname{Im}(\rho)|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{x^{-2m}}{2m} + R(x,T) \\ &= x - \sum_{|\operatorname{Im}(\rho)|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log(1-\frac{1}{x^2}) + R(x,T)\end{aligned}$$

mit

$$R(x,T) = O\left(\frac{(\log T)^2}{T}\frac{x}{\log x} + \frac{x\log x}{T} + x^c \min\left(\frac{1}{T\Omega(x)}, 1\right)\right). \qquad \square$$

Satz 7.5.3. *Fuer* $\frac{1}{2} < \theta < 1$ *sind aequivalent:*

(a) $\operatorname{Re}(\rho) \le \theta$ *für alle nichttrivialen Nullstellen* ρ *von* ζ,

(b) $\psi(x) = x + O(x^\theta)$.

Beweis. (a)⇒(b): Es gelte $\operatorname{Re}(\rho) \le \theta$, also $|x^\rho| \le x^\theta$. Daraus folgt mit der approximativen expliziten Formel und Lemma 7.4.7

$$\begin{aligned}|\psi(x) - x| &\le \left|\sum_{\substack{\rho \\ |\operatorname{Im}(\rho)|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right| + R(x,T) \\ &\ll \sum_{\substack{\rho \\ |\operatorname{Im}(\rho)|<T}} \frac{x^{\operatorname{Re}(\rho)}}{|\rho|} + R(x,T) \\ &\ll x^\theta \sum_{n=1}^{[T]} \frac{1}{n}(N(n+1) - N(n)) + R(x,T) \\ &\ll x^\theta (\log T)^2 + \frac{(\log T)^2}{T}\frac{x}{\log x} + \frac{x\log x}{T} + x^c \min\left(\frac{1}{T\Omega(x)}, 1\right),\end{aligned}$$

wobei ρ durch alle nichttrivialen Nullstellen (mit Vielfachheiten) von ζ laeuft. Waehle $T = x^{1-\theta}$ und beachte, dass $c > 1$ beliebig klein gewaehlt werden kann. Dann folgt die Behauptung.

(b)⇒(a): Wir schreiben $\psi(x) = x + R(x)$ mit $R(x) = O(x^\theta)$ und $\Lambda(n) = \psi(n) - \psi(n-1)$ und erhalten mit partieller Summation:

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n-1)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) \int_n^{n+1} \frac{s}{x^{s+1}}\, dx = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\, dx \\
&= s \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} + s \int_1^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}}\, dx \\
&= \frac{s}{s-1} + s \int_1^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}}\, dx
\end{aligned}$$

Wegen $R(x) = O(x^\theta)$ konvergiert das Integral für $\mathrm{Re}(s) > \theta$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. □

Korollar 7.5.4. *Die Riemannsche Vermutung ist genau dann richtig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$*

$$\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Beweis. Klar. □

* * *