Garben Blatt **11**
Sommer 2025
Professor Deitmar Ausgabe: 2.7.2025

1. Sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und sei $K = \mathrm{SO}(n) \subset G$. Beide Gruppen tragen die Topologie von $\mathbb{R}^{n^2}$, d.h., eine Folge (A_j) von Matrizen konvergiert genau dann, wenn die Folgen der Einträge konvergieren. Die Menge $X = K\backslash G$ traegt dann die Quotiententopologie. Die Gruppe G operiert auf $K\backslash G$. Eine *homogene* Etalgarbe $E \to X$ ist eine Etalgarbe (von R-Moduln) zusammen mit einer Gruppenoperation $G \curvearrowright E$, so dass fuer jedes $g \in G$ gilt $g(E_x) = E_{gx}$, also G wirft Halme auf Halme, und die so entstehende Abbildung $g : E_x \to E_{gx}$ ist ein R-Modul Isomorphismus.

   Ein *Homomorphismus* $\phi : E \to F$ zwischen homogenen Garben ist eine stetige Abbildung, so dass $\phi(E_x) \subset F_x$ und die Abbildung $\phi_x : E_x \to F_x$ ist ein R-Modulhomomorphismus.

   Zeige: Jede homogene Garbe ist konstant und die Zuordnung $E \mapsto E_{Ke}$, die E auf den Halm im Punkt $x_0 = Ke$ wirft, ist eine Äquivalenz von Kategorien

$$\Big\{\text{homogene Garben}\Big\} \quad \leftrightarrow \quad \Big\{R[K] - \text{Moduln}\Big\}.$$

   $\Big($Aus der Linearen Algebra borgen wir den folgenden Satz: Sei $U \subset G$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, dann ist die Abbildung $K \times U \to G$, $(k, u) \mapsto ku$ ein Homöomorphismus.$\Big)$

2. Die *Grothendieck-Gruppe* $K(\mathcal{A})$ einer (kleinen) abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist definiert wie folgt: Fuer jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ gibt es einen Erzeuger $\langle A \rangle$ und fuer jede exakte Sequenz

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

   gibt es eine Relation

$$\langle B \rangle = \langle A \rangle + \langle C \rangle .$$

   Berechne die Grothendieck-Gruppe für folgende Kategorien:

   (a) Die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorraeume ueber einem gegeben Koerper K.

   (b) Die Kategorie aller Vektorraeume V mit $\dim(V) < \kappa$ fuer eine gegebene Kardinalzahl κ.

   (c) Die Kategorie der endlich-erzeugten abelschen Gruppen.
   (Beachte den Hauptsatz ueber endelich erzeugte abelsche Gruppen.)

3. Sei M ein Modul einer Rings R. Nimm an, dass fuer jedes Ideal I von R jeder R-Modulhomomorphismus $\phi : I \to M$ zu einem Modulhomomorphismus $R \to M$ fortgesetzt werden kann. Zeige, dass M injektiv ist in $R\,\mathrm{Mod}$.

1. Ein Objekt $X \neq 0$ einer abelschen Kategorie heißt *einfach*, falls es keine echten Unterobjekte enthaelt, d,h, falls jeder Mono $0 \neq Y \hookrightarrow X$ bereits ein Isomorphismus ist. Eine abelsche Kategorie heißt *halbeinfach*, falls jedes Objekt die direkte Summe von einfachen Objekten ist. Welche der folgenden Kategorien sind halbeinfach?

   (a) die Kategorie AB der abelschen Gruppen,

   (b) die Kategorie $K\,\mathrm{Mod}$ für einen Körper K,

   (c) die Kategorie der $K\,\mathrm{Mod}(X)$ für einen topologischen Raum X und einen Körper K.

2. Zeige, dass in der Kategorie GRP der Gruppen das direkte Produkt im Allgemeinen kein Coprodukt ist.

3. Zeige, dass die Kategorie der divisiblen abelschen Gruppe additiv ist, nicht aber abelsch.

4. Zeige, dass die Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen kein injektives Objekt $\neq 0$ besitzt.

Garben Blatt **9**

Sommer 2025

Professor Deitmar Ausgabe: 18.6.2025

1. Sei $Z \subset X$ abgeschlossen und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Sei $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ die Untergruppe aller Schnitte, die ausserhalb von Z verschwinden. Ferner sei $U = X \setminus Z$.

   (a) Zeige, dass die Praegarbe $V \mapsto \mathcal{G}(V) = \Gamma_{Z \cap V}\big(V, \mathcal{F}|_V\big)$ eine Garbe ist. Man nennt sie die *Untergabe mit Traegern* in Z und schreibt sie als $\mathcal{F}_Z^0$.

   (b) Zeige, dass es eine exakte Sequenz von Garben

   $$0 \to \mathcal{F}_Z^0 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} j_*\big(\mathcal{F}|_U\big)$$

   gibt und dass die letzte Abbildung surjektiv ist, falls $\mathcal{F}$ welk ist.

2. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ Garben auf X.

   (a) Zeige, dass die Praegarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{G}(U)$ im Allgemeinen keine Garbe ist. Hierbei wird das Tensorprodukt ueber $\mathbb{Z}$ genommen. Wir schreiben $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ fuer die Garbifizierung.

   (b) Zeige, dass es einen natuerlichen Isomorphismus

   $$\mathrm{Hom}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}\big(\mathcal{F}, \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{H})\big)$$

   gibt.

3. Zeige, dass im Allgemeinen

   $$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \neq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

   gilt.

Garben	Blatt **8**
Sommer 2025	
Professor Deitmar	Ausgabe: 4.6.2025

1. Sei X zusammenhängend. Zeige, dass ein Garbe $\mathcal{F}$ ueber X genau dann konstant ist, wenn in jedem Punkt $x \in X$ die *Auswertungsabbildung*

$$\begin{aligned}\delta_x : \mathcal{F}(X) &\to \mathcal{F}_x,\\ s &\mapsto s(x)\end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

2. (a) Zeige, dass ein Morphismus von Garben $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ genau dann surjektiv (epi) ist, wenn es zu jeder offenen Menge $U \subset X$ und jedem Schnitt $s \in \mathcal{G}(U)$ eine offene Ueberdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von U gibt und Schnitte $r_j \in \mathcal{F}(U_j)$ mit $\phi(r_j) = s|_{U_j}$.

   (b) Gib ein Beispiel eines Morphismus ϕ der surjektiv ist, fuer den aber $\phi_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ nicht surjektiv ist.

3. Sei $i : Z \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung einer abgeschlossnen Teilmenge $Z \subset X$. Sei $U = X \smallsetminus Z$ und sei $j : U \hookrightarrow X$ die Inklusion.

   (a) Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf Z. Zeige, dass der Halm von $i_*\mathcal{F}$ in $p \in X$ gleich $\mathcal{F}_p$ ist, falls $p \in Z$ und 0 sonst. Man nennt daher $i_*\mathcal{F}$ die *Fortsetzung durch Null* von $\mathcal{F}$.

   (b) Sei nun $\mathcal{F}$ eine Garbe auf U und sei $j_!(\mathcal{F}|_U)$ die Garbifizierung der Praegarbe $V \mapsto \mathcal{F}(V)$ falls $V \subset U$ und $V \mapsto 0$ sonst. Zeige dass

$$\left(j_!\mathcal{F}\right)_p = \begin{cases}\mathcal{F}_p & p \in U,\\ 0 & p \notin U.\end{cases}$$

   Dies ist also die Fortsetzung durch Null fuer offene Mengen.

   (c) Sei nun $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Zeige, dass es eine exakte Sequenz von Garben

$$0 \to j_!\big(\mathcal{F}|_U\big) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} i_*\big(\mathcal{F}|_Z\big) \to 0$$

   gibt.

Garben Blatt **7**

Sommer 2025

Professor Deitmar Ausgabe: 28.5.2025

1. Betrachte $\mathbb{Z}/2$ als Modul ueber dem Ring $\mathbb{Z}/4$. Konstruiere eine freie Aufloesung und benutze diese um zu zeigen, dass $\mathrm{Ext}^p_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ fuer alle $n \geq 0$ nichttrivial ist.
2. Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Garben auf X. Sei $U \subset X$ offen. Zeige, dass $\mathcal{F}|_U$ eine Garbe ist.
3. Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Garben auf X. Zeige, dass $U \mapsto \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U)$ eine Garbe ist.
4. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben ueber X. Zeige, dass die Praegarbe $\mathcal{H} : U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ eine Garbe ist. Man nennt sie die *Hom-Garbe* und schreibt sie als $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Garben Blatt **6**
Sommer 2025
Professor Deitmar Ausgabe: 21.5.2025

1. Sei $\mathcal{A}$ eine kleine Kategorie und S eine Menge von Pfeilen in $\mathcal{A}$. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor. Wir sagen, dass F die Menge S invertierbar macht wenn fuer jedes $s \in S$ der Pfeil $F(s)$ ein Isomorphismus ist. Zeige, dass es bis auf Isomorphie genau einen Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ gibt, der S invertierbar macht und universell ist im folgenden Sinn: Jeder Funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{Z}$, der S invertiert, faktorisiert eindeutig ueber F.

   Wir schreiben diese Kategorie $\mathcal{C}$ als $S^{-1}\mathcal{A}$.

2. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Fuer $Y \in \mathcal{C}$ sei $\mathcal{C}_Y$ die Kategorie aller Paare (X, α), wobei $X \in \mathcal{C}$ und $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), Y)$. Ein Pfeil $(X, \alpha) \to (X', \beta)$ ist ein Morphismus $\eta : X \to X'$, so dass $\alpha = \beta F(\eta)$. Zeige, dass F genau dann einen Rechtsadjungierten hat, wenn fuer jedes $Y \in \mathcal{C}$ die Kategory $\mathcal{C}_Y$ ein terminales Objekt besitzt.

3. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie nit genug Projektiven. Seien A, B Objekte und $P_\bullet \to A \to 0$ eine projektive Aufloesung. Fuer $i \in \mathbb{N}_0$ definiere die Gruppe $\mathrm{Ext}^i(A, B)$ als die i-te Kohomologie des Komplexes
$$0 \to \mathrm{Hom}(P_0, B) \to \mathrm{Hom}(P_1, B) \to \dots$$
   Zeige, dass $\mathrm{Ext}^i(A, B)$ ein kontravarianter Funktor in A ist und kovariant in B.

4. Zeige, dass bei abelschen Gruppen A, B die Multiplikation mit $n \in \mathbb{N}$, $A \xrightarrow{\cdot n} A$ und $B \xrightarrow{\cdot n} B$ beide die Multiplikation mit n auf $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ induzieren.

Garben Blatt **5**

Sommer 2025

Professor Deitmar Ausgabe: 14.5.2025

1. Zeige, dass im Allgemeinen
$$\operatorname{Hom}\left(\varprojlim_i A_i, A\right) \neq \varprojlim_i \operatorname{Hom}(A_i, A)$$
und
$$\operatorname{Hom}\left(A, \varinjlim_i A_i\right) \neq \varprojlim_i \operatorname{Hom}(A, A_i).$$

2. Ein *Quasi-Isomorphismus* zwischen Komplexen $f : A \to B$ ist ein Morphismus von Komplexen, derart dass $H^p(f) : H^p(A) \to H^p(B)$ fuer jedes $p \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist.

   Sei R ein Ring, $p \in \mathbb{Z}$ und M ein R-Modul. Zeige, dass es einen Komplex F
$$\cdots \to F^j \to F^{j+1} \to \cdots \to F^p \to 0 \to 0 \to \dots$$
   gibt derart dass jedes F_j ein Freier R-Modul ist und dass $H^p(F) \cong M$, sowie $H^j(F) = 0$ fuer $j \neq p$ gilt.

3. Gib ein Beispiel fuer zwei Komplexe A, B mit $H^*(A) \cong H^*(B)$, fuer die es keinen Quasi-Isomorphismus $A \to B$ gibt.

4. Seien A, B Komplexe ueber eine abelschen Kategorie mit genug Injektiven. Es gelte $H^0(A) \cong H^0(B)$ und $H^j(A) = 0 = H^j(B)$ falls $j \neq 0$. Zeige, dass es einen Komplex C und Quasi-Isomorphismen $A \to C$ und $B \to C$ gibt.

Garben Blatt **4**
Sommer 2025
Professor Deitmar Ausgabe: 7.5.2025

1. Zeige, dass die Kategorien SET und $\mathrm{SET}^{\mathrm{opp}}$ nicht äquivalent sind.

2. Sei $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ eine exakte Sequenz in einer abelschen Kategorie. Sei Z ein festes Objekt und sei $X^* = \mathrm{Hom}(X, Z)$. Zeige, dass die induzierte Sequenz in der Kategorie AB
$$0 \to C^* \xrightarrow{\beta^*} B^* \xrightarrow{\alpha^*} A^*$$
exakt ist, aber die letzte Abbildung nicht notwendig surjektiv ist.

3. Sei A eine abelsche Kategorie und sei $\mathrm{Komp}(A)$ die Kategorie der Komplexe ueber A. Zeige, dass $\mathrm{Komp}(A)$ wieder eine abelsche Kategorie ist.

4. Sei X ein Komplex ueber einer abelschen Kategorie. Sei $Y^n = X^n \oplus X^{n+1}$ und sei $D : Y^n \to Y^{n+1}$, $a \oplus b \mapsto (b - da) \oplus db$. Zeige, dass (Y, D) wieder ein Komplex ist. Was ist die Kohomologie?

5. Sei V ein Vektorraum ueber dem Koerper K. Sei $\alpha \in V \smallsetminus \{0\}$ ein Vektor. Fuer $n \in \mathbb{N}_0$ sei $d^n : V^{\otimes(n+1)} \to V^{\otimes(n+2)}$ die lineare Abbildung
$$d(v_0 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j v_0 \otimes \cdots \otimes \alpha \otimes \cdots \otimes v_n,$$
wobei α for die j-te Position gesetzt wird. Zum Beispiel $d^1(v) = \alpha \otimes v - v \otimes \alpha$. Zeige, dass die Sequenz
$$0 \to K \xrightarrow{\cdot\alpha} V \xrightarrow{d^0} V^{\otimes 2} \xrightarrow{d^1} \dots$$
exakt ist.

Garben Blatt **3**

Sommer 2025

Professor Deitmar Ausgabe: 30.4.2025

1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Zeige, dass jede natürliche Transformation $\mathrm{Hom}(B,-) \to \mathrm{Hom}(A,-)$ von der Gestalt $\alpha \mapsto \alpha \circ f$ fuer einen Pfeil $f : A \to B$ ist.

   (Hinweis: Betrachte das Bild der Identitaet unter der Abbildung $\mathrm{Hom}(B,B) \to \mathrm{Hom}(A,B)$.)

2. Die letzte Aufgabe kann so interpretiert werden, dass der Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{SET})$, $A \mapsto \mathrm{Hom}(A,-)$ voll ist. Ist er auch treu?

3. Sei $\mathcal{B}$ eine Kategorie und sei

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ B \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

   ein kartesisches Quadrat in $\mathcal{B}$. Zeige:

   - Ist f mono, dann ist auch f' mono.
   - Falls $\mathcal{B}$ genug Projektive hat und f Epi ist, dann ist auch f' ein Epi.

4. Sei $\mathcal{C}$ eine punktierte Kategorie, in der Kerne und Cokerne existieren. Zeige: Wenn $\mathcal{C}$ genug Projektive hat, dann hat die natuerliche Abbildung $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ trivialen Kern und falls $\mathcal{C}$ genug Injektive hat, dann hat diese Abbildung trivialen Cokern.

Garben Blatt **2**
Sommer 2025
Professor Deitmar Ausgabe: 23.4.2025

1. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Zeige, dass jeder Funktor, der isomorph zu F ist, ebenfalls eine Äquivalenz von Kategorien ist.

2. Für eine Menge X sei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge. Setze $X \mapsto \mathcal{P}(X)$ auf zwei Arten (kovariant und kontravariant) zu einem Funktor SET→SET fort.

3. Sei MAT die folgende Kategorie: Objekte sind die natürlichen Zahlen und Null, Morphismen von n nach m sind die $m \times n$ Matrizen, Komposition ist durch Matrixmultiplikation gegeben.

   Zeige, dass MAT zur Kategorie der endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathrm{VEKT}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R})$ äquivalent ist.

4. Sei $\mathcal{F} : C \to \mathrm{SET}$ ein Funktor. Seien $X \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{H}^X = \mathrm{Hom}(X, \cdot) : C \to \mathrm{SET}$ der von X dargestellte Funktor. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathrm{Hom}(\mathcal{H}^X, \mathcal{F}) &\to \mathcal{F}(X), \\ \eta &\mapsto \eta_X(\mathbf{1}_X) \end{aligned}$$

   eine Bijektion ist.

Garben Blatt **1**
Sommer 2025
Professor Deitmar Ausgabe: 16.4.2025

1. Untersuche ob die Kategorien RING, FIELD, TOP, TOP$_*$, GRP initiale oder terminale Objekte haben und beschreibe diese.
2. Zeige, dass jeder Ringhomomorphismus $f : R \to \mathbb{Q}$ mit $f(1) = 1$ ein Epi in der Kategorie RING ist.
3. Zeige, dass ein Gruppenhomomorphismus genau dann ein Epi in GRP ist, wenn er surjektiv ist.
4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem initialen Objekt I und einem terminalen Objekt T. Nimm an, dass $\mathrm{Hom}(T, I) \neq \emptyset$. Zeige, dass $T \cong I$.