

Kohomologie und Garben
Anton Deitmar, Sommer 2025

Contents

1	Kategorien und Funktoren	1
1.1	Kategorien	1
1.2	Funktoren und Transformationen	7
1.3	Limiten	16
1.4	Colimiten	21
1.5	Additive und Abelsche Kategorien	26
1.6	Tensorprodukte	34
1.7	Komplexe	37
2	Die klassischen Kohomologietheorien	46
2.1	Singuläre Kohomologie	46
2.2	De Rham Kohomologie	48
2.3	Gruppenkohomologie	49
3	Abgeleitete Funktoren	50
3.1	Auflösungen	50
3.2	Delta-Funktoren	66
4	Garben	72
4.1	Topologische Garben	72
4.2	Etalgarben	87
4.3	Lokalkonstante Garben	96
4.4	Der Schnittfunktor	102
4.5	Garbenkohomologie	103
5	Vergleich der Kohomologie-Theorien	113
5.1	Singuläre Kohomologie	113
5.2	De Rham-Kohomologie	116
5.3	Gruppen-Kohomologie	117
5.4	Cech-Kohomologie	125

1 Kategorien und Funktoren

1.1 Kategorien

Definition 1.1.1. Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus den folgenden Daten:

- (a) eine nichtleere Klasse $\text{Ob}(\mathcal{C})$ von "Objekten",
- (b) für je zwei $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von "Morphismen" oder "Pfeile",
- (c) für jedes Objekt X einen Pfeil $1_X \in \text{Hom}(X, X)$,
- (d) eine Kompositionsabbildung
 $\circ : \text{Hom}(\mathcal{C})(Y, Z) \times \text{Hom}(\mathcal{C})(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C})(X, Z)$,

so dass \circ assoziativ ist und für jedes $\alpha : X \rightarrow Y$ gilt

$$\alpha = 1_Y \circ \alpha = \alpha \circ 1_X.$$

Das Symbol \circ wird oft ausgelassen, man schreibt also

$$\alpha = 1_Y \alpha = \alpha 1_X.$$

Definition 1.1.2. Für jedes Kategorie \mathcal{C} gibt es die **duale Kategorie** \mathcal{C}^{opp} mit denselben Objekten, aber umgedrehten Pfeilen, also

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{opp}}}(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Eine Kategorie \mathcal{C} heisst **kleine Kategorie**, falls $\text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge ist.

Beispiele 1.1.3. (a) Die Kategorie der Mengen und Abbildungen SET, die Kategorie der Gruppen und Gruppenhomomorphismen GRP, die Unterkategorie der abelschen Gruppen AB, die Kategorie der kommutativen Ringe mit Eins, RING und die Kategorie $R \text{ MOD}$ von

Moduln eines kommutativen Rings R mit Eins sind Kategorien, die oft auftreten.

- (b) Eine **triviale Kategorie** ist eine Kategorie \mathcal{C} , deren einzige Pfeile die Identitäten 1_X , $X \in \mathcal{C}$ sind.
- (c) Eine Gruppe G kann als eine Kategorie mit nur einem Objekt betrachtet werden. Die Elemente der Gruppe sind die Pfeile dieser Kategorie.

Definition 1.1.4. Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ heisst **Monorphismus** oder **mono**, falls stets aus $f\alpha = f\beta$ folgt $\alpha = \beta$. Er heisst **epi**, wenn er mono in \mathcal{C}^{opp} ist, was soviel heisst wie

$$\gamma f = \tau f \quad \Rightarrow \quad \gamma = \tau.$$

Definition 1.1.5. Ein Pfeil $f : X \rightarrow Y$ heisst **Isomorphismus**, falls es ein $g : Y \rightarrow X$ gibt mit $fg = 1_Y$ und $gf = 1_X$.

Definition 1.1.6. Ein **Gruppoid** ist eine Kategorie, in der alle Pfeile Isomorphismen sind.

Beispiele 1.1.7. (a) Ist \mathcal{C} ein Gruppoid und $X \in \mathcal{C}$, dann ist $\text{End}_{\mathcal{C}}(X) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ eine Gruppe. Ein Gruppoid mit nur einem Objekt ist eine Gruppe.

- (b) Für einen topologischen Raum X definieren wir das **Fundamentalgruppoid** $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ wie folgt: Objekte sind die Punkte von X und Morphismen sind die Homotopieklassen (mit festen Enden) von Wegen in X . Die Komposition ist durch die Hintereinanderausführung von Wegen gegeben. Für jedes $x_0 \in X$ ist die Gruppe

$$\text{Hom}(x_0, x_0) = \pi_1(X, x_0)$$

die Fundamentalgruppe im Basispunkt x_0 .

Definition 1.1.8. Ein Objekt T einer Kategorie \mathcal{A} heisst **terminales Objekt**, falls für jedes Objekt $X \in \mathcal{A}$ es genau einen Pfeil $X \rightarrow T$ gibt. Es gilt dann also

$$|\mathrm{Hom}(X, T)| = 1$$

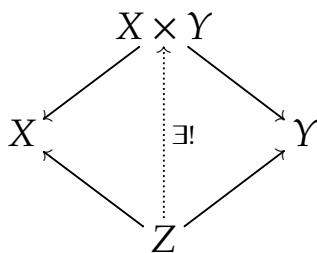
für jedes X .

Dual heisst ein Objekt I ein **initiales Objekt**, falls es terminal in $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}}$ ist, wenn also für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt $|\mathrm{Hom}(I, A)| = 1$.

Lemma 1.1.9. *Ein terminales Objekt ist eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie (falls es existiert). Dasselbe gilt für initiale Objekte.*

Beweis. Seien S, T beide terminal. Seien dann $\alpha : S \rightarrow T$ und $\beta : T \rightarrow S$ die eindeutig bestimmten Pfeile. Dann ist $\alpha\beta$ der eindeutige Pfeil $T \rightarrow T$. Andererseits ist 1_T ebenfalls ein Pfeil $T \rightarrow T$, es folgt also $\alpha\beta = 1_T$. Ebenso folgt $\beta\alpha = 1_S$. \square

Bemerkung 1.1.10. Nach diesem Lemma können wir Eindeutigkeit aus universellen Eigenschaften folgern, denn universelle Eigenschaften bedeuten immer Terminalität in einer geeigneten Kategorie. Wir zeigen das am Beispiel des Produktes: Das **Produkt** zweier Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ ist das eindeutig bestimmte Objekt $X \times Y$ zusammen mit zwei Pfeilen $X \times Y \rightarrow X$ und $X \times Y \rightarrow Y$, so dass für jedes Z mit Pfeilen $Z \rightarrow X$, $Z \rightarrow Y$ es genau einen Pfeil $Z \rightarrow X \times Y$ gibt, so dass das Diagramm



kommutiert.

Falls es existiert ist das Produkt eindeutig bestimmt. Um dies

einzu sehen, betrachte die Kategorie $\mathcal{P}(X, Y)$, deren Objekte die Tripel (A, p_X, p_Y) sind, wobei $p_X : A \rightarrow X$ und $p_Y : A \rightarrow Y$ Pfeile in \mathcal{C} sind. Morphismen $f : (A, p_X, p_Y) \rightarrow (B, q_X, q_Y)$ sind alle Morphismen in \mathcal{C} mit die Eigenschaft

$$p_X = q_X f \quad \text{und} \quad p_Y = q_Y f.$$

Die Universalität von $X \times Y$ ist äquivalent dazu, dass $X \times Y$ ein terminales Objekt in $\mathcal{P}(X, Y)$ ist.

Beispiele 1.1.11. (a) In SET ist die leere Menge initial und jede Einpunktmenge terminal.

(b) In GRP ist die triviale Gruppe initial und terminal.

(c) In RING ist der Ring \mathbb{Z} initial und der Nullring ist terminal.

Definition 1.1.12. Eine Kategorie \mathcal{A} , mit einem Objekt X_0 , welches sowohl initial als auch terminal ist, heist eine **punktierte Kategorie**. Das terminale und initiale Objekt heist **Nullobjekt** oder einfach **Null**. Für zwei Objekte X, Y existiert dann jeweils genau ein Pfeil $0 : X \rightarrow Y$, der über das Nullobjekt faktorisiert. Es gilt

$$0f = 0 \quad \text{und} \quad f0 = 0.$$

* * *

Definition 1.1.13. Ein Objekt P einer Kategorie \mathcal{C} heist **projektives Objekt**, falls für jeden epi $A \twoheadrightarrow B$ und jeden Pfeil $P \rightarrow B$ es einen Pfeil $P \rightarrow A$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \twoheadrightarrow & B \\ & \nwarrow \exists & \uparrow \\ & & P \end{array}$$

kommutiert. Das bedeutet, dass jeder Pfeil von P entlang einer Surjektion geliftet werden kann.

Anders gesagt, falls für jeden Epi $A \twoheadrightarrow B$ die Kompositionsabbildung

$$\mathrm{Hom}(P, A) \rightarrow \mathrm{Hom}(P, B)$$

surjektiv ist.

Beispiele 1.1.14.

- In der Kategorie der Mengen ist jedes Objekt projektiv.
- Sei R ein Ring. In der Kategorie $R\text{MOD}$ sind alle freien Moduln projektiv.

Definition 1.1.15. An Objekt I von \mathcal{C} heisst **injektives Objekt**, falls es in $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ projektiv ist. Das bedeutet, dass für jeden Mono $A \hookrightarrow B$ und jeden Pfeil $A \rightarrow I$ es einen Pfeil $B \rightarrow I$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & B \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ I & & \end{array}$$

kommutiert.

Als ist I genau dann injektiv, wenn für jeden mono $A \hookrightarrow B$ die induzierte Abbildung

$$\mathrm{Hom}(B, I) \rightarrow \mathrm{Hom}(A, I)$$

surjektiv ist.

Beispiele 1.1.16.

- In der Kategorie der Mengen ist jede nichtleere Menge injektiv.

- In der Kategorie der abelschen Gruppen ist ein Objekt $(A, +)$ genau dann injektiv, falls A **divisibel** ist. Hierbei heisst eine kommutative Gruppe $(A, +)$ **divisible**, falls für jedes $a \in A$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $b \in A$ existiert mit $a = nb$.

Definition 1.1.17. Wir sagen: Eine Kategorie \mathcal{C} hat **genug Injektive**, falls für jedes Objekt X es einen Mono $X \hookrightarrow I$ in ein injektives Objekt I gibt. Die Kategorie hat **genug projektive**, falls \mathcal{A}^{opp} genug injektive hat, also falls es für jedes Objekt X einen Epi $P \twoheadrightarrow X$ von einem projektiven P gibt.

Beispiel 1.1.18. Die Kategorie $R\text{MOD}$ hat genug projektive, da jedes Modul Bild eines freien Moduls ist.

Proposition 1.1.19. Die Kategorie AB der abelschen Gruppen hat genug Injektive.

Beweis. Sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe. Sei \mathcal{S} die Menge aller Einbettungen $\phi : U \subset D$, wobei U eine Untergruppe und D eine divisible Gruppe ist. Die Menge \mathcal{S} ist geordnet durch $\phi \leq \psi$, falls ψ eine Fortsetzung von ϕ ist. Zorns Lemma liefert uns ein maximales Element $\phi : U \rightarrow D$. Wir behaupten, dass $U = A$. Nimm an, dies ist nicht der Fall, es gibt also ein $a \in A \setminus U$.

1. Case: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na \in U$. Wähle n minimal mit dieser Eigenschaft und wähle ein $d \in D$ mit $nd = \phi(na)$. Dann kann ϕ fortgesetzt werden auf die Gruppe $\langle U, a \rangle$ durch $\phi(a) = d$.

2. Fall: Es gibt kein solches n . Dann kann ϕ nach $\langle U, a \rangle \rightarrow D \oplus \mathbb{Q}$ fortgesetzt werden, indem man $\phi(a) = 1 \in \mathbb{Q}$ setzt. □

* * *

1.2 Funktoren und Transformationen

Definition 1.2.1. Ein **Funktor** $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen zwei Kategorien ordnet jedem Objekt $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt $F(A) \in \mathcal{B}$ und jedem Pfeil $f : A \rightarrow B$ einen Pfeil $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ zu, so dass gilt $F(fg) = F(f)F(g)$ und $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Beispiele 1.2.2. (a) Wichtige Beispiele sind die **Vergiss-Funktoren**

$\text{GRP} \rightarrow \text{SET}$, $\text{AB} \rightarrow \text{SET}$, $\text{RING} \rightarrow \text{SET}$, etc, die in jedem Fall die jeweilige algebraische Struktur vergessen und auf die jeweilige Menge abbilden.

(b) Sind \mathcal{G}, \mathcal{H} Gruppen, dann ist ein Funktor $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ dasselbe wie ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 1.2.3. Ein Funktor $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{D}$ wird auch **kontravarianter Funktor** von \mathcal{C} nach \mathcal{D} genannt. Ein kontravarianter Funktor dreht Pfeile um.

Beispiele 1.2.4. (a) Sei K ein Körper und $\text{VEKT}(K)$ die Kategorie aller K -Vektorräume und linearen Abbildungen. Der

Dualisierungsfunktor $V \mapsto V^* = \text{Hom}(V, K)$ ist ein kontravarianter Funktor $\text{VEKT}(K) \rightarrow \text{VEKT}(K)$.

(b) Ist \mathcal{C} eine Kategorie und $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt. Dann sind

$$\text{Hom}(A, -) : X \mapsto \text{Hom}(A, X) \quad \text{Hom}(-, A) : X \mapsto \text{Hom}(X, A)$$

Funktoren, der erste ko- der zweite kontravariant. Morphismen werden auf die Verkettung abgebildet, also für $f : X \rightarrow Y$ ist

$$\text{Hom}(A, -)(f) : \text{Hom}(A, X) \rightarrow \text{Hom}(A, Y), \quad \alpha \mapsto f \circ \alpha.$$

Und ebenso $\text{Hom}(-, A)(f)(\alpha) = \alpha \circ f$.

Definition 1.2.5. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist ein **Isomorphismus von Kategorien**, falls es einen Funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ gibt, so dass

$$FG = \text{Id}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad GF = \text{Id}_{\mathcal{A}}.$$

Definition 1.2.6. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heisst **treu**, falls für je zwei $X, Y \in \mathcal{A}$ die Abbildung

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$$

injektiv ist.

Der Funktor F heisst **voll**, falls für je zwei $X, Y \in \mathcal{A}$ die Abbildung

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$$

surjektiv ist.

Der Funktor heisst **volltreu**, wenn er beides ist, voll und treu.

Beispiel 1.2.7. Die Vergissfunktor $\text{AB} \rightarrow \text{SET}$ ist treu, aber nicht voll.

Aus den Definitionen folgt, dass ein Funktor genau dann ein Isomorphismus ist, wenn er volltreu ist und eine Bijektion auf den Objektklassen.

Definition 1.2.8. Seien $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $t : F \rightarrow G$ oder einfach **Transformation** ist eine Familie $(t_X)_{X \in \mathcal{A}}$ von Morphismen

$$t_X : F(X) \rightarrow G(X),$$

so dass für jeden Pfeil $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{A} das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ t_X \downarrow & & \downarrow t_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

kommutiert. Transformationen $t : F \rightarrow G$ und $s : G \rightarrow H$ können hintereinander ausgeführt werden, was man als $st : F \rightarrow H$ schreibt.

Eine natürliche Transformation $t : F \rightarrow G$ heisst **natürlicher**

Isomorphismus oder **Isomorphismus von Funktoren**, falls es eine Transformation $s : G \rightarrow F$ gibt, so dass $st = \text{Id}_F$ und $ts = \text{Id}_G$. Ist t ein Isomorphismus, dann ist jeder Pfeil $t_X : F(X) \rightarrow G(X)$ ein Isomorphismus.

Beispiele 1.2.9. (a) Jede Gruppe G ist natürlich isomorph zu ihrer dualen Gruppe G^{opp} , indem man $x \in G$ auf x^{-1} abbildet.

(b) Seien $\phi, \psi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismen. Eine Transformation $T : \phi \rightarrow \psi$ ist dann dasselbe wie ein Element $t \in H$ mit der Eigenschaft, dass

$$t\phi(x)t^{-1} = \psi(x)$$

für jedes $x \in G$.

(c) Sei K ein Körper und sei $F : \text{VEKT}(K) \rightarrow \text{VEKT}(K)$ der Funktor, der einen Vektorraum V auf seinen Bidualraum $F(V) = V^{**}$ wirft. Die Abbildung

$$\begin{aligned} t_V : V &\rightarrow V^{**} \\ v &\mapsto \delta_v, \end{aligned}$$

mit $\delta_v(\alpha) = \alpha(v)$ definiert eine Transformation $t : \text{Id} \rightarrow F$.

Definition 1.2.10. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heisst eine **Äquivalenz von Kategorien**, falls es einen Funktor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ gibt, so dass

$$FG \cong \text{Id}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad GF \cong \text{Id}_{\mathcal{A}}.$$

In dem Fall heisst G ein **Quasi-Inverser** Funktor zu F .

Jede Isomorphie von Kategorien ist eine Äquivalenz.

Beispiel 1.2.11. Sei K ein Körper und sei \mathcal{B} die Kategorie aller endlich-dimensionalen K -Vektorräume. Sei $K^{(\mathbb{N})}$ die Unterkategorie der Räume $0, K, K^2, \dots$. Die Einbettung $K^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathcal{B}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Definition 1.2.12. Eine Unterkategorie $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ heisst **dicht**, falls jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ isomorph ist zu einem Objekt $A' \in \mathcal{D}$.

Die Unterkategorie $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ heisst **voll**, falls der Einbettungsfunktor voll ist, d.h., falls

$$\text{Hom}_{\mathcal{V}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

für alle $X, Y \in \mathcal{V}$ gilt.

Satz 1.2.13. (a) Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann eine Äquivalenz von Kategorien wenn er volltreu ist und dichtes Bild hat.

(b) Zwei Kategorien \mathcal{A}, \mathcal{B} sind genau dann äquivalent, wenn es dichte Unterkategorien $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ und $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ gibt, die isomorph sind, d.h., es gilt $\mathcal{A}' \cong \mathcal{B}'$.

Beweis. (a) Sei F eine Äquivalenz von Kategorien mit quasi-inverser $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ und sei $t : \text{Id}_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$ die natürliche Isomorphie. Für je zwei

$X, Y \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{GF} \mathrm{Hom}(GF(X), GF(Y)) \xrightarrow{t_Y^{-1} \circ \circ t_X} \mathrm{Hom}(X, Y)$$

gleich der Identität. Also ist F treu. Da t_Y^{-1} und t_X Isomorphismen sind, folgt, dass G voll ist. Wegen Symmetrie erhalten wir, dass F ebenfalls voll ist. Sei $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \rightarrow FG$ die natürliche Isomorphie. Für $Z \in \mathcal{B}$ ist der Pfeil $s_Z : Z \rightarrow F(G(Z))$ ein Isomorphismus, also hat F dichtes Bild.

Umgekehrt sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ volltreu mit dichtem Bild. Für jedes $Z \in \mathcal{B}$ wähle ein $X \in \mathcal{A}$ und einen Isomorphismus $\nu_Z : Z \xrightarrow{\cong} Z' = F(X)$, wobei wir annehmen, dass $Z' = Z$ und $\nu_Z = \mathrm{Id}_Z$, falls Z bereits im Bild liegt. Setze $G(Z) = X$. Für $Z, W \in \mathcal{B}$ definiere $G : \mathrm{Hom}(Z, W) \rightarrow \mathrm{Hom}(G(Z), G(W))$ by

$$\mathrm{Hom}(Z, W) \xrightarrow{\nu_W \circ \circ \nu_Z^{-1}} \mathrm{Hom}(Z' = F(X), W' = F(Y)) \xrightarrow{F^{-1}} \mathrm{Hom}(X = G(Z), Y = G(W)).$$

Dann ist G ein Funktor, ein Quasi-Inverser zu F .

(b) Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ eine Äquivalenz mit Quasi-Inversem $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. In jeder Isomorphieklasse $[X]$ von Objekten in \mathcal{A} wähle ein Objekt $X \in \mathrm{im}(G)$, welches nach (a) möglich ist. Sei \mathcal{A}' die volle Unterkategorie dieser gewählten Objekte. Die Kategorie \mathcal{A}' ist nach Konstruktion dicht in \mathcal{A} . Sei $\mathcal{B}' = F(\mathcal{A}')$. Wir behaupten, dass \mathcal{B}' dicht liegt in \mathcal{B} und dass $F|_{\mathcal{A}'}$ ein Isomorphismus zwischen \mathcal{A}' und \mathcal{B}' ist.

Sei $Y \in \mathcal{B}$. Dann gibt es ein $X \in \mathcal{A}$, so dass $F(X)$ isomorph zu Y ist. Es gibt ein $X' \in \mathcal{A}'$, so dass $X \cong X'$ und da F volltreu ist, erhalten wir $F(X') \cong F(X) \cong Y$.

Daher ist \mathcal{B}' dicht in \mathcal{B} . Für die Isomorphie beachte, dass je zwei verschiedene Objekte X, Y in \mathcal{A}' nicht isomorph sind und damit $F(X) \not\cong F(Y)$ gilt. Das bedeutet, dass F eine Bijektion von $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}')$ nach

$\text{Ob}(\mathcal{B}')$ ist. Der Funktor ist ausserdem bijektiv auf jeder Hom-Menge und hat daher einen Inversen.

Für die Umkehrung nimm an, dass \mathcal{A}' und \mathcal{B}' existiere und dass ein Isomorphismus $F' : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}'$ existiert. Für jedes $X \in \mathcal{A}$ fixiere einen Isomorphismus $\alpha_X : X \rightarrow X'$ für ein Objekt $X' \in \mathcal{A}'$, so dass im Fall dass $X \in \mathcal{A}'$ schon $X' = X$ und $\alpha_X = \text{Id}_X$ gilt. Setze $F(X) = F'(X')$ für $X \in \mathcal{A}$ und für je zwei $X, Y \in \mathcal{A}$ und jedes $\tau \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ definiere

$$F(\tau) = F'(\alpha_Y \circ \tau \circ \alpha_X^{-1}).$$

Dann ist F ein Funktor und dieselbe Konstruktion mit F^{-1} liefert einen Quasi-Inversen G . □

Lemma 1.2.14. *Für einen gegebenen Pfeil $f : A \rightarrow B$ in einer Kategorie \mathcal{C} induzieren die Kompositionen $\alpha \mapsto \alpha \circ f$ und $\beta \mapsto f \circ \beta$ Transformationen von Funktoren*

$$\text{Hom}(B, -) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(A, -), \quad \text{Hom}(-, A) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(-, B).$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für jeden Morphismus $\alpha : X \rightarrow Y$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(B, X) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}(A, X) \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow \alpha_* \\ \text{Hom}(B, Y) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}(A, Y) \end{array}$$

kommutiert. Sei also $\gamma : B \rightarrow X$. Dann gilt

$$\alpha_*(f^*(\gamma)) = \alpha \circ (\gamma \circ f) = (\alpha \circ \gamma) \circ f = (\alpha_*(\gamma)) \circ f = f^*(\alpha_*(\gamma)). \quad \square$$

Definition 1.2.15. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ eine volle Unterkategorie. Sei $B \in \mathcal{B}$ und sei $f : B \rightarrow A \in \mathcal{A}$ ein Pfeil in \mathcal{B} . Wir sagen, dass f das Objekt B in \mathcal{A} **darstellt**, falls die Komposition mit f ein Isomorphismus von

Funktoren $\mathcal{A} \rightarrow \text{SET}$,

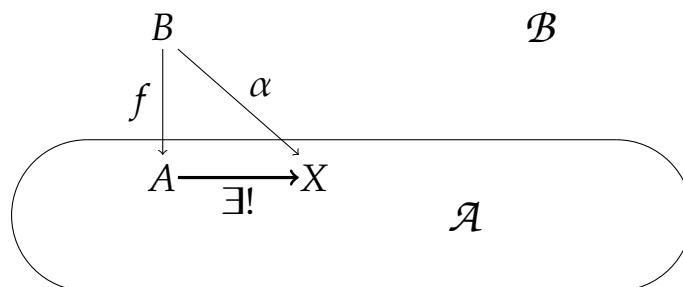
$$\text{Hom}(A, -) \cong \text{Hom}(B, -)$$

ist. Dies bedeutet, dass f initial ist in der Kategorie aller Pfeile $B \rightarrow X$ mit $X \in \mathcal{A}$.

Lemma 1.2.16. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ eine volle Unterkategorie und $f : B \rightarrow A$ ein Pfeil mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$. Dann sind äquivalent:

- (a) f stellt B dar.
- (b) Jeder Pfeil $\alpha : B \rightarrow X$ für $X \in \mathcal{A}$ faktorisiert eindeutig über f .

In diesem Fall ist der Pfeil f eindeutig in folgendem Sinne: ist $g : B \rightarrow A'$ ein weiterer Pfeil, der B darstellt, dann gibt es einen Isomorphismus $\tau : A \rightarrow A'$, so dass $g = \tau \circ f$.



Beweis. (b) \Rightarrow (a) ist klar, denn (b) bedeutet ja nur, dass die Abbildung $\text{Hom}(A, Z) \rightarrow \text{Hom}(B, Z)$ die durch f induziert wird, bijektiv ist. Teil (a) enthält nur die Zusatzinformation, dass diese Abbildung funktoriell, das ist aber gerade Lemma 1.2.14. \square

Beispiele 1.2.17. (a) Sei \mathcal{B} die Kategorie AB der abelschen Gruppen und \mathcal{A} die Unterkategorie der divisiblen Gruppen. Dann ist eine beliebige abelsche Gruppe B durch $f : B \rightarrow B \otimes \mathbb{Q}, b \mapsto b \otimes 1$ dargestellt.

- (b) Sei \mathcal{B} die Kategorie der metrischen Räume und sei \mathcal{A} die Unterkategorie der vollständigen Räume. Dann wird ein gegebener Raum X dargestellt durch seine Vervollständigung $X \mapsto \widehat{X}$.

Definition 1.2.18. Ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & X \\ q \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

heißt **kartesisch**, falls für jedes andere kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \beta \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

ein eindeutig bestimmter Pfeil $\eta : A \rightarrow P$ existiert, so dass $\alpha = p\eta$ und $\beta = q\eta$.

Das heißt also, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & & \swarrow \beta & & \searrow \alpha \\ & P & \xrightarrow{p} & X & \\ & \downarrow q & & \downarrow f & \\ & Y & \xrightarrow{g} & Z & \end{array}$$

kommutiert, wobei η der gestrichelte Pfeil ist.

Definition 1.2.19. Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien. Die **Produkt-Kategorie** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ hat als Objekte die Paare (C, D) mit $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{D}$. Ferner,

$$\text{Hom}\left((A, B), (X, Y)\right) := \text{Hom}(A, X) \times \text{Hom}(B, Y).$$

Definition 1.2.20. Zwei Funktoren $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ heißen

adjungiert, falls es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(X), Y) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, R(Y))$$

von Funktoren auf $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{B}$ gibt. In diesem Fall sagt man genauer, dass R **rechtsadjungiert** zu L ist oder L ist **linksadjungiert** zu R . Zu gegebenem R ist der Linksadjungierte L , falls es ihn gibt, eindeutig bestimmt und ebenso andersherum.

Beispiele 1.2.21. (a) Sei $R : \mathbf{AB} \rightarrow \mathbf{SET}$ der Vergissfunktork. Für eine Menge S sei $\mathbb{Z}[S]$ der freie \mathbb{Z} -Modul mit Basis S . Dann ist $L : S \mapsto \mathbb{Z}[S]$ der Linksadjungierte zu R .

(b) Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus von kommutativen Ringen und $V : B\text{-MOD} \rightarrow A\text{-MOD}$ der Pullbackfunktork. Dann ist V rechtsadjungiert zu $M \mapsto B \otimes_A M$.

Definition 1.2.22. Eine Kategorie \mathcal{A} heisst **klein**, falls die Objektklasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ eine Menge ist.

Definition 1.2.23. Sind \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien, wobei \mathcal{A} klein ist. Dann definieren wir die **Funktor Kategorie** $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ wie folgt: Objekte sind alle Funktoren $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathrm{Hom}(F, G)$ ist die Menge aller Transformationen von F nach G .

Man muss hier "klein" verlangen, da sonst $\mathrm{Hom}(F, G)$ möglicherweise keine Menge ist.

Als Beispiel betrachte $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}^{\mathrm{opp}}, \mathbf{SET})$. Jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ definiert einen Funktor $F : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathbf{SET}$ durch $F(X) = \mathrm{Hom}(A, X)$.

* * *

1.3 Limiten

Definition 1.3.1. Sei \mathcal{A} eine Kategorie und \mathcal{D} eine kleine Kategorie. Ein \mathcal{D} -Diagramm in \mathcal{A} ist ein Funktor $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$. Ein Diagramm heisst **kommutativ**, falls für je zwei Objekte X, Y in \mathcal{D} gilt

$$|\mathrm{Hom}(X, Y)| \leq 1.$$

Beispiel 1.3.2. Ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ \beta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ Z & \xrightarrow{\delta} & W \end{array}$$

erzeugt von den Pfeilen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist genau dann kommutativ, wenn $\gamma\alpha = \delta\beta$.

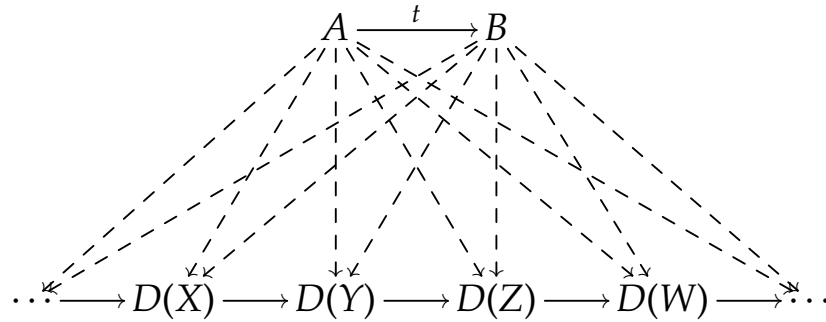
Definition 1.3.3. Für eine beliebige Kategorie \mathcal{C} sei \mathcal{C}^+ die Kategorie \mathcal{C} erweitert um ein neues Objekt X_0 und für jedes $X \in \mathcal{C}$ genau einen Pfeil $X_0 \rightarrow X$. Dann ist X_0 ein initiales Objekt in \mathcal{C}^+ .

Definition 1.3.4. Sei \mathcal{D}^+ eine solche Erweiterung von \mathcal{D} . Für ein given Diagramm $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ machen wir die Klasse \mathcal{K}_D aller Fortsetzungen $D^+ : \mathcal{D}^+ \rightarrow \mathcal{A}$ zu einer Kategorie, indem wir $\mathrm{Hom}(D^+, E^+)$ definieren als die Menge aller Transformationen $t : D^+ \rightarrow E^+$ für die gilt $t|_{\mathcal{D}} = \mathrm{Id}$.

Ein Element von \mathcal{K}_D ist ein Paar $(Z, (\tau_X)_{X \in \mathcal{D}})$, wobei $Z \in \mathcal{C}$ und $\tau_X : Z \rightarrow D(X)$ eine kompatible Familie von Morphismen ist. Wir nennen ein solchen Paar einen **Prä-Limes**.

Bemerkung 1.3.5. Da nur ein Objekt hinzugefügt wurde, besteht eine Transformation $t : D^+ \rightarrow E^+$ aus einem einzigen Morphismus $t_{X_0} : A = D^+(X_0) \rightarrow B = E^+(X_0)$, der kompatibel mit den Pfeilen in $D(\mathcal{D})$

ist. Das bedeutet, dass das Diagramm



kommutiert.

Definition 1.3.6. Ein **Limes** für das Diagramm D ist ein terminales Objekt in \mathcal{K}_D .

Bemerkung 1.3.7. Die Definition bedeutet folgendes: Ein Limes eines Diagramms $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ist ein Tupel $(L, (\phi_X)_{X \in \mathcal{D}})$ bestehend aus einem Objekt $L \in \mathcal{C}$ und einer Familie von Pfeilen $\phi_X : L \rightarrow D(X)$, mit den beiden Eigenschaften

- (a) Kompatibilität: Für jeden Pfeil $\alpha : X \rightarrow Y$ in \mathcal{D} gilt $D(\alpha)\phi_X = \phi_Y$ und
- (b) Universalität: Für jedes andere Objekt $M \in \mathcal{C}$ und jede kompatible Familie $\theta_X : M \rightarrow D(X)$, $X \in \mathcal{D}$, existiert genau ein Pfeil $\eta : M \rightarrow L$, so dass $\theta_X = \phi_X \circ \eta$ für jedes $X \in \mathcal{D}$ gilt.

Lemma 1.3.8. (a) In der Kategorie \mathbf{SET} existieren alle Limiten. Man sagt auch: \mathbf{SET} ist eine **vollständig Kategorie**.

- (b) In der Kategorie \mathcal{V} aller endlich-dimensionalen Vektorräume über einem gegebenen Körper K existieren nicht alle Limiten.
- (c) Ist $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm und $L = \lim_{X \in \mathcal{D}} D(X)$ ein Limes, dann ist L das (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte Objekt, für welches eine Isomorphie von Funktoren

$$\mathrm{Hom}(Z, L) \cong \lim_{X \in \mathcal{D}} \mathrm{Hom}(Z, D(X)),$$

gibt, wobei beide Seiten als Funktoren $\mathcal{A} \rightarrow \text{SET}$ betrachten werden.

Beweis. (a) Sei $D : \mathcal{D} \rightarrow \text{SET}$ ein Diagramm. Sei L die Menge aller $\alpha \in \prod_{X \in \mathcal{D}} D(X)$, so dass für jeden Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{D} gilt

$$\alpha_Y = D(f)(\alpha_X).$$

Die Strukturabbildungen ϕ_X sind die Projektionen. Für einen Prä-Limes $(Z, (\tau_X))$ definiert man $t : Z \rightarrow L$ durch seine Koordinaten

$$t(z)_X = \tau_X(z).$$

(b) Betrachte das Diagramm $\cdots K^n \xrightarrow{\tau_n} K^{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow K$, wobei jede Abbildung linear und surjektiv ist. Sei S der Vektorraum aller Folgen $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $v_n \in K^n$ und $\tau_n(v_n) = v_{n-1}$. Dieser Raum ist unendlich-dimensional und die Projektionen liefern eine kompatible Familie linearer Abbildungen $\phi_n : S \rightarrow K^n$. Beachte dass jedes ϕ_n surjektiv ist. **Nimm an**, dass \mathcal{V} einen Limes L für dieses Diagramm enthält. Dies ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum L mit einer kompatiblen Familie von Abbildungen $\eta_n : L \rightarrow K^n$. Nach der universellen Eigenschaft gibt es eine Abbildung $t : S \rightarrow L$, so dass $\tau_n = \eta_n \circ t$ für jedes n . Dies bedeutet insbesondere, dass jedes $\eta_n : L \rightarrow K^n$ surjektiv ist. Ist aber $n > \dim(L)$, so ist dies nicht möglich, **Widerspruch!**

(c) Sei zunächst L ein Limes. Dann ist die Isomorphie von Funktoren durch $\alpha \mapsto (\phi_X \alpha)_{X \in \mathcal{D}}$ gegeben.

Für die Umkehrung sei L ein Objekt von \mathcal{A} und sei $t : \text{Hom}(-, L) \rightarrow \lim_{X \in \mathcal{D}} \text{Hom}(-, D(X))$ eine Isomorphie von Funktoren. Wir müssen die Strukturabbildungen für L basteln. Eine kompatible Familie von Pfeilen $\phi_X : L \rightarrow D(X)$ ist aber genau dasselbe

wie ein Element von $\lim_{X \in \mathcal{D}} \text{Hom}(L, D(X))$. Wir koennen die Familie $\phi = (\phi_X)_{X \in \mathcal{D}}$ also definieren als

$$(\phi_X)_{X \in \mathcal{D}} = t_L(\mathbf{1}_L).$$

Für die universelle Eigenschaft sei $(P, \theta = (\theta_X)_{X \in \mathcal{D}})$ ein Prälimes. Dann ist die Familie $(\theta_X)_{X \in \mathcal{D}}$ ein Element von $\lim_{X \in \mathcal{D}} \text{Hom}(P, D(X))$. Sei dann $\alpha : P \rightarrow L$ gegeben durch $\alpha := t_P^{-1}((\theta_X)_{X \in \mathcal{D}})$. Es ist zu zeigen, dass $\theta = \phi \circ \alpha$.

Da t eine natürliche Transformation ist, haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(L, L) & \xrightarrow{t_L} & \lim_{X \in \mathcal{D}} \text{Hom}(L, D(X)) \\ \downarrow -\circ \alpha & & \downarrow -\circ \alpha \\ \text{Hom}(P, L) & \xrightarrow{t_P} & \lim_{X \in \mathcal{D}} \text{Hom}(P, D(X)) \end{array}$$

Insbesondere heißt das $t_L(\mathbf{1}_L) \circ \alpha = t_P(\mathbf{1}_L \circ \alpha)$, also

$$t_L(\mathbf{1}_L) \circ t^{-1}((\theta_X)_{X \in \mathcal{D}}) = t_L(\mathbf{1}_L) \circ \alpha = t_P(\mathbf{1}_L \circ \alpha) = t_P(\alpha) = (\theta_X)$$

Es bleibt zu zeigen, dass $t_Z(\alpha) = (\phi_X \alpha)_{X \in \mathcal{D}}$. Hierfür betrachte α als ein Element von $\text{Hom}(Z, L)$. Da t eine natürliche Transformation ist, folgt

$$\begin{aligned} t_Z(\alpha) &= t_Z(\text{Hom}(-, L)(\alpha)(\mathbf{1}_L)) \\ &= \lim_X \text{Hom}(-, D(X))(\alpha) \left(\lim_X \text{Hom}(-, D(X))(t_L(\mathbf{1}_L)) \right) \\ &= (\phi_X \alpha)_{X \in \mathcal{D}}. \end{aligned}$$

□

Beispiele 1.3.9. (a) Sei $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm mit einer trivialen Kategorie \mathcal{D} . In diesem Fall heisst ein Limes **Produkt** und wird

geschrieben als

$$\prod_{D \in \mathcal{D}} F(D).$$

- (b) Die Kategorien GRP, AB, RING sind vollständig, die Kategorie FIELD ist es nicht, da das Produkt zweier Körper kein Körper ist.
- (c) Ist das Diagramm von der Form

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow \alpha & \\ Y & \xrightarrow{\beta} & S \end{array}$$

dann nennt man einen Limes auch ein **Faserprodukt** von X und Y über S und schreibt es als $X \times_S Y$. In dieser Notation werden die Pfeile α, β nicht hingeschrieben wenn klar ist, welche Morphismen gemeint sind. Ein Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ Y & \xrightarrow{\beta} & S \end{array}$$

heisst ein **kartesisches Diagramm**.

Definition 1.3.10. Eine **gerichtete Menge** ist eine geordnete Menge (I, \leq) mit der Eigenschaft, dass für je zwei $i, j \in I$ es eine obere Schranke gibt, also ein $k \in I$ mit $i, j \leq k$. Eine gerichtete Menge kann als Kategorie gesehen werden, mit I als Objektemenge und jeweils genau einen Pfeil $i \leftarrow j$, falls $i \leq j$. Ein Funktor von einer gerichteten Menge zu einer \mathcal{A} wird dann ein **projektives System** genannt. Ein Limes heisst **projektiver Limes** und wird in der Form $\varprojlim_{i \in I} D_i$ geschrieben.

Beispiel 1.3.11. Betrachte die gerichtete Menge \mathbb{N} . Sei RING die Kategorie der Ringe und sei p eine Primzahl. Definiere $D : \mathcal{D} \rightarrow \text{RING}$

durch $D(n) = \mathbb{Z}/p^n$ und sei $D(n \rightarrow m)$ die Projektion $\mathbb{Z}/p^n \rightarrow \mathbb{Z}/p^m$. Der Limes dieses Diagramm existiert, es ist

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n = \mathbb{Z}_p,$$

der Ring der p -adischen Zahlen.

* * *

1.4 Colimiten

Definition 1.4.1. Sei $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm. Ein **Colimes** von D ist ein Limes in \mathcal{A}^{opp} . Das bedeutet, dass er initial ist in der Kategorie aller Paare $(A, (f_D)_{D \in \mathcal{D}})$, wobei $A \in \mathcal{A}$ und $f_D : F(D) \rightarrow A$ eine kompatible Familie von Pfeilen ist.

Beispiele 1.4.2. (a) Die Kategorie SET hat alle Colimiten. Um dies zu beweisen, sei $F : \mathcal{D} \rightarrow \text{SET}$ ein Diagramm. Setze

$$A = \bigsqcup_{D \in \mathcal{D}} F(D) / \sim,$$

wobei \sim die Äquivalenzrelation ist, die erzeugt wird von

$$x \sim F(f)(x),$$

für jedes $D \in \mathcal{D}$, jedes $x \in D$ und jeden Morphismus $f : D \rightarrow D'$ in \mathcal{D} . Die Transformation $r : F \rightarrow \text{Const}_A$ ist gegeben durch die Einbettung in die disjunkte Vereinigung. Es ist leicht zu sehen, dass dies ein Colimes ist.

(b) Sei $F : \mathcal{D} \rightarrow \text{SET}$ ein Diagramm, wobei \mathcal{D} trivial ist. Dann gilt

$$\text{colim}(F) = \bigsqcup_{D \in \mathcal{D}} F(D).$$

Definition 1.4.3. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten in einer Kategorie \mathcal{A} . Sei \mathcal{D} die triviale Kategorie mit Objektmenge I . In dieser Situation nennt man den Colimes auch das **Coprodukt** und schreibt es als

$$\coprod_{i \in I} M_i \quad \text{oder} \quad \bigoplus_{i \in I} M_i.$$

Beispiele 1.4.4. (a) In SET ist das Coprodukt gleich der disjunkten Vereinigung

$$\coprod_{i \in I} S_i = \bigsqcup_{i \in I} S_i.$$

(b) In RING ist das Coprodukt gleich dem Tensorprodukt

$$\bigotimes_{i \in I} R_i.$$

Hier ist das Tensorprodukt ein **unendliches Tensorprodukt von Ringen**. Man betrachtet dazu jedes Element als einen unendlichen Tensor mit fast allen Einträgen gleich 1. Genauer definiert man es so: Sei

$$\bigotimes_{i \in I} R_i = \bigsqcup_{\substack{E \subset I \\ \text{finite}}} \bigotimes_{i \in E} R_i \bigg/ \sim$$

wobei \sim die Äquivalenzrelation ist, die von $w \sim w \otimes 1$ erzeugt wird, wobei $w \in \bigotimes_{i \in E} R_i$ und $w \otimes 1$ liegt in $\bigotimes_{i \in F} R_i$ für jede endliche Menge $F \supset E$. Addition und Multiplikation wird vom endlichen Tensorprodukt geerbt.

(c) In $R \text{ MOD}$ für einen Ring R ist das Coprodukt gleich der direkten

Summe

$$\coprod_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i.$$

Bemerkung 1.4.5. Die definierende Eigenschaft des Colimes kann in der Form

$$\mathrm{Hom}\left(\mathrm{colim}_{D \in \mathcal{D}} D, Z\right) = \lim_{D \in \mathcal{D}} \mathrm{Hom}(D, Z)$$

geschrieben werden.

Definition 1.4.6. Sei \mathcal{A} eine punktierte Kategorie. Sei $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Diagramm mit einer trivialen Kategorie \mathcal{D} . Für gegebene $D, E \in \mathcal{D}$ sei $f_{E,D} : F(D) \rightarrow F(E)$ in \mathcal{A} gegeben durch

$$f_{E,D} := \begin{cases} \mathbf{1}_{F(D)} & D = E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Familie $(f_{E,D})_{D \in \mathcal{D}}$ kann als ein Element von $\prod_D \mathrm{Hom}(F(D), F(E))$ gesehen werden. Da

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}\left(\mathrm{colim}_D F(D), F(E)\right) &= \lim_D \mathrm{Hom}(F(D), F(E)) \\ &= \prod_D \mathrm{Hom}(F(D), F(E)), \end{aligned}$$

definiert diese Familie einen Pfeil $f_E : \mathrm{colim}_D F(D) \rightarrow F(E)$. Die Familie $(f_E)_{E \in \mathcal{D}}$ induziert einen kanonischen Pfeil $\mathrm{colim}_D F(D) \rightarrow \lim_D F(D)$ oder

$$\bigoplus_{D \in \mathcal{D}} F(D) \rightarrow \prod_{D \in \mathcal{D}} F(D).$$

Beispiel 1.4.7. Betrachte ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

Ein Colimes heisst in diesem Fall auch **Co-Faserprodukt** oder ein **Pushout**. Er wird geschrieben als $X \coprod_A Y$. Das vollständige Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \coprod_A Y \end{array}$$

heisst dann ein **cocartesisches Diagramm**.

Definition 1.4.8. Dual zum Fall des projektiven Limes kann eine gerichtete Menge (I, \leq) auch auf duale Weise in eine Kategorie verwandelt werden. Hier verlangt man, dass es einen eindeutig bestimmten Pfeil $i \rightarrow j$ gibt falls $i \leq j$. Ein Diagramm für diese Kategorie heisst ein **induktives System** und ein Limes ist ein **induktiver Limes**. Man schreibt den Limes als $\varinjlim_{i \in I} A_i$.

Beispiele 1.4.9. (a) Ist X eine Menge und I ein System von Teilmengen mit $A, B \in I \Rightarrow A \cup B \in I$. Dann ist I gerichtet durch $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$ und es gilt

$$\varinjlim_{A \in I} A = \bigcup_{A \in I} A.$$

(b) Ein wichtiges Beispiel ist gegeben durch die **Keime** von Funktionen. Sei $p \in \mathbb{C}$ und sei M die Menge aller Paare (U, f) , wobei U eine offene Umgebung von p ist und f eine holomorphe Funktion auf U . Wir setzen

$$(U, f) \leq (V, g) \quad \Leftrightarrow \quad U \supset V, \quad f|_V = g.$$

Dann ist M eine gerichtete Menge und

$$\varinjlim_{f \in M} f$$

heisst die Menge der Funktionskeime holomorpher Funktionen um den Punkt p .

Proposition 1.4.10. *Ein rightsadjungierter Funktor kommutiert mit Limiten. Ein linksadjungierter Funktor kommutiert mit Colimiten.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}\left(X, R\left(\lim_{D \in \mathcal{D}} D\right)\right) &= \operatorname{Hom}\left(LX, \lim_{D \in \mathcal{D}} D\right) \\ &= \lim_{D \in \mathcal{D}} \operatorname{Hom}(LX, D) \\ &= \lim_{D \in \mathcal{D}} \operatorname{Hom}(X, RD) \\ &= \operatorname{Hom}\left(X, \lim_{D \in \mathcal{D}} RD\right) \end{aligned}$$

so dass $R\left(\lim_{D \in \mathcal{D}} D\right) \cong \lim_{D \in \mathcal{D}} RD$ folgt. Durch Dualisieren erhalten wir die zweite Aussage. \square

Für später beweisen wir noch

Lemma 1.4.11. *Sei \mathcal{A} eine punktierte Kategorie und nimm an, dass \mathcal{A} alle endlichen Produkte und Coprodukte hat. Dann gibt es für je zwei Objekte X, Y eine eindeutig bestimmte Abbildung $\phi : X \oplus Y \rightarrow X \times Y$, die das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \operatorname{Id} \quad} & X \\ & \searrow & \nearrow \\ & X \oplus Y \xrightarrow{\quad \phi \quad} X \times Y & \\ & \nearrow & \searrow \\ Y & \xrightarrow{\quad \operatorname{Id} \quad} & Y \end{array}$$

kommutativ macht.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(X \oplus Y, X \times Y) &= \mathrm{Hom}(X, X \times Y) \times \mathrm{Hom}(Y, X \times Y) \\ &= \mathrm{Hom}(X, X) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \\ &\quad \times \mathrm{Hom}(Y, X) \times \mathrm{Hom}(Y, Y).\end{aligned}$$

Die Kommutativität des Diagramms ist äquivalent dazu, dass ϕ der Pfeil $(1_X, 0, 0, 1_Y)$ ist. Dies zeigt Existenz und Eindeutigkeit. \square

Beispiel 1.4.12. Sei SET_* die Kategorie der punktierten Mengen: Objekte sind Paare (X, x_0) , wobei X eine Menge und $x_0 \in X$ ein Punkt ist. Ein Pfeil $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Dann ist jede Einpunktmenge $\{x_0\}$ ein Nullobjekt. Das Produkt ist das direkte Produkt $(X \times Y, (x_0, y_0))$ und das Coprodukt ist

$$(X, x_0) \oplus (Y, y_0) = X \sqcup Y / x_0 \sim y_0.$$

Die Abbildung $\phi : X \oplus Y \rightarrow X \times Y$ ist given by

$$\phi(x) = (x, y_0), \quad \phi(y) = (x_0, y)$$

für $x \in X$ und $y \in Y$.

* * *

1.5 Additive und Abelsche Kategorien

Definition 1.5.1. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Pfeil in einer punktierten Kategorie. Ein **Kern** für f ist ein terminales Objekt in der Kategorie aller Pfeile $\alpha : K \rightarrow X$ mit der Eigenschaft, dass $f\alpha = 0$. That bedeutet, dass α ein Kern ist, falls $f\alpha = 0$ und jedes $h : Z \rightarrow X$ mit $fh = 0$ eindeutig über α

faktoriert, d.h., gegeben ein kommutatives Diagramm mit durchgezogenen Pfeilen

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \swarrow \exists! & \downarrow & \searrow 0 & \\ K & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

dann existiert ein eindeutig bestimmter gepunkteter Pfeil, der das ganze Diagramm kommutativ macht.

Beispiel 1.5.2. In $\mathcal{A}\mathcal{B}$ ist die Inklusion $f^{-1}(0) \hookrightarrow A$ ein Kern von $f : A \rightarrow B$.

Definition 1.5.3. Sei \mathcal{C} eine punktierte Kategorie. Ein **Cokern** für $f : X \rightarrow Y$ ist ein Kern in \mathcal{C}^{opp} . Also ist ein Cokern ein initiales Objekt in der Kategorie aller $\beta : Y \rightarrow C$ mit $\beta f = 0$. Anders ausgedrückt ist β ein Cokern, falls für ein gegebenes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\beta} & C \\ & \searrow f & \downarrow & \swarrow \beta & \\ & 0 & Z & \swarrow \exists! & \end{array}$$

ein eindeutig bestimmter gepunkteter Pfeil existiert, der das ganze Diagramm kommutativ macht.

Lemma 1.5.4. Ein Kern ist mono und ein Cokern ist epi.

Beweis. Sei $k : K \rightarrow X$ ein Kern für $f : X \rightarrow Y$. Seien $\alpha, \beta : Z \rightarrow K$ Morphismen mit $k\alpha = k\beta$. Wir müssen zeigen, dass $\alpha = \beta$. Betrachte das (nicht kommutative) Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow \alpha & & \uparrow \beta & \nearrow F & \\ Z & & & & \end{array}$$

Der Pfeil $F := k\alpha = k\beta$ hat die Eigenschaft, dass $fF = 0$, faktorisiert also eindeutig über k , aber α und β sind beide solche Faktorisierungen und damit folgt $\alpha = \beta$. Die zweite Aussage folgt aus der ersten für \mathcal{C}^{opp} . \square

Beispiele 1.5.5.

- Für einen Ring R hat die Kategorie $R \text{ MOD}$ Kerne und Cokerne.
- Betrachte die Kategorie der punktierten Mengen: Objekte sind Paare (X, x_0) , wobei X eine Menge und $x_0 \in X$ ein Punkt. Ein Pfeil (X, x_0) nach (Y, y_0) ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Das Paar $(\{x_0\}, x_0)$ ist ein Nullobjekt. Der Kern von $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist die Inklusionsabbildung $k : f^{-1}(y_0) \hookrightarrow X$. Ein Cokern existiert ebenfalls und ist gegeben durch die Menge $C = Y/f(X)$, d.h. $f(X)$ wird zu einem Punkt zusammengezogen, der dann der spezielle Punkt des neuen Raums ist.

Definition 1.5.6. Eine **additive Kategorie** ist:

- Eine punktierte Kategorie \mathcal{C} , in der endliche Produkte und Coprodukte existieren,
- Auf jeder Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ die Struktur einer abelschen Gruppe, so dass die Komposition

$$\circ : \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$$

bilinear ist, was bedeutet, dass $(f + g)h = fh + gh$ und $f \circ (h + k) = f \circ h + f \circ k$.

Bemerkung 1.5.7. In einer additiven Kategorie ist der Nullmorphimus $0 \in \text{Hom}(X, Y)$ gleich dem neutralen Element $\underline{0}$ der abelschen Gruppe $\text{Hom}(X, Y)$.

Beweis. Die Mengen $\text{Hom}(X, 0)$ und $\text{Hom}(0, Y)$ enthalten jeweils nur ein Element, sind also jeweils die triviale Gruppe. Damit ist

$\circ : \text{Hom}(X, 0) \times \text{Hom}(0, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$ eine bilineare Abbildung $\{0\} \times \{0\} \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$. Das Bild dieser bilinearen Abbildung besteht also aus nur aus der Gruppen-Null $\underline{0}$. Andererseits ist das Bild nach Definition das einzige Element von $\text{Hom}(X, Y)$, das über das Nullobjekt faktorisiert, und das ist gerade 0. \square

Beispiele 1.5.8.

- Für einen (nicht notwendig kommutativen) Ring R ist die Kategorie $R\text{MOD}$ additiv, wobei Addition die punktweise Addition ist.
- Für einen Körper K ist die Kategorie $\text{VEKT}_{\text{ev}}(F)$ aller gerad-dimensionalen Vektorräume eine additive Kategorie.

Proposition 1.5.9. *Sei \mathcal{A} additiv. Dann ist die kanonische Abbildung $\phi : X \oplus Y \rightarrow X \times Y$ aus Lemma 1.4.11 ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Abbildung ϕ ist die einzige Abbildung, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\text{Id}} & X \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & X \oplus Y \xrightarrow{\phi} X \times Y & \\
 & \nearrow & \searrow \\
 Y & \xrightarrow{\text{Id}} & Y
 \end{array}$$

kommutativ macht. Seien

$$\psi_X : X \times Y \rightarrow X \rightarrow X \oplus Y$$

und

$$\psi_Y : X \times Y \rightarrow Y \rightarrow X \oplus Y.$$

Setze

$$\psi := \psi_X + \psi_Y.$$

Die Abbildung $(\psi\phi - 1) : X \oplus Y \rightarrow X \oplus Y$ schickt X nach Null und Y ebenso, ist also die Nullabbildung. Die Abbildung $\alpha = (\phi\psi - 1) : X \times Y \rightarrow X \times Y$ erfüllt $p_X \circ \alpha = 0$ und $p_Y \circ \alpha = 0$, wobei p_X und p_Y die Projektionen sind. Daher ist ψ invers zu ϕ . \square

* * *

Definition 1.5.10. Eine additive Kategorie \mathcal{C} heisst **abelsch**, falls:

- (a) Alle Kerne und Cokerne existieren.
- (b) Ein Morphismus mit trivialem Kern und Cokern ist ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.5.11. Sei f ein Pfeil in einer abelschen Kategorie. Ist $\ker(f) = 0$, dann ist f der Kern seines Cokerns. Ist $\operatorname{coker}(f) = 0$, dann ist f der Cokern seines Kerns.

Beispiele 1.5.12. (a) Für ein Ring R ist die Kategorie $R \text{ MOD}$ abelsch.

- (b) Ein Beispiel einer additiven Kategorie, die nicht abelsch ist, ist die Kategorie der gerad-dimensionalen Vektorräume und linearen Abbildungen über einem gegebenen Körper K . In dieser Kategorie hat eine lineare Abbildung von ungeradem Rang keinen Kern.

Lemma 1.5.13. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie.

- (a) Die duale Kategorie \mathcal{A}^{opp} ist ebenfalls abelsch.

(b) Ein Pfeil f ist genau dann mono, wenn $\ker(f) = 0$. Ein Pfeil g ist genau dann epi, wenn $\operatorname{coker}(g) = 0$.

(c) Faserprodukte und Pushouts existieren.

(d) Ein Morphismus f , der epi und mono ist, ist ein Isomorphismus.

Beweis. (a) Die definierenden Eigenschaften sind symmetrisch.

(b) Ist $\ker(f) = 0$, dann ist f der Kern seines Cokerns, also mono nach Lemma 1.5.4. Umgekehrt, ist f mono und α ein Kern, dann folgt $f\alpha = 0 = f\alpha$ und so $\alpha = 0$. Die Aussage für Epis folgt durch Dualisieren.

(c) Seien $f : A \rightarrow C$ und $g : B \rightarrow C$ gegeben. Sei $\alpha : A \times B \rightarrow C$ die Komposition $A \times B \rightarrow A \xrightarrow{f} C$ und ebenso sei $\beta : A \times B \rightarrow B \rightarrow C$. Dann ist $K = \ker(\alpha - \beta)$ ein Faserprodukt. Pushouts sind Faserprodukte in \mathcal{A}^{opp} .

(d) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Pfeil, der epi und mono ist. Nach (b) hat er trivialen Kern und Cokern, ist also ein Isomorphismus. \square

Definition 1.5.14. Eine Sequenz von Morphismen

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

heißt **exakt**, falls

$$\operatorname{im}(f) = \ker(g).$$

Eine Sequenz

$$\cdots \rightarrow A_{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A_i \xrightarrow{d^i} A_{i+1} \rightarrow \cdots$$

heißt **exakt**, falls sie an jeder Stelle exakt ist.

Bemerkung 1.5.15. Da ein Kern nur bis auf Isomorphie bestimmt ist, bedeutet die Gleichung $\operatorname{im}(f) = \ker(g)$, dass jeder Kern von jedem Cokern von f ein Kern von g ist.

Man kann das auch so ausdrücken: Es gilt $g \circ f = 0$ und daher faktorisiert f über $\ker(g)$:

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & \nearrow \alpha & & \searrow \ker(g) & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Die Sequenz ist exakt in Y , falls α epi ist.

Definition 1.5.16. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen additiven Kategorien heisst ein **additiver Funktor**, falls für je zwei Objekte X, Y die induzierte Abbildung $F : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(F(X), F(Y))$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Ein additiver Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen abelschen Kategorien heisst ein **exakter Funktor**, falls er exakte Sequenzen auf exakte Sequenzen abbildet.

Lemma 1.5.17. Sei

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz in einer abelschen Kategorie. Dann sind äquivalent:

(a) Es gibt einen Pfeil $s : C \rightarrow B$ mit $\beta s = \text{Id}_C$.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightleftharpoons[s]{\beta} C \longrightarrow 0$$

(b) Es gibt einen Pfeil $t : B \rightarrow A$ mit $t\alpha = \text{Id}_A$.

$$0 \longrightarrow A \xrightleftharpoons[t]{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

(c) Es gibt einen Isomorphismus $\psi : B \rightarrow A \oplus C$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & B & & & & \\
 & \nearrow & \downarrow \psi & \searrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & A & & C & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow & \downarrow p_2 & \nearrow & & & \\
 & & A \oplus C & & & &
 \end{array}$$

kommutiert.

Definition 1.5.18. Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, so sagen wir, dass die Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ **spaltet**.

Proof. (c) \Rightarrow (a) und (c) \Rightarrow (b) sind klar.

(a) \Rightarrow (c): Sei $s : C \rightarrow B$ mit $\beta s = \text{Id}_C$. Für $b \in B$ gilt $b - s\beta(b) \in \text{im } \alpha$, da $\text{im } \alpha = \ker \beta$ und

$$\beta(b - s\beta(b)) = \beta(b) - \beta s\beta(b) = \beta(b) - \beta(b) = 0.$$

Man kann also definieren $\psi : B \rightarrow A \oplus C$ by

$$\psi(b) = \alpha^{-1}(b - s\beta(b)) \oplus \beta(b).$$

Für $a \in A$ gilt $\psi(\alpha(a)) = \alpha^{-1}\alpha(a) \oplus 0 = a \oplus 0$. Für $b \in B$ gilt $p_2\psi(b) = \beta(b)$. Daher kommutiert das Diagramm.

(b) \Rightarrow (c): Sei $t : B \rightarrow A$ gegeben mit $t\alpha = \text{Id}_A$. Definiere

$$\psi(b) = t(b) \oplus \beta(b).$$

Die Kommutativität des Diagramms ist klar. □

* * *

1.6 Tensorprodukte

Definition 1.6.1. Für eine Menge S und einen Ring R sei $R[S]$ der **freie Modul mit Basis S** , definiert als die Menge aller formalen Ausdrücke $\sum_{s \in S} \lambda_s [s]$ mit $\lambda_s \in R$, wobei fast alle λ_s gleich Null sind (**fast alle** heißt alle bis auf endlich viele). Man addiert Elemente wie folgt

$$\left(\sum_{s \in S} \lambda_s [s] \right) + \left(\sum_{s \in S} \mu_s [s] \right) = \sum_{s \in S} (\lambda_s + \mu_s) [s].$$

Hierdurch wird $R[S]$ zu einer abelschen Gruppe. Man macht es zu einem Modul, indem man definiert

$$\lambda \left(\sum_{s \in S} \lambda_s [s] \right) = \sum_{s \in S} \lambda \lambda_s [s].$$

Bemerkung 1.6.2. (a) Ist $\sum_{s \in S} \lambda_s [s]$ ein Element von $R[S]$, dann ist $f : S \rightarrow R, s \mapsto \lambda_s$ eine Abbildung mit endlichem Träger. Dies liefert einen Modul Isomorphismus von $R[S]$ zum Modul $R^{(S)}$ aller Abbildungen $f : S \rightarrow R$ mit endlichen Trägern.

(b) Ist S endlich, so ist $R[S] \cong R^n$, wobei $n = |S|$.

(c) Es gilt

$$R[S] \cong \bigoplus_{s \in S} R \cdot [s].$$

Lemma 1.6.3. Der Funktor $S \mapsto R[S]$ ist linksadjungiert zum Vergiss Funktor $\text{VEKT}(K) \rightarrow \text{SET}$.

Beweis. Die Behauptung ist, dass es einen funktoriellen Isomorphismus

$$\phi : \text{Hom}_{\text{VEKT}(K)}(R[S], B) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\text{SET}}(S, B)$$

gibt. Sei $\alpha : R[S] \rightarrow B$ ein Modulhomomorphismus, wir sagen auch

R -lineare Abbildung. Definiere

$$\begin{aligned}\phi(\alpha) : S &\rightarrow B, \\ s &\mapsto \alpha([s]).\end{aligned}$$

Eine R -lineare Abbildung ist durch ihre Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt, also ist ϕ injektiv. Umgekehrt sei $\eta : S \rightarrow B$ eine beliebige Abbildung. Dann ist

$$\begin{aligned}\alpha : R[S] &\rightarrow B, \\ \sum_{s \in S} \lambda_s [s] &\mapsto \sum_{s \in S} \lambda_s \eta(s)\end{aligned}$$

eine R -lineare Abbildung $R[S] \rightarrow B$ mit der Eigenschaft $\phi(\alpha) = \eta$ und damit ist ϕ surjektiv. \square

Definition 1.6.4. Seien V, W Moduln. Das **Tensorprodukt** ist der Modul

$$V \otimes W := R[V \times W]/U,$$

wobei U der Untermodul ist, die von allen Elementen der Form

$$(v + v', w) - (v, w) - (v', w) \quad \text{und} \quad (v, w + w') - (v, w) - (v, w'),$$

sowie

$$\lambda(v, w) - (\lambda v, w) \quad \text{und} \quad \lambda(v, w) - (v, \lambda w)$$

erzeugt wird. Man schreibt das Bild von (v, w) in $V \otimes W$ als $v \otimes w$.

Durch die Definition erzwingt man, dass die Abbildung $(v, w) \mapsto v \otimes w$ R -bilinear ist.

Proposition 1.6.5. (a) Für je zwei Mengen S, T definiert die Vorschrift

$$[(s, t)] \mapsto [s] \otimes [t] \text{ einen Modul Isomorphismus}$$

$$\theta : R[S \times T] \xrightarrow{\cong} R[S] \otimes R[T].$$

(b) Für jeden Modul V gilt $V \cong R \otimes V$.

(c) Es gilt stets $V \otimes W \cong W \otimes V$.

Beweis. (a) Die lineare Abbildung θ ist surjektiv, da die rechte Seite von allen $[s] \otimes [t]$ erzeugt wird. Umgekehrt ist zu zeigen, dass die Vorschrift $[s] \otimes [t] \mapsto [s \otimes t]$ eine R -lineare Abbildung liefert, wobei hier die Wohldefiniertheit das Problem ist. Nach Definition ist das Tensorprodukt ein Quotient von $G = R[R[S] \times R[T]]$. Die Abbildung $\alpha : R[S] \times R[T] \rightarrow R[S \times T]$, gegeben durch

$$\alpha \left(\sum_{s \in S} \lambda_s [s], \sum_{t \in T} l_t [t] \right) = \sum_{s,t} \lambda_s l_t [(s, t)]$$

definiert eine lineare Abbildung von G nach $R[S \times T]$, die auf dem Raum U (siehe Definition 1.6.4) verschwindet, definiert also eine lineare Abbildung $\Lambda : R[S] \otimes R[T] \rightarrow R[S \times T]$, die auf der Basis (und damit überall) die Gleichung $\theta \Lambda = \text{Id}$ erfüllt.

(b) Die Vorschrift $a \mapsto a \otimes 1$ liefert einen Isomorphismus.

(c) Man bildet $a \otimes b$ auf $b \otimes a$ ab. □

Definition 1.6.6. Die Elemente der Form $v \otimes w$ von $V \otimes W$ erzeugen den Raum $V \otimes W$. Sie werden **einfache Tensoren** genannt.

Lemma 1.6.7. Seien V, W ein R -Moduln. Dann ist die bilineare Abbildung

$$b_0 : V \times W \rightarrow V \otimes W, \quad (v, w) \mapsto v \otimes w$$

die unibverselle bilineare Abbildung auf $V \times W$ in folgendem Sinne: Zu jeder bilinearen Abbildung $b : V \times W \rightarrow X$ existiert genau eine lineare Abbildung $L : V \otimes W \rightarrow X$ mit $b = L \circ b_0$. Mit anderen Worten, wir haben einen

funktoriiellen Isomorphismus

$$\text{Bil}(V \times W, X) = \text{Lin}(V \otimes W, X),$$

wobei Lin die linearen Abbildungen und Bil die bilinearen Abbildungen bezeichnet.

Beweis. Sei $b : V \otimes W \rightarrow X$ bilinear. Wir definieren eine lineare Abbildung $\tilde{L} : R[V \times W] \rightarrow X$ durch $\tilde{L}([(v, w)]) = b(v, w)$. Die Bilinearität von b bewirkt, dass $\tilde{L}(U) = 0$, wobei U der Unterraum aus Definition 1.6.4 ist. Damit faktorisiert \tilde{L} über eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $L : V \otimes W \rightarrow X$. Dieses L erfüllt die Behauptung. Für die Eindeutigkeit sei L' eine weitere lineare Abbildung $V \otimes W \rightarrow X$, die die Behauptung erfüllt. Dann gilt für $(v, w) \in V \times W$, dass $L(v \otimes w) = b(v, w) = L'(v \otimes w)$. Da die einfachen Tensoren $v \otimes w$ den Modul $V \otimes W$ erzeugen, folgt $L = L'$. \square

* * *

1.7 Komplexe

Definition 1.7.1. Eine Sequenz von Pfeilen in einer abelschen Kategorie

$$\dots \rightarrow C^{p-1} \xrightarrow{d_{p-1}} C^p \xrightarrow{d_p} C^{p+1} \rightarrow \dots$$

heisst **Komplex**, falls

$$d_p d_{p-1} = 0.$$

Die **Kohomologie** eines Komplexes C ist definiert als

$$H^p(C) = \ker d_p / \text{im } d_{p-1}.$$

Beachte dass eine exakte Sequenz dasselbe ist wie ein Komplex mit trivialer Kohomologie.

Definition 1.7.2. Sind $(A^p, d_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ und $(B^p, d_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ Komplexe, dann ist ein **Homomorphismus von Komplexen** $\phi^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ eine Familie von Pfeilen $\phi^p : A^p \rightarrow B^p$, so dass für jedes p das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^p & \xrightarrow{d_p} & A^{p+1} \\ \downarrow \phi_p & & \downarrow \phi_{p+1} \\ B^p & \xrightarrow{d_p} & B^{p+1} \end{array}$$

kommutiert.

Ein Homomorphismus von Komplexen bildet den Kern von d_A auf den Kern von d_B ab und ebenso für das Bild. Daher induziert ϕ^\bullet einen Morphismus auf der Kohomologie:

$$\phi_* : H^p(A) \rightarrow H^p(B).$$

Definition 1.7.3. Ein Homomorphismus von Komplexen $\phi^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ heisst **nullhomotop**, falls es Pfeile $h^p : A^p \rightarrow B^{p-1}$ gibt, so dass

$$\phi^p = dh^p + h^{p+1}d$$

für jedes $p \in \mathbb{Z}$. Wir visualisieren die Situation durch das (nicht-kommutative!) Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A^{p-1} & \xrightarrow{d} & A^p & \xrightarrow{d} & A^{p+1} \\ \downarrow \phi^{p-1} & \swarrow h^p & \downarrow \phi^p & \swarrow h^{p+1} & \downarrow \phi^{p+1} \\ B^{p-1} & \xrightarrow{d} & B^p & \xrightarrow{d} & B^{p+1} \end{array}$$

Lemma 1.7.4. Sei $\phi^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ ein Homomorphismus von Komplexen. Ist ϕ nullhomotop, dann ist $\phi_* = 0$.

Beweis. Nimm an, dass $\phi^p = dh^p + h^{p+1}d$. Sei $\alpha \in A^p$ mit $d\alpha = 0$. Dann

$$\phi^p(\alpha) = d(h^p\alpha) + h^{p+1}(\underbrace{d\alpha}_{=0}) = d(h^p\alpha).$$

Daher liegt $\phi_p(\alpha)$ im Bild von d , ist also Null in der Kohomologie, d.h., $\phi^* = 0$. \square

Bemerkung 1.7.5. Eine nullhomotope Abbildung von topologischen Räumen $f : X \rightarrow Y$ induziert eine nullhomotope Abbildung auf dem Singulären Kokettenkomplex. (Alg Top)

* * *

Lemma 1.7.6 (Serres 5er-Lemma). *Gegeben sei ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \cong \downarrow \alpha & & \cong \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \cong \downarrow \delta & & \cong \downarrow \varepsilon \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V \end{array}$$

Sind $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ Isomorphismen, dann ist auch γ ein Isomorphismus.

Beweis. Für die Injektivität sei $c \in C$ ein Element im Kern von γ . Sei $d \in D$ das Bild von c in D . Dann gilt $\delta(d) = 0$, also $d = 0$. Wegen Exaktheit der ersten Zeile ist c das Bild eines $b \in B$. Sei $y = \beta(b)$, dann ist das Bild von y in Z gleich $\gamma(b)$, d.h., Null. Deshalb gibt es ein $x \in X$, das nach y abbildet. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $x = \alpha(a)$. Das Element b ist dann das Bild von a und daher ist $c = 0$. Die Surjektivität erhält man durch Dualisieren. \square

Korollar 1.7.7. *Der Beweis liefert stärkere Statements:*

(a) *Sind β und δ injektiv und ist α surjektiv, dann ist γ injektiv.*

(b) Sind δ und β surjektiv, und ist ε injektiv, dann ist γ surjektiv.

Bemerkung 1.7.8. Der Beweis des 5er-Lemmas ist ein typischer Beweis durch Diagrammjagd, d.h., einzelne Elemente werden durch das Diagramm gejagt. Beweise durch Diagrammjagd sind allerdings in **jeder abelschen Kategorie** gültig! Das kann man auf verschiedene Arten sehen:

- (a) Man kann die Beweise umarbeiten, so dass sie keine Elemente mehr erwähnen. Das ist mühsam und liefert schwer lesbare Beweise.
- (b) Man kann Elemente durch **verallgemeinerte Elemente** von X ersetzen, das sind Pfeile $Z \rightarrow X$ modulo der Äquivalenzrelation erzeugt von $f \sim f \circ p$, wobei p ein Epi ist.
- (c) Man benutzt **Mitchells Einbettungssatz**, der besagt, dass es für jede kleine abelsche Kategorie \mathcal{A} einen Ring R mit eins gibt und einen volltreuen exakten Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow R \text{ MOD}$. Man arbeitet dann in $R \text{ MOD}$ und interpretiert die Ergebnisse in \mathcal{A} .

Definition 1.7.9. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' & & \\ 0 \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & Y & \xrightarrow{g'} & Z & \end{array}$$

mit exakten Zeilen heisst ein **Schlangendiagramm**.

Lemma 1.7.10 (Schlangenlemma). Gegeben sei ein Schlangendiagramm.

Wir erweitern es um Kerne und Cokerne, so dass ein kommutatives exaktes

Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \ker d' & \xrightarrow{\quad} & \ker d & \xrightarrow{\tau} & \ker d'' & \\
 & \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow k'' & \\
 & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' & \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & Y & \xrightarrow{g'} & Z \\
 & \downarrow \phi & & \downarrow \psi & & \downarrow & \\
 & \operatorname{coker} d' & \xrightarrow{\varepsilon} & \operatorname{coker} d & \longrightarrow & \operatorname{coker} d'' & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

erhalten. Dann gibt es eine funktorielle Abbildung $\delta : \ker d'' \rightarrow \operatorname{coker} d'$, so dass die Sequenz

$$\ker d' \rightarrow \ker d \rightarrow \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \rightarrow \operatorname{coker} d \rightarrow \operatorname{coker} d''$$

exakt ist.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \ker d' & \longrightarrow & \ker d & \longrightarrow & \ker d'' & \xrightarrow{\delta} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \searrow \\
 & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \searrow \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \searrow \\
 & \operatorname{coker} d' & \longrightarrow & \operatorname{coker} d & \longrightarrow & \operatorname{coker} d'' &
 \end{array}$$

Die Funktorialität von δ bedeutet, dass für jeden Morphismus $S_1 \rightarrow S_2$ von

Schlängendiagrammen das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \ker d'_1 & \longrightarrow & \ker d_1 & \longrightarrow & \ker d''_1 & \xrightarrow{\delta_1} & \operatorname{coker} d'_1 & \longrightarrow & \operatorname{coker} d_1 & \longrightarrow & \operatorname{coker} d''_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \ker d'_2 & \longrightarrow & \ker d_2 & \longrightarrow & \ker d''_2 & \xrightarrow{\delta_2} & \operatorname{coker} d'_2 & \longrightarrow & \operatorname{coker} d_2 & \longrightarrow & \operatorname{coker} d''_2
 \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis. Wir benutzen Diagrammjagd. Genauer zeigen wir, dass

$$\delta = \phi \circ (f')^{-1} \circ d \circ g^{-1} \circ k''$$

Wohldefiniert ist und die Sequenz exakt macht. Hierbei bedeutet z.B. g^{-1} , dass man ein beliebiges Urbild wählt, was dann nach Anwendung der folgenden Abbildung unabhängig von der Wahl wird. Diese Konstruktion garantiert bereits die Funktorialität.

Sei also $a \in \ker d''$. Wir bilden es nach C ab und erhalten $c = k''(a)$.

Wähle hierzu ein beliebiges Urbild $b \in B$. Bilde es auf $y = d(b) \in Y$ ab.

Die Kommutativität des Diagramms liefert

$g'(y) = g'(d(b)) = d''(c) = d''(k''(a)) = 0$. Wegen Exaktheit hat y ein Urbild $x \in X$ und man definiert $\delta(a) = \phi(x)$.

Wir zeigen Wohldefiniertheit. Sei also $b' \in B$ ein weiteres Urbild von c .

Wegen Exaktheit gibt es ein $\alpha \in A$ mit $b' = b + f(\alpha)$. Dann gilt

$d(b') = d(b) + d(f(\alpha)) = d(b) + f'(d'(\alpha))$ und da $\phi(d'(\alpha)) = 0$, können wir b durch b' ersetzen und erhalten dasselbe Bild in $\operatorname{coker} d'$. Da das Urbild unter f' ist eindeutig bestimmt ist, gibt es weiter kein

Wohldefiniertheitsproblem.

Nun zur Exaktheit der langen Sequenz. Wir zeigen zuerst, dass $\delta\tau = 0$.

Hierfür seien $z \in \ker d$ und $a = \tau(z)$. Das Urbild von c kann als $k(z) \in B$ gewählt werden. Dieses Element wird von d auf die Null abgebildet.

Wir zeigen $\varepsilon\delta = 0$. Sei $a \in \ker d''$ und seien b, y, x wie oben. Dann gilt $\varepsilon(\delta(a)) = \varepsilon(\phi(x)) = \psi(y) = \psi(d(b)) = 0$.

Sei $a \in \ker(\delta)$. Dann ist $\phi(x) = 0$, also gibt es ein $\alpha \in A$ mit $x = d'(\alpha)$, oder $y = f'(d'(\alpha)) = d(f(\alpha))$. Damit folgt $b = f(\alpha) + \theta$ für ein $\theta \in \ker d$. Wir haben $c = g(f(\alpha) + \theta) = g(f(\alpha)) + g(\theta) = g(\theta) = k''(\tau(\theta))$, also $a = \tau(\theta)$.

Schliesslich sei $z \in \ker \varepsilon$. Wähle ein Urbild $x \in X$ und setze $y = f'(x)$.

Dann folgt $\psi(y) = \psi(f'(x)) = \varepsilon(\gamma'(x)) = \varepsilon(z) = 0$ und daher gibt es ein $b \in B$ mit $y = d(b)$. Sei $c = g(b)$. Es folgt, dass

$d''(c) = d''(g(b)) = g'(d(b)) = g'(y) = g'(f'(x)) = 0$ und daher gibt es ein $a \in \ker d''$ mit $c = k''(a)$. Geht man wieder zurück, sieht man, dass

$z = \delta(a)$. □

Satz 1.7.11. Sei

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \rightarrow 0$$

eine exakt Sequenz von Komplexen. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ liefern die Abbildungen, die von f und g induziert werden eine exakt Sequenz

$$H^k(E) \rightarrow H^k(F) \rightarrow H^k(G).$$

Es gibt einen natürlichen **Verbindungshomomorphismus** $\delta : H^k(G) \rightarrow H^{k+1}(E)$, der die Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(E) \rightarrow H^0(F) \rightarrow H^0(G) \rightarrow \dots \rightarrow H^k(E) \xrightarrow{f} H^k(F) \xrightarrow{g} H^k(G) \\ \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(E) \xrightarrow{f} H^{k+1}(F) \xrightarrow{g} H^{k+1}(G) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

exakt macht.

Beweis. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & E^{k-1} & \longrightarrow & F^{k-1} & \longrightarrow & G^{k-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_E^{k-1} & & \downarrow d_F^{k-1} & & \downarrow d_G^{k-1} \\
 0 & \longrightarrow & E^k & \longrightarrow & F^k & \longrightarrow & G^k \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_E^k & & \downarrow d_F^k & & \downarrow d_G^k \\
 0 & \longrightarrow & E^{k+1} & \longrightarrow & F^{k+1} & \longrightarrow & G^{k+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_E^{k+1} & & \downarrow d_F^{k+1} & & \downarrow d_G^{k+1} \\
 0 & \longrightarrow & E^{k+2} & \longrightarrow & F^{k+2} & \longrightarrow & G^{k+2} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_E^{k+2} & & \downarrow d_F^{k+2} & & \downarrow d_G^{k+2} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

Die Zeilen mit Indizes k und $k + 1$ bilden ein Schlangendiagramm. Das Schlangenlemma liefert einen Morphismus

$$\delta : \ker d_G^k \rightarrow E^{k+1} / \operatorname{im} d_E^k.$$

Der Schlangenhomomorphismus δ faktorisiert über

$H^k(G) = \ker d_G^k / \operatorname{im} d_G^{k-1}$ und bildet in $\ker d_E^{k+1}$ ab. Die Exaktheit der Sequenz ist leicht zu sehen. \square

Korollar 1.7.12. *Die lange exakte Sequenz ist funktoriell in folgendem Sinne: Gegeben sei ein kommutatives exaktes Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow e & & \downarrow f & & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & G' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

von Komplexen. Die Morphismen e^* , f^* und g^* kommutieren mit langen

exakten Sequenzen, d.h., für jedes k kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^k(E) & \longrightarrow & H^k(F) & \longrightarrow & H^k(G) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(E) \\
 \downarrow e & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow e \\
 H^k(E') & \longrightarrow & H^k(F') & \longrightarrow & H^k(G') & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(E').
 \end{array}$$

Beweis. Kommutativität der ersten drei Quadrate ist klar. Die Kommutativität des letzten Quadrats folgt aus der Funktorialität des Schlangenhomomorphismus. □

* * *

2 Die klassischen Kohomologietheorien

2.1 Singuläre Kohomologie

Definition 2.1.1. Der **standard n -Simplex** ist die konvexe Hülle

$$\Delta^n = \text{conv}(e_0, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Der Standardbasis e_0, \dots, e_n von \mathbb{R}^{n+1} .

Definition 2.1.2. Sei X ein topologischer Raum. Ein **singulärer n -Simplex** ist eine stetige Abbildung

$$\sigma : \Delta^n \rightarrow X.$$

Sei $C_n(X)$ die freie abelsche Gruppe erzeugt von allen singulären n -Simplizes in X . Da ein 0-Simplex eine Abbildung vom Einpunktraum ist, ist die Gruppe $C_0(X)$ die freie Gruppe mit Basis X . Die Abbildung $t \mapsto (1-t)e_0 + te_1$ liefert einen Homeomorphismus $[0, 1] \rightarrow \Delta^1$. Also ist ein 1-Simplex dasselbe wie ein Weg in X .

Definition 2.1.3. Wir schreiben die konvexe Hülle von (e_0, \dots, e_n) in \mathbb{R}^{n+1} als $[e_0, \dots, e_n]$. Sei $[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_n] = [e_0, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n]$, dann kann an diesen Unterkomplex mit dem standard $(n-1)$ -Simplex Δ^{n-1} identifizieren mit Hilfe der affinen Abbildung $S_j : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ gegeben durch

$$S_j(e_i) = \begin{cases} e_i & i < j \\ e_{i+1} & i \geq j. \end{cases}$$

Diese Abbildung heisst die j -te **Seitenabbildung**.

Definition 2.1.4. Sei $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ die lineare Abbildung

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]}.$$

Die Abbildung ∂_n heisst der **Randoperator**.

Lemma 2.1.5. Es gilt $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}\partial_n(\sigma) &= \partial_{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[\dots \hat{e}_i \dots]} \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \sigma|_{[\dots \hat{e}_j \dots \hat{e}_i \dots]} \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^{i+j+1} \sigma|_{[\dots \hat{e}_i \dots \hat{e}_j \dots]} = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Definition 2.1.6. Die **singuläre Homologie** eines Raums X ist

$$H_n(X) := \ker(\partial_n) / \text{Bild}(\partial_{n+1}).$$

Definition 2.1.7. Sei R ein Ring und X ein topologischer Raum. Die Menge der **singulären Koketten** mit Koeffizienten in R ist

$$C^n(X, R) := \text{Hom}(C_n(X), R).$$

Die **Korand-Abbildung** $d^n : C^n(X, R) \rightarrow C^{n+1}(X, R)$ ist definiert als die Abbildung dual zur Randabbildung, also

$$d\phi(\sigma) := \phi(\partial\sigma).$$

Das heisst

$$d\phi(\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{n+1}]}).$$

Da d^2 dual ist zu $\partial^2 = 0$, folgt $d^2 = 0$ und man definiert die **singuläre Kohomologie** $H^p(X, R)$ mit Koeffizienten in R :

$$H^p(X, R) := \ker d^p / \operatorname{im}(d^{p-1}).$$

Definition 2.1.8. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und ist $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ ein singulärer Simplex, dann ist $f \circ \sigma$ ein singulärer Simplex in Y . Die Abbildung induziert eine Kettenabbildung $f_\# : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ und nach Dualisierung eine Kokettenabbildung $f^\# : C^n(Y, R) \rightarrow C^n(X, R)$, die eine Abbildung der Kohomologie

$$f^* : H^n(Y, R) \rightarrow H^n(X, R)$$

induziert.

Satz 2.1.9. Seien X, Y topologische Räume und $f, g : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Sind f und g homotop, dann stimmen die induzierten Abbildungen auf der Kohomologie überein, d.h.,

$$f^* = g^*.$$

* * *

2.2 De Rham Kohomologie

Definition 2.2.1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und für $p \in \mathbb{N}_0$ sei $\Omega^p(M)$ der reelle Vektorraum der p -Differentialformen. Das äußere Differential $d^p : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ erfüllt $d^{p+1}d^p = 0$, liefert also einen Komplex von \mathbb{R} -Vektorräumen. Die entsprechende Kohomologie wird **de Rham Kohomologie** von M genannt.

Definition 2.2.2. Sei $C_p^\infty(M)$ die freie Gruppe erzeugt von allen p -Simplizes $s : \Delta^p \rightarrow M$, die glatt sind. Durch Zurückziehen einer gegebenen p -Form $\omega \in \Omega^p(M)$ entlang s definiert man

$$\langle s, \omega \rangle := \int_{\Delta} s^* \omega = \int_{s(\Delta)} \omega.$$

So entsteht eine bilineare Abbildung $C_p^\infty(M) \times \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$, oder eine lineare Abbildung $\psi : \Omega^p \rightarrow C_n^\infty(M)^*$. Stokes Integralsatz besagt

$$\langle \partial s, \omega \rangle = \langle s, d\omega \rangle.$$

* * *

2.3 Gruppenkohomologie

Definition 2.3.1. Sei Γ eine Gruppe und sei M ein Γ -Modul. Für $n \geq 0$ operiert die Gruppe G auf G^{n+1} durch

$$g(g_0, \dots, g_n) := (gg_0, \dots, gg_n).$$

Sei

$$C^n(G, M) := \text{Hom}_G(G^{n+1}, M)$$

die abelsche Gruppe der G -Homomorphismen. Wir definieren das Differential $d : C^n(G, M) \rightarrow C^{n+1}(G, M)$,

$$d\alpha(g_0, \dots, g_{n+1}) := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \alpha(g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_{n+1}).$$

Man rechnet nach, dass $d^2 = 0$. Die **Gruppenkohomologie** ist definiert als die Kohomologie dieses Komplexes:

$$H^n(G, M) := \ker(d^n) / \text{im}(d^{n-1}).$$

Bemerkung 2.3.2. Ein Anwendungsbeispiel für Gruppenkohomologie ist dies: $H^2(G, M)$ klassifiziert die Isomorphieklassen aller Erweiterungen

$$1 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow G \rightarrow 1,$$

mit der gegebenen G -Aktion auf M .

* * *

3 Abgeleitete Funktoren

3.1 Auflösungen

Definition 3.1.1. Für eine abelsche Gruppe A sei

$$A^* = \text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

die duale Gruppe. Da die Gruppe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} divisibel ist, folgt, dass das Dual einer freien Gruppe divisibel ist.

Lemma 3.1.2. (a) Die kanonische Abbildung zum Bidual,

$$\begin{aligned} \delta : A &\rightarrow A^{**}, \\ a &\mapsto \delta_a \end{aligned}$$

mit $\delta_a(\alpha) = \alpha(a)$, ist injektiv.

(b) Ist M ein R -Modul für einen kommutativen Ring R , dann wird M^* ein R -Modul durch

$$r\alpha(m) = \alpha(rm), \quad \alpha \in M^*.$$

Für einen R -Modul Homomorphismus $f : M \rightarrow N$ ist die **duale**

Abbildung $f^* : N^* \rightarrow M^*$, $f^*(\beta) = \beta \circ f$ ein R -Modul-Homomorphismus.

Es gilt $\delta f^{**} = \delta f$, was bedeutet, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & B^{**} \\ \delta \uparrow & & \uparrow \delta \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

kommutiert.

- (c) Das Dual von $\delta_A : A \hookrightarrow A^{**}$ wird als $p_A : A^{***} \rightarrow A^*$ geschrieben. Die Komposition

$$A^* \xrightarrow{\delta_{A^*}} A^{***} \xrightarrow{p_{A^*}} A^*$$

ist die Identitätsabbildung.

- (d) Die Abbildung δ ist ein R -Modul-Homomorphismus. Ist P ein projektiver Modul, dann ist P^* injektiv.

Beweis. (a) Die Gruppe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ist divisibel, also injektiv in der Kategorie \mathbf{AB} der abelschen Gruppen. Also ist für jede Untergruppe $B \subset A$ die Abbildung $A^* \rightarrow B^*$ surjektiv.

Wir müssen zeigen, dass es für jedes $a \neq 0$ einen Homomorphismus $\eta : A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\eta(a) \neq 0$ gibt. Hierfür sei $2 \leq n \leq \infty$ die Ordnung von a . Sei

$$\eta(a) = \begin{cases} \frac{1}{n} + \mathbb{Z} & n < \infty, \\ \frac{1}{2} + \mathbb{Z} & n = \infty. \end{cases}$$

Dann dehnt η aus zu einem nicht-trivialen Gruppenhomomorphismus von der von a erzeugten Untergruppe $\langle a \rangle$ nach \mathbb{Q}/\mathbb{Z} aus. Da \mathbb{Q}/\mathbb{Z} divisibel, also injektiv ist, kann dieser Homomorphismus auf ganz A ausgedehnt werden und das gesuchte η ist gefunden.

- (b) Für $r \in R$ und $\beta \in B^*$, sowie $a \in A$ gilt

$$f^*(r\beta)(a) = (r\beta)(f(a)) = \beta(rf(a)) = \beta(f(ra)) = f^*(\beta(ra)) = (rf^*(\beta))(a),$$

also ist f^* ein R -Modul-Homomorphismus. Um die Kommutativität des Diagramms zu zeigen, rechnen wir für $a \in A$ und $\beta \in B^*$,

$$f^{**}(\delta_a)(\beta) = \delta_a(f^*(\beta)) = \delta_a(\beta \circ f) = \beta(f(a)) = \delta_{f(a)}(\beta).$$

(c) Für $\alpha \in A^*$ und $a \in A$ gilt

$$p_A(\delta_{A^*}(\alpha))(a) = \delta_{A^*}(\alpha)(\delta_A(a)) = \delta_A(a)(\alpha) = \alpha(a).$$

(d) Es gilt

$$\delta_{ra}(\alpha) = \alpha(ra) = (r\alpha)(a) = \delta_a(r\alpha) = r\delta(\alpha).$$

Sei P projektiv und sei ein kommutatives und exaktes Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & P^* & & \\ & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B \end{array}$$

gegeben. Man dualisiert es zu:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow \delta_P & \nearrow & \\ & & P^{**} & & \\ & & \downarrow \eta^* & & \\ 0 & \longleftarrow & A^* & \longleftarrow & B^* \end{array}$$

Da P projektiv ist, existiert der gepunktete Pfeil und das äußere Diagramm dualisiert zu

$$\begin{array}{ccccc} & & P^* & & \\ & & \uparrow & \nwarrow & \\ 0 & \longrightarrow & A^{**} & \longrightarrow & B^{**} \\ & & \uparrow & \nearrow & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B \end{array}$$

Wir zeigen, dass der Pfeil $\phi : A \rightarrow P^*$ in diesem Diagramm mit dem ursprünglichen Pfeil η im ersten Diagramm übereinstimmt. Hierfür beachte, dass nach Konstruktion gilt

$$\phi = (\eta^* \circ \delta_P)^* \circ \delta_S = \delta_P^* \circ \underbrace{\eta^{**} \circ \delta_A}_{\delta_{P^*} \circ \eta} = \underbrace{\delta_P^* \circ \delta_{P^*}}_{\text{Id}} \circ \eta = \eta$$

Hierbei wurden Teil (b) und dann Teil (c) verwendet. Damit ist P^* ein injektives Objekt. \square

Proposition 3.1.3. *Sei R ein kommutativer Ring, dann hat die Kategorie $R\text{MOD}$ genug Injektive.*

Beweis. Sei M ein R -Modul und sei

$$P \rightarrow M^* \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz, wobei P projektiv ist. Dualisieren liefert $0 \rightarrow M^{**} \rightarrow P^*$ und da M nach M^{**} eingebettet werden kann, bettet es nach P^* ein, welches nach dem Lemma injektiv ist. \square

Definition 3.1.4. Ein **injektive Auflösung** eines Objektes X einer abelschen Kategorie ist eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow X \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots,$$

in der die Objekte I^0, I^1, \dots injektiv sind. Wir schreiben $0 \rightarrow X \rightarrow I_X$.

Lemma 3.1.5. *Hat eine abelsche Kategorie \mathcal{A} genug Injektive, dann gibt es zu jedem Objekt injektive Auflösungen.*

Beweis. Sei X ein Objekt und $X \hookrightarrow I^0$ eine Injektion in ein injektives Objekt. Sei M der Cokern $X \rightarrow I^0$ und sei $M \hookrightarrow I^1$ eine Injektion in ein injektives I^1 . Dann ist die Sequenz $0 \rightarrow X \rightarrow I^0 \rightarrow I^1$ exakt. Sei $n \geq 1$

und sei I^0, \dots, I^n bereits konstruiert. Sei M der Cokern von $I^{n-1} \rightarrow I^n$. Wähle eine Injektion $M \hookrightarrow I^{n+1}$ in ein injektives Objekt. Die Sequenz $0 \rightarrow X \rightarrow I^0 \rightarrow \dots \rightarrow I^{n+1}$ ist exakt. Damit ist die induktive Konstruktion einer Auflöser beendet. \square

Bemerkung 3.1.6. Eine **projektive Auflöser** eines Objektes X ist eine injektive Auflöser in der dualen Kategorie, d.h. eine exakte Sequenz von Form

$$\dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0,$$

wobei alle P_j projektive Objekte sind. Hat die Kategorie genug Projektive, dann gibt es stets projektive Auflösungen.

In der Kategorie $R\text{MOD}$ kann man sogar freie Moduln nehmen. Man spricht dann von einer **freien Auflöser**.

* * *

Definition 3.1.7. Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} abelsche Kategorien. Ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heisst ein **exakter Funktor** wenn er exakte Sequenzen in exakte Sequenzen überführt. Er heisst **linksexakt**, falls für jede exakte Sequenz von Form

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

die Sequenz

$$0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$$

exakt ist. Er heisst **rechtsexakt**, wenn die Sequenz

$$F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$$

exakt ist.

Ist F kontravariant, betrachtet man ihn als Funktor auf \mathcal{A}^{opp} , so heisst F

linksexakt, wenn für jede exakte Sequenz wie oben die Sequenz

$$0 \rightarrow F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A)$$

exakt ist.

Bemerkung 3.1.8. Ein Funktor F ist genau dann linksexakt, wenn er für jede exakte Sequenz

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

die Bildsequenz

$$0 \rightarrow FX \rightarrow FY \rightarrow FZ$$

exakt ist.

Beweis. Sei F linksexakt und $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ exakt. Sei

$Z' = \text{im}(g) = \ker(\text{coker}(g))$, dann ist die Sequenz

$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z' \rightarrow 0$ exakt, also ist

$$0 \rightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ'$$

exakt. Da der Kern von Fg sich nicht ändert, wenn wir FZ' durch FZ ersetzen, folgt die Behauptung. \square

Beispiel 3.1.9. Für jedes Objekt A einer abelschen Kategorie \mathcal{A} ist der Funktor $\text{Hom}(A, -)$ linksexakt.

Proof. (a) Sei $0 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \rightarrow 0$ exakt. Dann ist α der Kern von β und β ist der Cokern von α . Sei $f : A \rightarrow X$ mit $\alpha \circ f = 0$. Da $0 \rightarrow X$ der Kern von α ist, faktorisiert der Morphismus f über die Nullabbildung, ist also Null. Damit ist die Abbildung $\text{Hom}(A, \alpha)$ injektiv.

Es gilt $\text{Hom}(A, \beta) \circ \text{Hom}(A, \alpha) = \text{Hom}(A, \beta \circ \alpha) = 0$, da $\beta \circ \alpha = 0$. Sei $f : A \rightarrow Y$ im Kern von $\text{Hom}(A, \beta)$, d.h., $\beta \circ f = 0$. Da α der Kern von β

ist, faktorisiert f über α , d.h., $f = \alpha \circ h = \text{Hom}(A, \alpha)(h)$ für ein h .
Zusammen erhalten wir, dass die Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, X) \rightarrow \text{Hom}(A, Y) \rightarrow \text{Hom}(A, Z)$$

exakt ist. □

Lemma 3.1.10. *Ein Objekt A ist genau dann projektiv, wenn $\text{Hom}(A, -)$ exakt ist. A ist genau dann injektiv wenn $\text{Hom}(-, A)$ exakt ist.*

Beweis. Nach dem Beispiel ist der Funktor bereits linksexakt. Danach ist die Aussage nur eine Umformulierung der Definition. □

Lemma 3.1.11. *Gegeben seien zwei Auflösungen: $0 \rightarrow M \rightarrow I_M$ und $0 \rightarrow N \rightarrow I_N$, wobei die zweite als injektiv angenommen wird. Dann kann jeder Morphismus $\phi : M \rightarrow N$ zu einem Morphismus $\alpha : I_M \rightarrow I_N$ von Komplexen fortgesetzt werden.*

Ist auch die erste Auflösung injektiv, dann sind je zwei solcher Fortsetzungen homotop, d.h., für zwei Fortsetzungen α und β von $\phi : M \rightarrow N$ ist die Differenz $\alpha - \beta$ nullhomotop.

Beweis. Wir konstruieren eine Fortsetzung induktiv. Die Zeilen in folgendem kommutativ Diagramm (durchgezogene Pfeile) sind exakt.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f^0} & I_M^0 & \xrightarrow{f^1} & I_M^1 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \phi & \searrow & \downarrow \alpha^0 & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g^0} & I_N^0 & \xrightarrow{g^1} & I_N^1 \longrightarrow \dots \end{array}$$

Da I_N^0 injektiv ist, kann man den diagonalen Pfeil $g^0 \phi$ auf I_M^0 liften und damit α^0 definieren. Schreibe $I_M^{-1} = M$, sowie $I_N^{-1} = M$ und $\alpha^{-1} = \phi$. Das bedeutet, dass wir nun α^{-1} und α^0 haben.

Für den Induktionsschritt nimm an, dass α^{n-2} und α^{n-1} bereits konstruiert sind und betrachte das kommutative Diagramm mit durchgezogenen Pfeile:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & I_M^{n-1} / \ker(f^n) & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 I_M^{n-2} & \xrightarrow{f^{n-1}} & I_M^{n-1} & \xrightarrow{f^n} & I_M^n \\
 \downarrow \alpha^{n-2} & & \downarrow \alpha^{n-1} & & \downarrow \alpha^n \\
 I_M^{n-2} & \xrightarrow{g^{n-1}} & I_N^{n-1} & \xrightarrow{g^n} & I_N^n \\
 & & & \nearrow F &
 \end{array}$$

Ist $f^n(x) = 0$, dann gilt $x = f^{n-1}(y)$ für ein y und man erhält $F(x) = F(f^{n-1}(y)) = g^n(g^{n-1}(\alpha^{n-2}(y))) = 0$. Das bedeutet, dass F über $I_M^{n-1} / \ker(f^n)$ faktorisiert. Da I_N^n injektiv ist, kann man F auf I_M^n liften. Wir wählen einen Lift und nennen ihn α^n .

Damit ist die Existenz gezeigt. Nun zur Eindeutigkeit modulo Homotopie. In diesem Falle sollen die I_M^p ebenfalls injektiv sein. Der Morphismus von Komplexen $\alpha - \beta$ setzt $\phi = 0$ fort. Wir muessen also zeigen, dass jede Fortsetzung der Nullabbildung nullhomotop ist. Wir haben ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{d_M} & I^0 & \xrightarrow{d_I^0} & I^1 & \xrightarrow{d_I^1} & I^2 & \xrightarrow{d_I^2} & \dots \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow \alpha^0 & & \downarrow \alpha^1 & & \downarrow \alpha^2 & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{d_N} & J^0 & \xrightarrow{d_J^0} & J^1 & \xrightarrow{d_J^1} & J^2 & \xrightarrow{d_J^2} & \dots
 \end{array}$$

bestehend aus injektiven Objekten I^k, J^k . Wir konstruieren Pfeile $P^k : I^k \rightarrow J^{k-1}$, so dass $\alpha^k = d_J^{k-1} P^k + P^{k+1} d_I^k$. Wir beginnen mit $P^0 : I^0 \rightarrow N$,

dies ist die Nullabbildung. Sei also \dots, P^{k-1}, P^k bereits konstruiert.

$$\begin{array}{ccccccc}
 I^{k-1} & \xrightarrow{d_I^{k-1}} & I^k & \xrightarrow{d_I^k} & I^{k+1} & \xrightarrow{d_I^{k+1}} & \dots \\
 \downarrow & \swarrow P^k & \downarrow \alpha^k & & \downarrow \alpha^{k+1} & & \\
 J^{k-1} & \xrightarrow{d_J^{k-1}} & J^k & \xrightarrow{d_J^k} & J^{k+1} & \xrightarrow{d_J^{k+1}} & \dots
 \end{array}$$

Wir nehmen an, dass $\alpha^k = d_J^{k-1} P^k$ auf dem Bild von I^{k-1} gilt, also genauer $d_I^{k-1}(\alpha^k - d_J^{k-1} P^k) = 0$. Das bedeutet, dass $\alpha^k - d_J^{k-1} P^k$ auf dem Kern von d_I^k verschwindet, also über d_I^k faktorisiert.

$$\begin{array}{ccccccc}
 I^{k-1} & \xrightarrow{d_I^{k-1}} & I^k & \xrightarrow{d_I^k} & I^{k+1} & \xrightarrow{d_I^{k+1}} & \dots \\
 \downarrow & \swarrow P^k & \downarrow \alpha^k & \searrow & \downarrow \alpha^{k+1} & & \\
 & & & \text{im}(d_I^k) & & & \\
 & \swarrow \alpha^k - d_J^{k-1} P^k & & & & & \\
 J^{k-1} & \xrightarrow{d_J^{k-1}} & J^k & \xrightarrow{d_J^k} & J^{k+1} & \xrightarrow{d_J^{k+1}} & \dots
 \end{array}$$

Da J^k injektiv ist, setzt $\alpha^k - d_J^{k-1} P^k$ fort zu einem Pfeil $I^{k+1} \rightarrow J^k$, den wir P^{k+1} nennen. Wir haben dann einerseits $\alpha^k = d_J^{k-1} P^k + P^{k+1} d_I^k$ und andererseits $\alpha^{k+1} = d_J^k P^{k+1}$ auf dem Bild von I^k , so dass die Konstruktion weiterläuft. Das Lemma ist bewiesen. \square

Definition 3.1.12. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor zur abelschen Kategorie \mathcal{B} . Für jedes Objekt X von \mathcal{A} wähle eine injektive Auflösung $0 \rightarrow X \rightarrow I_X$ und definiere

$$R^k F(X) = H^k(F(I_X)).$$

Nach Lemma 3.1.11 existiert zu jedem Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{A} ein Morphismus von Komplexen $I_X \rightarrow I_Y$ und damit ein Morphismus $R^k F(f) : R^k F(X) \rightarrow R^k F(Y)$. Nach dem Lemma hängen diese Morphismen nicht von der Wahl von Auflösungen ab. Mit anderen

Worten: $R^p F$ ist ein Funktor von \mathcal{A} zur Kategorie \mathcal{B} .

Lemma 3.1.13.

- (a) Wendet man einen additiven Funktor F auf eine spaltende Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ an, dann ist die Bildsequenz $0 \rightarrow FA \rightarrow FB \rightarrow FC \rightarrow 0$ ebenfalls exakt.
- (b) Sei $0 \rightarrow I \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in einer abelschen Kategorie, wobei I injektiv ist. Dann spaltet die Sequenz.
- (c) Sei $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven. Dann existieren injektive Auflösungen I_X, I_Y, I_Z und ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & I_X^0 & \longrightarrow & I_Y^0 & \longrightarrow & I_Z^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & I_X^1 & \longrightarrow & I_Y^1 & \longrightarrow & I_Z^1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Beweis. (a) Man kann B durch $A \oplus C$ ersetzen, so dass die Sequenz in zwei Isomorphismen zerfällt, die durch den Funktor bewahrt bleiben.

(b) Wegen Injektivität kann der Id-Pfeil $I \rightarrow I$ zu einem Pfeil $s : B \rightarrow I$ erweitert werden, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & B \\
 & & \downarrow \text{Id} & \nearrow s & \\
 & & I & &
 \end{array}$$

kommutativ macht. Also haben wir eine spaltende Sequenz.

(c) Wähle zuerst I_X^0 und I_Z^0 und setze dann $I_Y^0 = I_X^0 \oplus I_Z^0$. Wiederhole das dann für die Sequenz der Cokerns. \square

Satz 3.1.14. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor zu einer abelschen Kategorie \mathcal{B} .

- (a) Für jedes $n \geq 0$ ist der Funktor $R^n F$ additiv. Bis auf Isomorphie von Funktoren ist $R^n F$ unabhängig von den Wahlen der Auflösungen.
- (b) Es gibt einen natürlichen Isomorphismus von Funktoren $F \cong R^0 F$.
- (c) Für jede exakte Sequenz

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

und jedes $n \geq 0$ gibt es einen natürlichen Morphismus

$$\delta^n : R^n F(Z) \rightarrow R^{n+1} F(X),$$

so dass die Sequenz

$$\dots \rightarrow R^n F(X) \rightarrow R^n F(Y) \rightarrow R^n F(Z) \xrightarrow{\delta^n} R^{n+1} F(X) \rightarrow \dots$$

exakt ist.

- (d) Für jeden Morphismus kurzer exakter Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' \longrightarrow 0 \end{array}$$

und jedes $n \geq 0$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^n F(Z) & \xrightarrow{\delta^n} & R^{n+1} F(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^n F(Z') & \xrightarrow{\delta^n} & R^{n+1} F(X') \end{array}$$

- (e) Ist I ein injektives Objekt, dann gilt $R^n F(I) = 0$ für $n \geq 1$.

Beweis. Der einzige nicht-offensichtliche Punkt ist die lange exakte Sequenz. Wähle Auflösungen wie in Lemma 3.1.13 part (c). Jede Sequenz $0 \rightarrow I_X^k \rightarrow I_Y^k \rightarrow I_Z^k \rightarrow 0$ spaltet nach Teil (b) von Lemma 3.1.13 und daher ist die Sequenz von Komplexen $0 \rightarrow F(I_X) \rightarrow F(I_Y) \rightarrow F(I_Z) \rightarrow 0$ exakt. Nun folgt die Behauptung aus Satz 1.7.11. \square

Im Folgenden sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien, wobei wir annehmen, dass \mathcal{A} genug Injektive hat.

Definition 3.1.15. Ein Objekt A von \mathcal{A} heisst **F -azyklisch**, oder nur **azyklisch**, wenn für jedes $i \geq 1$ gilt $R^i F(A) = 0$. Sei $X \in \mathcal{A}$. Eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow X \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \dots$$

heisst **azyklische Auflösung** von X , falls alle A^j azyklisch sind.

Beispiel 3.1.16. Injektive Objekte sind stets azyklisch, und daher sind injektive Auflösungen stets azyklische Auflösungen.

Lemma 3.1.17. *Sei*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz in \mathcal{A} und nimm an, dass A azyklisch ist. Dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$$

ebenfalls exakt.

Beweis. Dies folgt aus der langen exakten Kohomologiesequenz aus Satz 3.1.14. \square

Satz 3.1.18. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor in eine abelsche Kategorie \mathcal{B} . Sei $0 \rightarrow X \rightarrow A^0 \rightarrow \dots$ eine F -azyklische Auflösung. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus $R^i F(X) \rightarrow H^i(F(A^\bullet))$. Das bedeutet, dass abgeleitete Funktoren mit beliebigen azyklischen Auflösungen berechnet werden können.

Beweis. **1. Schritt:** $X = 0$.

In diesem Fall müssen wir zeigen, dass für eine exakte Sequenz

$0 \rightarrow Y^0 \rightarrow Y^1 \rightarrow \dots$ von F -azyklischen Objekten die Sequenz

$0 \rightarrow F(Y^0) \rightarrow F(Y^1) \rightarrow \dots$ exakt ist.

Beweis von Schritt 1. Da F linksexakt ist, ist

$$0 \rightarrow F(Y^0) \rightarrow F(Y^1) \rightarrow F(Y^2)$$

exakt. Sei $Z^j = \text{coker}(Y^{j-1} \rightarrow Y^j)$. Wir erhalten ein kommutatives und exaktes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Y^0 & \longrightarrow & Y^1 & \longrightarrow & Y^2 & \longrightarrow & Y^3 \\
 & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & & & & & Z^1 & & Z^2 \\
 & & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Nach Anwendung von F erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow F(Y^0) \rightarrow F(Y^1) \rightarrow F(Z^1) \rightarrow R^1 F(Y^0) = 0.$$

Es folgt $F(Z_1) = \text{coker}(F(Y^0) \rightarrow F(Y^1))$. Die exakte Sequenz

$0 \rightarrow Z^1 \rightarrow Y^2 \rightarrow Y^3$ gibt eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow F(Z^1) \rightarrow F(Y^2) \rightarrow F(Y^3).$$

Setzen wir dies in die vorherige ein, sehen wir, dass die Sequenz

$$\text{coker}(F(Y^0) \rightarrow F(Y^1)) \rightarrow F(Y^2) \rightarrow F(Y^3)$$

ebenfalls exakt ist. Das bedeutet, dass auch

$$F(Y^1) \rightarrow F(Y^2) \rightarrow F(Y^3)$$

exakt ist. Dieses Argument wird wiederholt und beweist damit die Aussage. □

2. Schritt: X beliebig.

Wähle eine injektive Auflösung

$$0 \rightarrow X \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$$

Nach Lemma 3.1.11 erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & A^1 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overset{=}{X} & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 \longrightarrow \dots \end{array}$$

wobei die vertikalen Abbildungen, nach Vergrößerung von I^k , falls nötig, als injektiv angenommen werden können. Sei (Y^j) die Sequenz der Cokerns der vertikalen Abbildungen. Wir erhalten ein exaktes,

kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & A^1 \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 \longrightarrow \dots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & Y^0 & \longrightarrow & Y^1 \longrightarrow \dots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Jede Spalte liefert eine lange exakte Sequenz wie in Satz 3.1.14, welche für $j \geq 0$ und $k \geq 1$ die exakte Sequenz

$0 = R^k F(I^j) \rightarrow R^k F(Y^j) \rightarrow R^{k+1} F(A^{j+1}) = 0$ enthält. Wir sehen also, dass auch Y^j azyklisch ist. Ferner, Lemma 3.1.17 impliziert, dass jede Sequenz

$$0 \rightarrow F(A^j) \rightarrow F(I^j) \rightarrow F(Y^j) \rightarrow 0$$

exakt ist. Wir erhalten eine exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(I) \rightarrow F(Y) \rightarrow 0.$$

mit der entsprechenden langen Kohomologiesequenz

$$H^{j-1} F(Y) \rightarrow H^j F(A) \rightarrow H^j F(I) \rightarrow H^j F(Y).$$

Nach dem ersten Schritt sind beide Enden gleich Null, also ist der Pfeil in der Mitte ein Isomorphismus und damit

$$H^j F(A) \cong H^j F(I) = R^j F(X).$$

□

* * *

3.2 Delta-Funktoren

Definition 3.2.1. Sei \mathcal{A} und \mathcal{B} abelsche Kategorien. Ein δ -Funktorkomplex von \mathcal{A} nach \mathcal{B} ist eine Sequenz von additiven Funktoren $T^i, i = 0, 1, 2, \dots$, zusammen mit einer Familie von Morphismen $\delta^i : T^i(C) \rightarrow T^{i+1}(A)$ für jede exakte Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, so dass

- Für jede kurze exakte Sequenz in \mathcal{A} :

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

ist die Sequenz

$$0 \rightarrow T^0(A) \rightarrow T^0(B) \rightarrow T^0(C) \xrightarrow{\delta} T^1(A) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow T^p(A) \rightarrow T^p(B) \rightarrow T^p(C) \xrightarrow{\delta} T^{p+1}(A) \rightarrow \dots$$

exakt.

- Für jeden Morphismus kurzer exakter Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

liefern die Verbindungs-Homomorphismen δ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T^p(C) & \xrightarrow{\delta} & T^{p+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^p(Z) & \xrightarrow{\delta} & T^{p+1}(X). \end{array}$$

Definition 3.2.2. Ein δ -Funktorkomplex T heisst **universeller δ -Funktorkomplex**, falls für jeden anderen δ -Funktorkomplex S und jede natürliche Transformation $f^0 : T^0 \rightarrow S^0$ es eine eindeutig bestimmte Sequenz von natürlichen Transformationen $f^p : T^p \rightarrow S^p$ gibt, so dass für jede exakte Sequenz

$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & T^p(A) & \longrightarrow & T^p(B) & \longrightarrow & T^p(C) \xrightarrow{\delta} T^{p+1}(A) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_A^p & & \downarrow f_B^p & & \downarrow f_C^p & & \downarrow f_A^{p+1} \\ \cdots & \longrightarrow & S^p(A) & \longrightarrow & S^p(B) & \longrightarrow & S^p(C) \xrightarrow{\delta} S^{p+1}(A) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

kommutiert.

Lemma 3.2.3. *Seien S und T universelle δ -Funkoren und es gelte $T^0 \cong S^0$. Dann gilt $T^p \cong S^p$ für jede $p \geq 0$.*

Beweis. Sei $f^0 : T^0 \rightarrow S^0$ ein Isomorphismus mit Inversem $g^0 : S^0 \rightarrow T^0$. Sei f^p und g^p die eindeutig bestimmten Fortsetzungen für $p \geq 1$. Dann ist $f^p g^p$ eine Fortsetzung von $f^0 g^0 = \text{Id}$, die mit den δ s kommutiert. Da eine solche Fortsetzung eindeutig bestimmt ist, folgt $f^p g^p = \text{Id}$. Die andere Richtung geht ebenso, also sind die f^p Isomorphismen. \square

Definition 3.2.4. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heisst **auslöschar**, falls für jede Objekt $X \in \mathcal{A}$ es einen mono $u : X \hookrightarrow I$ gibt, so dass $F(u) = 0$. In den Anwendungen gilt sogar $F(I) = 0$, aber die Definition ist ein wenig allgemeiner.

Beispiel 3.2.5. Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ additiv und linksexakt und nimm an, dass \mathcal{A} genug Injektive hat. Dann gibt es rechts abgeleitete Funktoren $R^p F$ für $p \geq 1$ und diese Funktoren sind auslöschar, da sie auf injektiven Objekte verschwinden.

Lemma 3.2.6. *Sei \mathcal{C} eine Kategorie und sei*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{h} & X \\ f \downarrow & & \downarrow \theta \\ Y & \xrightarrow{h'} & P \end{array}$$

ein cocartesisches Diagramm, also P ist das Co-Faserprodukt von X und Y .

- Ist h ein Epi, dann ist h' ebenfalls einer.
- Hat \mathcal{C} genug injektive und ist h mono, dann ist auch h' mono.

Beweis. In einer Übungsaufgabe wurde dieselbe Aussage für die duale Kategorie bewiesen. \square

Satz 3.2.7. Sei T ein δ -Funktorkomplex, so dass jeder T^p , $p \geq 1$ auslöschar ist. Dann ist T universell.

Beweis. Sei S ein weiterer δ -Funktorkomplex und sei $f^0: T^0 \rightarrow S^0$ gegeben. Wir löschen ein gegebenes Objekt A von \mathcal{A} mit einem Objekt I aus und erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{u} I \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$$

mit $T^1(u) = 0$. Nach der langen exakten Sequenz, bilden die soliden Pfeile ein kommutatives exaktes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} T^0(I) & \xrightarrow{T^0(v)} & T^0(C) & \xrightarrow{\delta_T} & T^1(A) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_I^0 & & \downarrow f_C^0 & & \downarrow f_A^1 & & \\ S^0(I) & \xrightarrow{S^0(v)} & S^0(C) & \xrightarrow{\delta_S} & S^1(A) & & \end{array}$$

Die letzte Null kommt von $T^1(u) = 0$. Es folgt, dass $\delta_T = \text{coker}(T^0(v))$.

Da die zweite Zeile exakt ist, erhalten wir $\delta_S S^0(v) f_I^0 = 0$ und so

$\delta_S f^0(C) T^0(v) = 0$. Daher gibt es einen eindeutig bestimmten Pfeil $f^1(A)$, so dass das ganze Diagramm kommutiert.

Wir müssen zeigen, dass f^1 eine natürliche Transformation ist, d.h.,

dass für jeden Morphismus $\tau : A \rightarrow B$ in \mathcal{A} das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T^1(A) & \xrightarrow{T^1(\tau)} & T^1(B) \\ f_A^1 \downarrow & & \downarrow f_B^1 \\ S^1(A) & \xrightarrow{S^1(\tau)} & S^1(B) \end{array}$$

kommutiert. Hierfür sei $\tau : A \rightarrow B$ ein Morphismus in \mathcal{A} . Betrachte das Cofaserprodukt P :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & I \\ \downarrow \tau & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & P. \end{array}$$

Da u mono ist, ist nach Lemma 3.2.6 der Pfeil $B \rightarrow P$ ebenfalls mono.

Sei $P \hookrightarrow N$ ein Monomorphismus, der P auslöscht. Wir erhalten ein exaktes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tau & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0, \end{array}$$

wobei $B \rightarrow N$ die Komposition $B \rightarrow P \rightarrow N$ und Y der Cokern ist. Das Diagramm, dessen Kommutativität wir zeigen wollen, ist die rechte Seitenfläche des folgenden Würfels:

$$\begin{array}{ccccc} T^0(C) & \xrightarrow{\delta_T} & T^1(A) & & \\ \downarrow f_C^0 & \searrow T^0(\beta) & \downarrow & \searrow T^1(\tau) & \\ & T^0(Y) & \longrightarrow & T^1(B) & \\ & \downarrow & & \downarrow f_B^1 & \\ S^0(C) & \longrightarrow & S^1(A) & & \\ & \searrow S^0(\beta) & \searrow S^1(\tau) & & \\ & S^0(Y) & \longrightarrow & S^1(B). & \end{array}$$

Alle anderen Flächen dieses Würfels kommutieren und da δ_T ein epi ist,

kommutiert die rechte Seite auch.

Als nächstes müssen wir zeigen, dass f_1 mit dem Verbindungs-Homomorphismus δ kommutiert. Sei

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz in \mathcal{A} . Mit derselben Cofaserprodukt-Konstruktion erhält man einen auslöschenden Monomorphismus $A \rightarrow I$ und ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I & \longrightarrow & X \longrightarrow 0. \end{array}$$

Betrachte das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & T^0(C) & & \\ & \swarrow & \downarrow f_C^0 & \searrow & \\ & & S^0(C) & & \\ & \swarrow T^0(\beta) & & \searrow \delta_T & \\ T^0(X) & \xrightarrow{\delta_T} & T^1(A) & & \\ \downarrow f_X^0 & & \downarrow \delta_S & & \downarrow f_A^1 \\ S^0(X) & \xrightarrow{\delta_S} & S^1(A). & & \end{array}$$

Wir wollen zeigen, dass die rechte Seite kommutiert. Die Dreiecke oben und unten kommutieren nach der Definition des δ -Funktoren. Das linke Quadrat kommutiert, da f^0 eine natürliche Transformation ist. Das vordere Quadrat kommutiert nach der Definition von f^1 . Daher kommutiert das letzte Quadrat ebenfalls.

Ein Iteration dieses Arguments mit dem Indexpaar $(n, n + 1)$ an Stelle von $(0, 1)$ liefert den Satz. \square

* * *

4 Garben

4.1 Topologische Garben

Definition 4.1.1. Sei X ein topologischer Raum und sei $\text{Off}(X)$ die Kategorie, deren Objekte die offenen Mengen in X sind und die einzigen Morphismen sind die Inklusionen $U \hookrightarrow V$ für $U \subset V$.

Eine **Prägarbe** ist ein kontravarianter Funktor

$$\mathcal{F} : \text{Off}(X) \rightarrow \text{AB}.$$

Man kann statt der Kategorie von abelschen Gruppen an dieser Stelle jede Kategorie nehmen. Entsprechend erhält man Garben von Mengen, Ringen, Moduln, etc. Da es für den Garbenbegriff keine Rolle spielt, bleiben wir zunächst bei den abelschen Gruppen, später nehmen wir Moduln.

Bemerkung 4.1.2. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X . Zu jeder offenen Menge $U \subset X$ hat man eine abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$ und für jede Inklusion $V \subset U$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, den man die **Restriktion** nennt und in der Form res_V^U oder $s \mapsto s|_V$ schreibt. Es folgt dann, dass für $s \in \mathcal{F}(U)$ gilt

$$(s|_V)|_W = s|_W, \quad \text{und} \quad s|_U = s.$$

Definition 4.1.3. Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ werden **Schnitte** über U der Garbe \mathcal{F} genannt. Ein Element $s \in \mathcal{F}(X)$ heisst **globaler Schnitt**.

Beispiele 4.1.4. Wir fixieren eine abelsche Gruppe A und einen topologisch Raum X .

- (a) Sei \mathcal{M}_A die **Prägarbe aller Abbildungen**, d.h., für eine offene Menge U sei $\mathcal{M}_A(U)$ die Menge aller Abbildungen $s : U \rightarrow A$. Dann

ist \mathcal{M}_A eine Prägarbe bei der $s|_V$ wirklich die Einschränkung der Abbildung s ist.

(b) Mit \mathcal{K}_A bezeichnen wir die **konstante Prägarbe** mit Wertegruppe A . Nach Definition ist $\mathcal{K}_A(U)$ die Menge aller **lokalkonstanten** Abbildungen $s : U \rightarrow A$. Dann ist \mathcal{K}_A eine Prägarbe auf X .

(c) Für einen fest gewählten Punkt $x_0 \in X$ setze

$$\mathcal{S}(U) = \mathcal{S}_{A,x_0}(U) = \begin{cases} A & \text{if } x_0 \in U \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit der Restriktion

$$\text{res}_V^U = \begin{cases} \text{Id}_A & x_0 \in V, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird \mathcal{S} eine Prägarbe, die man die **Wolkenkratzerprägarbe** in x_0 mit Wertegruppe A nennt.

(d) Schliesslich sei $\mathcal{Z}(U) = A$ für jede offene Menge U und setze

$$\text{res}_V^U = \begin{cases} \text{Id}_A & U = V, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Daten definieren eine Prägarbe auf X .

Definition 4.1.5. Ein **Morphismus von Prägarben** $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen $(\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U))_{U \subset X \text{ offen}}$, so dass für jede Inklusion von offenen Mengen $V \subset U$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \text{res}_V^U & & \downarrow \text{res}_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

kommutiert.

Beispiele 4.1.6.

- (a) Sei \mathcal{K}_A die konstante Garbe auf X mit Wertegruppe A . Dann induziert jeder Gruppenhomomorphismus $g : A \rightarrow B$ einen Morphismus von Prägarben

$$g_* : \mathcal{K}_A \rightarrow \mathcal{K}_B, \quad g_*(s) = g \circ s.$$

- (b) Für einen festen Punkt x_0 sei \mathcal{S}_A die Wolkenkratzer-Prägarbe in x_0 mit Wertegruppe A . Dann induziert jeder Gruppenhomomorphismus $g : A \rightarrow B$ einen Prägarben-Homomorphismus

$$g_* : \mathcal{S}_A \rightarrow \mathcal{S}_B, \quad g_*(s) = g(s).$$

- (c) Sei $f_0 : X \rightarrow \{0, 1\}$ eine lokalkonstante Abbildung, also $f^{-1}(0)$ und $f^{-1}(1)$ sind beide offen. Dann induziert f einen Prägarben-Morphismus $\phi_f : \mathcal{K}_A \rightarrow \mathcal{K}_A$ durch

$$\phi_f(s)(x) = f(x)s(x).$$

* * *

Definition 4.1.7. Eine **Garbe** über einem Raum X ist eine Prägarbe \mathcal{F} mit den Eigenschaften:

- **(Lokalität)** Sei $U \subset X$ offen und sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U , also $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Ferner sei $s \in \mathcal{F}(U)$, so dass $s|_{U_i} = 0$ für jede $i \in I$. Dann ist $s = 0$.
- **(Verklebung)** Sei $U \subset X$ offen und sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U . Sei $(s_i)_{i \in I}$ eine Familie mit $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, so dass

für je zwei $i, j \in I$ gilt

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Dann existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$, so dass $s_i = s|_{U_i}$ für jede $i \in I$.

Das Lokalisationsaxiom sagt, dass ein Schnitt durch seine lokalen Einschränkungen festgelegt ist und das Verklebungsaxiom, dass lokale Schnitte zu einem globalen Schnitt verklebt werden können.

Beispiele 4.1.8. (a) Die Prägarbe aller Abbildungen \mathcal{M}_A ist eine Garbe.

(b) Die Prägarbe $\mathcal{F}(U) = C(U, \mathbb{R})$ aller stetigen Abbildungen nach \mathbb{R} ist eine Garbe: Das Lokalisationsaxiom ist bei Einschränkung von Funktionen immer erfüllt und für das Verklebungsaxiom stellt man fest, dass man zu einer offenen Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Familie von stetigen Abbildungen $s_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ mit $s_i \equiv s_j$ auf $U_i \cap U_j$ (Kompatibilität) zu einer stetigen Abbildung $s : U \rightarrow \mathbb{R}$ **verkleben** kann, d.h., man definiert $s(x) = s_i(x)$ falls $x \in U_i$, wobei die Wohldefiniertheit aus der Kompatibilität folgt und die Stetigkeit aus der Tatsache, dass s lokal immer gleich einem der s_i ist.

(c) Die konstante Prägarbe \mathcal{K}_A ist eine Garbe.

(d) Die Wolkenkratzerprägarbe \mathcal{S}_{A, x_0} ist eine Garbe.

(e) Sei $X \neq \emptyset$. Die Prägarbe \mathcal{Z} mit $\mathcal{Z}(U) = A$ und $\text{res}_V^U = 0$ ist keine Garbe, falls $A \neq 0$, denn für eine Garbe \mathcal{F} gilt $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ wie wir noch beweisen werden.

(f) Sei A eine abelsche Gruppe, $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}(U) = A$ falls $U = X$, und $\mathcal{F}(U) = 0$ sonst. Dann ist \mathcal{F} eine Prägarbe, die das Verklebungsaxiom erfüllt, nicht aber Lokalität.

(g) Sei $A \neq 0$ eine abelsche Gruppe, $X = \mathbb{R}$ und sei $\mathcal{F}(U) = 0$, falls der Durchmesser von U größer als 1 ist. Sonst sei $\mathcal{F}(U) = A$. Die

Restriktionsabbildungen sind die natürlichen Einbettungen. Dann ist \mathcal{F} eine Prägarbe, die das Lokalitätsaxiom erfüllt, nicht aber das Verklebungsaxiom.

Bemerkung 4.1.9. Die Garbenaxiome implizieren, dass für jede Garbe \mathcal{F} gilt $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$. Um dies zu zeigen, sei $s \in \mathcal{F}(\emptyset)$ und sei $(U_i)_{i \in I}$ die leere Überdeckung, d.h., $I = \emptyset$. Dann gilt für jedes $i \in I$, dass $s|_{U_i} = 0$, da I gar keine Elemente hat! Nach dem Lokalitätsaxiom ist $s = 0$.

Lemma 4.1.10. Eine Prägarbe \mathcal{F} ist genau dann eine Garbe, wenn für jede offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ die Sequenz

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{g} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

exakt ist, wobei die Produkte über I und $I \times I$ laufen und $f(s)_i = s|_{U_i}$, sowie $\alpha(s_*)_i = s_i|_{U_i \cap U_j}$ und $\beta(s_*) = s_j|_{U_i \cap U_j}$. $g(s_*) = s_i - s_j$.

Beweis. Klar. □

Definition 4.1.11. Ein **Garbenhomomorphismus** ist dasselbe wie ein Prägarbenhomomorphismus, nur halt zwischen Garben.

Die **direkte Summe** zweier Garben \mathcal{F} und \mathcal{G} ist definiert als die Garbe

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U).$$

Man sieht leicht, dass dies in der Tat eine Garbe ist.

Definition 4.1.12. Eine **Untergarbe** \mathcal{H} einer gegebenen Garbe \mathcal{F} ist eine Garbe, so dass für jede offene Menge U die Gruppe $\mathcal{H}(U)$ eine Untergruppe von $\mathcal{F}(U)$ ist und die Restriktions-Homomorphismen von \mathcal{H} und \mathcal{F} auf diesen Gruppen übereinstimmen.

Die letzte Bedingung bedeutet, dass für je zwei offene Teilmengen

$V \subset U$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(U) & \hookrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow \text{res}_{\mathcal{H}} & & \downarrow \text{res}_{\mathcal{F}} \\ \mathcal{H}(V) & \hookrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

kommutiert.

Beispiele 4.1.13. • Eine Prägarbe \mathcal{P} auf \mathbb{R} , die jeder offenen Menge $U \neq \emptyset$ die Gruppe \mathbb{Z} zuordnet, kann keine Garbe sein, egal wie die Restriktionshomomorphismen aussehen.

Angenommen, es ist eine Garbe. Sei $U = (-\infty, 0)$ und $V = (0, \infty)$, sowie $W = U \cup V$. Wegen des Verklebungssaxioms gibt es ein $a \in \mathcal{P}(W)$ mit $a|_U = 1$ und $a|_V = 0$. Ebenso gibt es ein $b \in \mathcal{P}(W)$ mit $b|_{U=0}$ und $b|_V = 1$. Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, durch $(k, l) \mapsto ka + lb \in \mathcal{P}(W) = \mathbb{Z}$. Sei $(k, l) \in \ker(\phi)$. Dann gilt $0 = (ka + lb)|_U = k \in \mathcal{P}(U) \cong \mathbb{Z}$ und so $k = 0$. Ebenso folgt $l = 0$. Also ist ϕ injektiv. Aber es gibt keinen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, **Widerspruch!**

- Die Garbe \mathcal{O} aller holomorphen Funktionen auf \mathbb{C} ist eine Garbe von Ringen.

* * *

Definition 4.1.14. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf dem Raum X und sei $x \in X$ ein Punkt. Sei I die Menge aller offenen Umgebungen $U \subset X$ von x . Die umgekehrte Inklusion definiert eine Ordnung auf I , also

$$U \leq V \quad \Leftrightarrow \quad U \supset V.$$

Der **Halm** im Punkt x ist die Gruppe

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U).$$

Beispiele 4.1.15.

- Sei A eine abelsche Gruppe und \mathcal{K} die konstante Garbe auf X mit Gruppe A . Für $x \in X$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_x &\rightarrow A, \\ [(U, f)] &\mapsto f(x)\end{aligned}$$

ein Isomorphismus $\mathcal{K}_x \rightarrow A$. Das bedeutet, dass für die konstante Garbe alle Halme gleich sind.

- Sei $A \neq \{0\}$ eine abelsche Gruppe, $x \in X$ und sei \mathcal{F} die Wolkenkratzergarbe in x mit Gruppe A , also

$$\mathcal{F}(U) = A \Leftrightarrow x \in U.$$

Beachte, dass X ein Hausdorff-Raum ist. Für $y \neq x$ in X gibt es dann eine offene Umgebung V von y mit $\mathcal{F}(V) = 0$, also ist der Halm \mathcal{F}_y in y gleich 0. Die Halm in x ist A . Daher der Name Wolkenkratzer.

Definition 4.1.16. Sei $U \subset X$ offen und $x \in U$. Ein Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ induziert ein Element des Halms \mathcal{F}_x , den wir in der Form $s|_x \in \mathcal{F}_x$ schreiben.

Lemma 4.1.17. Sei \mathcal{F} eine Garbe. Falls ein Schnitt auf allen Halmen verschwindet, ist er Null.

Beweis. Die Gleichung $s|_x = 0$ bedeutet, dass es eine offene Umgebung $U_x \subset U$ gibt, so dass $s|_{U_x} = 0$. Diese U_x bilden eine offene Überdeckung von U , auf der s verschwindet. Nach dem Lokalitätsaxiom folgt $s = 0$. □

Lemma 4.1.18. Sei $s, t \in \mathcal{F}(U)$ für eine Garbe \mathcal{F} und eine offene Menge U . Dann ist die Menge

$$V = \{u \in U : s|_x = t|_x\}$$

offen.

Beweis. Sei $v \in V$. Da $s|_x = t|_x$, gibt es nach der Definition des Halms \mathcal{F}_x eine offene Umgebung $W \subset U$ von x , so dass $s|_W = t|_W$. Für jedes $w \in W$ gilt dann ebenfalls $s|_w = t|_w$ und damit $W \subset V$, also ist V offen. \square

Definition 4.1.19. Sei $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Prägarben-Homomorphismus. Dann induziert ϕ einen Gruppenhomomorphismus $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ für jedes $x \in X$. Für komponierbare Morphismen gilt $(\phi\psi)_x = \phi_x\psi_x$ und $\text{Id}_x = \text{Id}$.

Proposition 4.1.20. Ein Morphismus von Garben $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn alle induzierten Abbildungen auf den Halmen $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ Isomorphismen sind.

Beweis. Ist ϕ ein Isomorphismus, dann existiert ein $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$, so dass $\psi\phi = \text{Id}$ und $\phi\psi = \text{Id}$. Für jedes $x \in X$ gilt $\text{Id}_x = (\phi\psi)_x = \phi_x\psi_x$ und $\text{Id}_x = \psi_x\phi_x$, also ist ψ_x invers zu ϕ_x , also ist ϕ_x ein Isomorphismus.

Umgekehrt sei ϕ_x ein Isomorphismus für jedes x . Wir wollen zeigen, dass ϕ ein Isomorphismus ist. Hierzu reichte es, zu zeigen, dass für jede offene Menge $U \subset X$ der Gruppenhomomorphismus $\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ ein Isomorphismus ist, denn: in dem Falle definiert man $\psi_U = \phi_U^{-1}$. Die Verträglichkeit mit Restriktion vererbt sich von ϕ auf ψ , also ist ψ ein Garben-Homomorphismus, also ein Inverses zu ϕ .

Wir zeigen, dass ϕ_U injektiv ist. Sei $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\phi_U(s) = 0$. Dann gilt für jedes $x \in U$, dass $0 = \phi_U(s)|_x = \phi_x(s|_x)$, so dass also $s|_x = 0$ für jedes $x \in U$ und nach Lemma 4.1.17 folgt $s = 0$, also ist ϕ injektiv.

Für Surjektivität sei $s \in \mathcal{G}(U)$. Für jedes $x \in U$ ist die Abbildung $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ surjektiv, also gibt es ein $f_x \in \mathcal{F}_x$ mit $\phi_x(f_x) = s|_x$. Das bedeutet, dass es eine offene Umgebung $\tilde{U}_x \subset U$ von x gibt, so dass

$f_x = t_x|_x$ für einen Schnitt $t_x \in \mathcal{F}(\tilde{U}_x)$. Also induzieren die beiden Schnitte $\phi_{\tilde{U}_x}(t_x)$ und $s|_{\tilde{U}_x}$ dasselbe Element im Halm \mathcal{G}_x . Es existiert also eine offene Umgebung $U_x \subset \tilde{U}_x$, so dass

$$\phi_{U_x}(t_x|_{U_x}) = s|_{U_x}.$$

Die U_x bilden eine offene Überdeckung von U .

Wir wollen zeigen, dass für alle $x, y \in U$

$$t_x = t_y \quad \text{auf} \quad U_x \cap U_y \quad (*)$$

gilt. Dann liefert das Verklebungssaxiom einen Schnitt in $t \in \mathcal{F}(U)$, der alle t_x induziert.

Um (*) zu zeigen wähle $z \in U_x \cap U_y$. Es gilt

$$\phi_z(t_x|_z) = s(z) = \phi_z(t_y|_z)$$

und damit $t_x|_z = t_y|_z$. Das bedeutet, dass es eine Umgebung V_z von z gibt, so dass $t_x|_{V_z} = t_y|_{V_z}$. Die V_z bilden eine offene Überdeckung von $U_x \cap U_y$, auf der lokal $t_x - t_y = 0$ gilt. Nach dem Lokalitätsaxiom gilt dies also auf $U_x \cap U_y$.

Nach dem Verklebungssaxiom gibt es einen Schnitt $t \in \mathcal{F}(U)$ mit $t|_{U_x} = t_x$ für jedes x . Die Schnitte s und $\phi_U(t)$ stimmen auf jedem Halm überein und sind daher nach Lemma 4.1.17 gleich. Daher ist ϕ_U surjektiv. \square

* * *

Garbifizierung

Definition 4.1.21. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe. Sei $G(\mathcal{F})$ die Kategorie, deren Objekte die Prägarben-Morphismen $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sind,

Proposition 4.1.22. *Sei \mathcal{F} eine Prägarbe. Dann gibt es einen Prägarben-Morphismus $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$, der \mathcal{F} in der Unterkategorie von Garben darstellt, siehe Lemma 1.2.16.*

Das bedeutet insbesondere, dass jeder Pfeil $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Z}$ für eine Garbe \mathcal{Z} eindeutig über θ faktorisiert.

Beweis. Wir konstruieren die Garbe \mathcal{F}^+ as follows. Für eine offene Menge $U \subset X$ sei $\mathcal{F}^+(U)$ die Menge aller Abbildungen $s : U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$ so dass

- für jedes $x \in U$ gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ und ein $t \in \mathcal{F}(V)$, so dass für jedes $y \in V$ gilt $s(y) = t_y$.

Insbesondere folgt dann $s(x) \in \mathcal{F}_x$ für jede x .

Wir zeigen, dass \mathcal{F}^+ eine Garbe ist. Die Restriktion res_V^U ist als eine Einschränkung von Abbildungen definiert. Damit ist das Lokalitätsaxiom klar.

Für das Verklebungsaxiom sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung und sei $s_i \in \mathcal{F}^+(U_i)$, $i \in I$ gegeben mit $s_i = s_j$ auf $U_i \cap U_j$, $i, j \in I$. Das bedeutet, dass für jedes $x \in X$ es ein eindeutig bestimmtes $s(x) \in \mathcal{F}_x$ gibt mit $s(x) = s_i(x)$ für jede $i \in I$ für das $x \in U_i$. Nach Definition gilt dann $s|_{U_i} = s_i$ für jedes $i \in I$ und also $s \in \mathcal{F}^+(U)$.

Es bleibt die universelle Eigenschaft zu zeigen. Wir definieren $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ indem wir s in der abstrakten Gruppe $\mathcal{F}(U)$ durch die Abbildung auf U ersetzen, die jedex $x \in U$ auf $s(x) \in \mathcal{F}_x$ wirft. Dies ist ein Prägarben-Homomorphismus. Dann sei $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein beliebiger Prägarben-Homomorphismus zu einer Garbe \mathcal{G} . Wir konstruieren ψ im Diagramm wie folgt: sei $s \in \mathcal{F}^+(U)$ für ein offenes $U \subset X$. Nach Konstruktion existiert für jedes $x \in U$ eine offene Umgebung $U_x \subset U$

und ein Element $t_x \in \mathcal{F}(U_x)$, so dass $s(u) = t_x|_u$ für jedes $u \in U_x$ gilt.

Für alle $x, y \in U$ liegt $(t_x - t_y)|_{U_x \cap U_y}$ im Kern von θ . Für gegebenes $u \in U_x \cap U_y$ existiert daher eine offene Umgebung $V \subset U_x \cap U_y$, so dass $t_x|_V = t_y|_V$. Damit

$$\phi(t_x|_{U_x \cap U_y})|_u = \phi(t_x|_V)|_u = \phi(t_y|_V)|_u = \phi(t_y|_{U_x \cap U_y})|_u.$$

Mit Lemma 4.1.17 folgt

$$\phi(t_x|_{U_x \cap U_y}) = \phi(t_y|_{U_x \cap U_y})$$

Definiere $g_x \in \mathcal{G}(U_x)$ durch $g_x = \phi(t_x)$. Wir haben eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{x \in U} U_x$. Für $x, y \in U$ haben wir gerade gezeigt, dass $g_x|_{U_x \cap U_y} = g_y|_{U_x \cap U_y}$. Da \mathcal{G} eine Garbe ist, gibt es ein eindeutiges $g \in \mathcal{G}(U)$, das g_x induziert. Wir setzen $\psi(s) := g$. Dies alles ist kompatibel mit Restriktionen, daher ist ψ ein Garbenhomomorphismus. Die Eindeutigkeit von g folgt aus der Eindeutigkeit von ψ . \square

Definition 4.1.23. Man nennt \mathcal{F}^+ aus der Proposition die **Garbifizierung** von \mathcal{F} .

Bemerkung 4.1.24. Für jedes $x \in X$ ist der Halm \mathcal{F}_x natürlich isomorph zu dem Halm \mathcal{F}_x^+ . Ist \mathcal{F} selbst schon eine Garbe, dann ist θ ein Isomorphismus, wie man der universellen Eigenschaft entnimmt.

Definition 4.1.25. Sei $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Prägarben-Homomorphismus. Wir definieren

$$\ker_{\text{prä}} \phi : U \mapsto \ker \phi_U$$

und

$$\text{coker}_{\text{prä}} : U \mapsto \text{coker } \phi_U,$$

mit den Prägarben-Morphismen

$$\ker_{\text{prä}}(\phi) \rightarrow \mathcal{F}, \quad \mathcal{G} \rightarrow \text{coker}_{\text{prä}}(\phi).$$

Lemma 4.1.26. *Sei $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Garbenhomomorphismus. Dann ist $\ker_{\text{prä}} \phi$ eine Garbe, aber $\text{coker}_{\text{prä}} \phi$ ist im Allgemeinen keine Garbe.*

Beweis. Für das Lokalisitätsaxiom sei $U = \bigcup_i U_i$ und sei $s \in \ker_{\text{prä}} \phi_U$ mit $s|_{U_i} = 0$ für jedes $i \in I$. Dann folgt $s = 0$, da \mathcal{F} das Lokalisitätsaxiom erfüllt.

Für das Verklebungsaxiom sei $s_i \in \ker_{\text{prä}} \phi_{U_i}$ mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle $i, j \in I$. Da \mathcal{F} das Verklebungsaxiom erfüllt, gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$. Wir müssen zeigen, dass $s \in \ker \phi_U$. Wir wissen, dass $\phi_U(s)|_{U_i} = \phi_{U_i}(s|_{U_i}) = \phi_{U_i}(s_i) = 0$ und daher $\phi_U(s) = 0$, nach dem Lokalisitätsaxiom für \mathcal{F} .

Wir geben ein Beispiel, in dem $\text{coker}_{\text{prä}} \phi$ keine Garbe ist. Sei $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ und

$$U_1 = \left(-\varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right) + \mathbb{Z}, \quad U_2 = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, 1 + \varepsilon\right) + \mathbb{Z}.$$

Für eine offene Teilmenge U von X sei $\mathcal{F}(U)$ die Menge aller lokalkonstanten Funktionen $U \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathcal{G}(U)$ die Menge aller stetigen Funktionen $U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $\phi_U : \mathcal{F}(U) \hookrightarrow \mathcal{G}(U)$ die Inklusionsabbildung. Für $-\varepsilon < x < \frac{1}{2} + \varepsilon$ sei $s_1(x) = x$ und für $\frac{1}{2} - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$ sei $s_2(x) = x$. Dann sind s_1, s_2 Elemente von $\mathcal{G}(U_1)$, resp. $\mathcal{G}(U_2)$. Die Differenz $s_1 - s_2$ ist lokalkonstant auf $U_1 \cap U_2$, also gilt $s_1 \equiv s_2 \pmod{\phi_{U_1 \cap U_2}}$. Aber es gibt keinen Schnitt $s \in \mathcal{G}(U_1 \cup U_2) = \mathcal{G}(X)$ mit $s|_{U_i} \equiv s_i \pmod{\phi_{U_i}}$, da jeder Schnitt von $\mathcal{G}(X)$ in 0 und 1 denselben Wert hat. \square

Definition 4.1.27. (a) Ist $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Garbenhomomorphismus, dann schreiben wir $\ker(\phi)$ statt $\ker_{\text{prä}}(\phi)$.

- (b) Wir definieren den **Garben-Cokern** von ϕ als die Garbifizierung der Prägarbe $\text{coker}_{\text{prä}}(\phi)$ und wir schreiben diese Garbe als $\text{coker } \phi$.
- (c) Die **Bildgarbe** eines Garbenhomomorphismus $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist die Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \text{im } \phi_U$. Wir schreiben diese Garbe als $\text{im}(\phi)$.

Proposition 4.1.28. *Die Kern $k : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F}$ des Garbenhomomorphismus $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist ein Kern im kategorientheoretischen Sinn von Definition 1.5.1.*

Das bedeutet, er hat die folgende universelle Eigenschaft: Sei $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ ein Garbenhomomorphismus mit $\phi \circ \psi = 0$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Garbenhomomorphismus $\theta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K} & \xrightarrow{k} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G} \\ & \nwarrow \exists! \theta & \uparrow \psi & \nearrow 0 & \\ & & \mathcal{H} & & \end{array}$$

kommutiert. Der Cokern hat dieselbe Eigenschaft mit umgedrehten Pfeilen.

Beweis. Sei (\mathcal{H}, ψ) wie in der Proposition. Für jede offene Menge $U \subset X$ ist der Morphismus $\phi_U \circ \psi_U : \mathcal{H}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ gleich Null, also faktorisiert ψ_U über einen eindeutig definierten Morphismus $\theta_U : \mathcal{H}(U) \rightarrow \mathcal{K}(U)$. Da ψ ein Garbenhomomorphismus ist, also $\psi_V \circ \text{res}_V^U = \text{res}_V^U \psi_U$ und da k dieselbe Eigenschaft hat, folgt

$$k_V \text{res}_V^U \theta_U = \text{res}_V^U \underbrace{k_U \theta_U}_{=\psi_U} = k_V \theta_V \text{res}_V^U.$$

Da k_V injektiv ist, ist θ ein Garbenhomomorphismus. Dies zeigt die Aussage für den Kern. Die Beweis für den Cokern sei dem Leser überlassen. □

Direkte und Inverse Bilder

Definition 4.1.29. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Für eine Garbe \mathcal{F} über X definiere das **direkte Bild** als die Garbe $f_*\mathcal{F}$ über Y , gegeben durch

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$

Man sieht leicht, dass dies in der Tat eine Garbe ist.

Definition 4.1.30. Ein Morphismus $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ von Garben über X induziert einen Morphismus $f_*\phi : f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$, für eine offene Menge $U \subset Y$ durch

$$f_*\phi : f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \xrightarrow{\phi_{f^{-1}(U)}} \mathcal{G}(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{G}(U).$$

Es gilt dann $f_*(\phi \circ \psi) = f_*\phi \circ f_*\psi$, also ist

$$f_* : \text{AB}(X) \rightarrow \text{AB}(Y)$$

ein Funktor, wobei $\text{AB}(X)$ die Kategorie der Garben über X ist.

Beispiel 4.1.31. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine konstante Abbildung mit Bild $y_0 \in Y$ und sei \mathcal{F} eine Garbe über X . Dann ist $f_*\mathcal{F}$ die Wolkenkratzer-Garbe im Punkt y_0 mit Halm $\mathcal{F}(X)$.

Definition 4.1.32. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und sei \mathcal{G} eine Garbe über Y . Man definiert das **inverse Bild** $f^{-1}\mathcal{G}$ als die Garbifizierung der Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supset f^{-1}(U)} \mathcal{G}(V).$$

Ist $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf Y , dann sei $f^{-1}\phi$ der

Morphismus von $f^{-1}\mathcal{F}$ nach $f^{-1}\mathcal{G}$ given by

$$\varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{F}(V) \xrightarrow{\phi} \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V).$$

Dann ist f^{-1} ein Funktor von $\text{AB}(Y)$ nach $\text{AB}(X)$.

Beispiel 4.1.33. Sei $f(x) = y_0$ die konstante Abbildung. Dann ist $f^{-1}\mathcal{G}$ die konstante Garbe mit Halm \mathcal{G}_{y_0} .

Satz 4.1.34. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Der Funktor f^{-1} ist linksadjungiert zu f_* .

Um klar zu machen, was gezeigt werden muss: Wir brauchen Bijektionen

$$t_{\mathcal{G}, \mathcal{F}} : \text{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}),$$

so dass für je zwei Garben-Morphismen $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ und $\psi : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{t_{\mathcal{G}, \mathcal{F}}} & \text{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \\ \downarrow (\psi, \phi) & & \downarrow (\psi, \phi) \\ \text{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}', \mathcal{F}') & \xrightarrow{t_{\mathcal{G}', \mathcal{F}'}} & \text{Hom}_Y(\mathcal{G}', f_*\mathcal{F}') \end{array}$$

kommutiert.

Beweis des Satzes. Da $f^{-1}\mathcal{G}$ die Garbifizierung der Prägarbe $f^\sim \mathcal{G} : U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$ ist, gibt es eine natürliche Bijektion

$$\text{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}_X(f^\sim \mathcal{G}, \mathcal{F}).$$

Wir können also im Folgenden die rechte Seite betrachten. Sei

$\alpha : f^* \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ ein Prägarben-Homomorphismus. Für eine offene Teilmenge $U \subset X$ haben wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\alpha_U : \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U).$$

Ist $V \subset Y$ offen, dann ist $U = f^{-1}(V)$ offen in X und wir definieren $\beta_V : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_* \mathcal{F}(V)$ durch $\beta_V = \alpha_{f^{-1}(V)}$. Dann ist β ein Prägarben-Homomorphismus und wir setzen $\Phi(\alpha) = \beta$.

Für die Umkehrung sei $\beta : \mathcal{G} \rightarrow f_* \mathcal{F}$ ein Garbenhomomorphismus, d.h., für jede offene Menge $V \subset Y$ ist die Abbildung

$$\beta_V : \mathcal{G}(V) \rightarrow f_* \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$$

ein Gruppenhomomorphismus, der kompatibel ist mit den Restriktionsabbildungen. Für offene $U \subset X$ und $V \supset f(U)$ gilt $U \subset f^{-1}(V)$ und man erhält einen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}V) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{F}(U)$. Nach der universellen Eigenschaft des induktiven Limes verkleben diese Homomorphismen zu einem Homomorphismus

$$\alpha_U : \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U).$$

Dies definiert ein Element $\alpha \in \text{Hom}_X(f^* \mathcal{G}, \mathcal{F})$. Setze $\Psi(\beta) = \alpha$. Es gilt $\Psi \circ \Phi = \text{Id}$ und $\Phi \circ \Psi = \text{Id}$. □

4.2 Etalgarben

Definition 4.2.1. Eine **Etalgarbe** über einem topologischen Raum X ist eine surjektive stetige Abbildung $\pi : F \rightarrow X$, zusammen mit der Struktur einer abelschen Gruppe auf jeder Faser $F_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in X$ so

dass

- π ist ein lokaler Homöomorphismus, d.h., für jeden Punkt $f \in F$ gibt es eine offene Umgebung W , so dass $\pi(W)$ offen in X ist und $\pi|_W$ ist ein Homöomorphismus auf sein Bild.
- Die Strukturabbildungen der Gruppen sind stetig.

Die letzte Punkt bedeutet das folgende: Sei S die Menge aller $(f, g) \in F \times F$ mit $\pi(f) = \pi(g)$, dann sind die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} S & \rightarrow & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & -x \end{array}$$

stetig.

Definition 4.2.2. Die Abbildung π heisst die **Projektion** der Etalgarbe und für $x \in X$ heisst die Menge $F_x = \pi^{-1}(x)$ der **etale Halm** über x .

Für eine offene Menge $U \subset X$ schreiben wir $F|_U$ für die Etalgarbe $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi} U$.

Beispiele 4.2.3.

- (Die konstante Etalgarbe) Sei A eine abelsche Gruppe, sei $F = X \times A$ und sei $\pi : F \rightarrow X$ die Projektion auf die erste Koordinate. Wir versehen A mit der diskreten Topologie und F mit der Produkttopologie. Dann ist π eine Etalgarbe, wobei alle etalen Halme isomorph zu A sind.
- (Die Wolkenkratzer Etalgarbe) Sei $A \neq 0$ eine abelsche Gruppe und sei $x_0 \in X$ ein **abgeschlossener Punkt**, d.h., die Menge $\{x_0\}$ ist abgeschlossen. (In einem Hausdorff-Raum ist jeder Punkt abgeschlossen.) Sei $F = (X - \{x_0\}) \sqcup A$ und sei $\pi : F \rightarrow X$ definiert durch $\pi(y) = y$ für $y \in X - \{x_0\}$ und $\pi(a) = x_0$ für $a \in A$. Dann

existiert genau eine Topologie auf F , so dass π ein lokaler Homöomorphismus ist.

Wir bewrite diese Topologie, indem wir für jeden Punkt eine Umgebungsbasis angeben. Für $a \in A \subset F$ ist eine Umgebungsbasis given by alle Mengen der Form $\{a\} \cup (U - \{x_0\})$, wobei $U \subset X$ eine offene Umgebung von x_0 ist. Ist $y \in X - \{x_0\}$, dann ist eine Umgebungsbasis von y durch alle Mengen der Form $U \setminus \{x_0\}$, gegeben, wobei U eine offene Umgebung von y in X ist.

Bemerkung 4.2.4. Aus der Bedingung des lokalen Homöomorphismus folgt insbesondere, dass die Projektion π stetig ist.

Definition 4.2.5. (a) Ist $\pi : F \rightarrow X$ eine Etalgarbe und ist $U \subset X$, so nennt man die Menge

$$\mathcal{S}_F(U) = \{s : U \rightarrow F : \text{stetig mit } \pi \circ s = \text{Id}\}$$

die Menge der **Etalschnitte** über U .

(b) Für eine gegebene Etalgarbe $\pi : F \rightarrow X$ ist der **Nullschnitt** gleich der Abbildung $s_0 : X \rightarrow F$ mit $s_0(x) = 0 \in F_x$.

Lemma 4.2.6.

- (a) *Jeder Etalschnitt ist ein lokaler Homöomorphismus mit π als lokaler Inversen.*
- (b) *Die Menge $\mathcal{S}_F(U)$ ist eine Gruppe unter der punktweisen Addition. Insbesondere ist der Nullschnitt stetig.*

Beweis. (a) Sei σ ein Etalschnitt und sei $x \in X$ ein Punkt. Dann existiert eine offene Umgebung $W \subset F$ von $\sigma(x)$, so dass π ein Homöomorphismus $W \rightarrow U$ für eine offene Umgebung U von x ist. Da

σ stetig ist, ist $U' = \sigma^{-1}(W)$ offen in U und da σ ein Schnitt ist, ist $\sigma(U') = W' \subset W$ und damit ist σ das stetige Inverse zu $\pi|_{W'}$ und da π ein Homöomorphismus auf W' , ist σ einer auf U' .

(b) Seien $s, t \in \mathcal{S}_F(U)$ Etalschnitte. Da Addition und Inversenbildung in F stetig sind, sind $-s$ und $s + t$ wieder stetig, also Etalschnitte. \square

Proposition 4.2.7. *Sei F eine Etalgarbe. Dann ist die Abbildung $U \mapsto \mathcal{S}_F(U)$ ist eine Garbe.*

Beweis. Da res_V^U eine Einschränkung von Abbildungen ist und die Verklebung von stetigen Abbildungen stetig ist, sind die Eigenschaften einer Garbe trivialerweise erfüllt. \square

Beispiele 4.2.8.

- Die konstante Etalgarbe induziert die konstante Garbe. Denn: Sei $p : X \times A \rightarrow A$ die Projektion. Für einen Schnitt $s : X \rightarrow X \times A$ ist ps eine lokalkonstante Funktion, da wir A die diskrete Topologie gegeben haben. Umgekehrt liefert jede lokalkonstante Funktion genau ein Schnitt.
- Die Wolkenkratzer induziert die entsprechende Wolkenkratzer-Garbe.

Definition 4.2.9. Sei $\pi : F \rightarrow X$ und $\tau : G \rightarrow X$ Etalgarben. Ein **Morphismus von Etalgarben** von π nach τ ist eine stetige Abbildung $\phi : F \rightarrow G$, die auf jeder Faser ein Gruppenhomomorphismus $\phi : F_x \rightarrow G_x$ ist.

Bemerkung 4.2.10. (a) Für einen Etalgarben-Morphismus ϕ muss insbesondere $\phi(F_x) \subset G_x$ gelten. Das ist gleichbedeutend mit der

Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi} & G \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \tau & \\ & X & \end{array}$$

- (b) Ist $\phi : F \rightarrow G$ ein Etalgarben-Morphismus, dann liefert jede offene Menge $U \subset X$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

definiert durch $\phi_U(s)(x) = \phi(s(x))$. Hier ist \mathcal{G} die Garbe der Schnitte der Etalgarbe G .

* * *

Äquivalenz von Garben und Etalgarben

Definition 4.2.11. Sei \mathcal{F} eine Garbe über X . Wir definieren den

Etalraum zu \mathcal{F} als die disjunkte Vereinigung aller Halme:

$F = \mathcal{F}_{\text{et}} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$. Wir definieren die Projektion $\pi : F \rightarrow X$ durch $\pi(f) = x$ falls $f \in \mathcal{F}_x$. Wir konstruieren eine Topologie, die $\pi : F \rightarrow X$ zu einer Etalgarbe macht. Jeder lokale Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ liefert eine Abbildung $s_{\text{et}} : U \rightarrow F$ mit $\pi \circ s = \text{Id}_U$, nämlich die Abbildung $x \mapsto s|_x$. Wir versehen F mit der Topologie, die von allen Mengen der Form $s_{\text{et}}(U)$ erzeugt wird, wobei U durch alle offenen Teilmengen und s durch $\mathcal{F}(U)$ läuft.

Lemma 4.2.12.

- (a) Das so definierte Paar (π, F) ist eine Etalgarbe.
- (b) Die Abbildung $s \mapsto s_{\text{et}}$ ist ein Gruppen-Isomorphismus
- $$\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{S}_F(U)$$

Beweis. (a) Sei \mathcal{B} die Menge aller Bilder $s_{\text{et}}(U)$, wobei $U \subset X$ offen ist und $s \in \mathcal{F}(U)$. Wir zeigen, dass \mathcal{B} stabil ist unter Schnittmengen, d.h., dass

$$A, B \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{B}.$$

Hierfür seien $A = s_{\text{et}}(U)$ und $B = t_{\text{et}}(V)$. Sei Z die Menge aller $x \in U \cap V$ mit $s|_x = s_{\text{et}}(x) = t_{\text{et}}(x) = t|_x \in F_x$. Nach Definition des Halms $F_x = \mathcal{F}_x$ gibt es eine offene Menge $W \subset U \cap V$, so dass $s|_W = t|_W$. Das bedeutet, dass $s|_y = t|_y$ für jedes $y \in W$ und daher ist Z offen. Nach Definition gilt $A \cap B = s_{\text{et}}(Z) = t_{\text{et}}(Z)$, also liegt diese Menge in \mathcal{B} wie gewünscht. Also ist \mathcal{B} ein schnittstabiler Erzeuger, die offenen Mengen in F sind genau die Vereinigungen von Mengen in \mathcal{B} .

Das bedeutet insbesondere, dass jeder Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ eine stetige Abbildung s_{et} liefert, denn für eine offene Menge $A \subset F$, also $A = \bigcup_{i \in I} t_{i,\text{et}}(V_i)$ gilt

$$s_{\text{et}}^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} s_{\text{et}}^{-1}(t_i(V_i)) = \bigcup_{i \in I} \{x : s|_x = t_i|_x\}$$

und diese Menge ist nach Lemma 4.1.18 offen.

Die Projektion π ist stetig, da für jede offene Menge $U \subset X$, die Menge $\pi^{-1}(U)$ die Vereinigung aller $s_{\text{et}}(W)$ ist, wobei $W \subset U$ offen ist und $s \in \mathcal{F}(W)$. Das ist eine Vereinigung offener Mengen, also offen. Ist $p \in F$ und $x = \pi(p)$, dann liegt p im Halm \mathcal{F}_x , also gibt es eine offene Menge $W \subset X$ und ein $s \in \mathcal{F}(W)$ mit $p = s_{\text{et}}(x)$. Dann ist $s_{\text{et}}(W)$ eine offene Umgebung von p und $\pi : s_{\text{et}}(W) \rightarrow W$ ist bijektiv und stetig mit stetiger Inverser s_{et} . Das bedeutet, dass π ein lokaler Homöomorphismus ist. Die Stetigkeit der Strukturabbildungen ist eine Übungsaufgabe. Also ist F eine Etalgarbe.

(b) Für die Injektivität gelte $\phi(s) = 0$. Dann ist $0 = \phi(s)(x) = s|_x$ und

damit $s = 0$ nach Lemma 4.1.17. Für die Surjektivität sei $\sigma \in \mathcal{S}_F(U)$. Für jedes $x \in U$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x und ein $t_x \in \mathcal{F}(U_x)$, so dass $t_x|_x = \sigma(x)$ und $W_x = t_x(U_x)$ ist eine offene Umgebung von $\sigma(x)$, auf der π ein Homöomorphismus ist. Seien $W'_x = W_x \cap \sigma(U_x)$ und $U'_x = \pi(W'_x)$, dann ist σ ein Homöomorphismus $U'_x \rightarrow W'_x$, stimmt dort also mit t_x überein. Dann liefern die U'_x eine offene Überdeckung von U und die t_x kompatible Schnitte, die sich also zu einem Schnitt $t \in \mathcal{F}(U)$ verkleben lassen, der dann $t_x = \sigma(x)$ für jedes $x \in U$ erfüllt. \square

Notation. Wir identifizieren jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ mit seinem Etalschnitt $s_{\text{et}} : U \rightarrow F$. Wir schreiben also

$$s(x) = s_{\text{et}}(x) = s|_x \in \mathcal{F}_x = F_x.$$

Satz 4.2.13. Sei Ψ die Abbildung, die jeder Garbe \mathcal{F} ihre Etalgarbe (F, π) zuordnet und sei Φ die Abbildung, die einer Etalgarbe F auf die Garbe \mathcal{S}_F ihrer Schnitte wirft. Dann ist Φ eine Äquivalenz von Kategorien:

$$\{ \text{Garben über } X \} \leftrightarrow \{ \text{Etalgarben über } X \}$$

mit Quasi-Inverser Ψ .

Beweis. Folgt aus Lemma 4.2.12. \square

Definition 4.2.14. Eine Sequenz von Garben-Morphismen

$$\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$$

heisst **exakt**, falls $g \circ f = 0$ und der induzierte Morphismus $\text{im}(f) \rightarrow \ker(g)$ ein Isomorphismus von Garben ist.

Korollar 4.2.15. *Eine Sequenz von Garben-Morphismen*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$$

ist genau dann exakt, wenn für jedes $x \in X$ die induzierte Sequenz auf dem Halm

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{H}^x$$

exakt ist.

Beweis. Nach Satz 4.2.13 kann man $\mathcal{F}(U)$ als Menge der Etalschnitte einer Etalgarbe betrachten. Dann folgt sofort, dass

$$gf = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_x f_x = 0 \quad \forall_{x \in X}.$$

Sei also $gf = 0$. Sei $F \xrightarrow{f_{et}} G \xrightarrow{g_{et}} H$ die entsprechende Sequenz von Etalgarben. Die Halme von $\text{im}(f)$ sind

$$\text{im}(f)_x = \lim_{U \ni x} f(\mathcal{F}(U)) = f_x(\mathcal{F}_x).$$

Das bedeutet, dass $f_{et}(F)$ die Etalgarbe von $\text{im}(f)$ ist. Ebenso ist $\ker(g_{et}) := \{x \in G : g_{et}(x) = 0\}$ die Etalgarbe zu $\ker(g)$. Die induzierte Homomorphismus $\text{im}(f) \rightarrow \ker(g)$ entspricht der Inklusion von Etalgarben und die Exaktheit ist die Gleichheit von $f_{et}(F)$ und $\ker(g_{et})$. Die Behauptung folgt. \square

Definition 4.2.16. Sind $\phi, \psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ Garbenhomomorphismen, dann ist ihre punktweise Summe $\phi + \psi$ ebenfalls ein Garbenhomomorphismus. Auf diese Weise wird $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ zu einer abelschen Gruppe.

Proposition 4.2.17. *Die Kategorie $\text{AB}(X)$ der Garben abelscher Gruppen über X ist eine abelsche Kategorie.*

Beweis. Die Komposition ist bilinear, da dies in der Kategorie der abelschen Gruppen der Falle ist. Das Nullobjekt ist die Nullgarbe. Das Produkt zweier Garben \mathcal{F}, \mathcal{G} ist isomorph zum CoProdukt und beide sind gleich der direkten Summe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$. Also ist $\text{AB}(X)$ additiv. Kerne und Cokerne existieren, wie wir gerade gesehen haben. Als nächstes müssen wir zeigen

- (a) Ist $\ker(f) = 0$, dann ist f der Kern seines Cokerns. Ist $\text{coker}(f) = 0$, dann ist f der Cokern seines Kerns.
- (b) Ein Morphismus f mit $\ker(f) = 0 = \text{coker}(f)$ ist ein Isomorphismus.

Für (a) gelte $\ker(f) = 0$. und es sei folgendes exakte kommutative Diagramm gegeben

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathcal{Z} & & & & \\ & & \downarrow \eta & \searrow 0 & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} & \xrightarrow{g} & \mathcal{H} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Für jede offene Menge $U \subset X$ ergibt dies das folgende kommutative und exakte Diagramm mit durchgezogenen Pfeilen

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathcal{Z}(U) & & & & \\ & & \downarrow \eta_U & \searrow 0 & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{g_U} & \mathcal{H}(U) \end{array}$$

$\swarrow \exists!$

Dann ist f_U der Kern von g_U und damit faktorisiert η_U über f_U es existiert also genau ein gestrichelter Pfeil γ_U , der das Diagramm kommutativ macht. Aus dieser Eindeutigkeit folgt dann $\alpha_U|_V = \alpha_V$ für $V \subset U$ und damit ist α ein Garben Homomorphismus, der η eindeutig faktorisiert und damit ist f der Kern von g . Die zweite Aussage geht ebenso (Umdrehen der Pfeile).

(b) Aus der Bedingung folgt $\ker(f_U) = 0 = \operatorname{coker}(f_U)$ für jedes U . Sei dann $h_U = f_U^{-1}$. Für $V \subset U$ gilt $f_U|_V = f_V$ und daher folgt dasselbe für h , so dass h einen Garbenhomomorphismus definiert, der $hf = \operatorname{Id}$ und $fh = \operatorname{Id}$ erfüllt. \square

4.3 Lokalkonstante Garben

Definition 4.3.1. Seien X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Punkt. Zwei geschlossene Wege $\gamma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$ mit Endpunkt x_0 koennen hintereinander gelaufen werden und man erhaelt einen Weg $\gamma \cdot \tau$. Modulo Homotopie mit festen Enden erhält man eine Gruppe, die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(X, x_0)$ von X . Ist X wegzusammenhängend, so hängt $\Gamma = \pi_1(X, x_0)$ nicht vom Punkt x_0 ab.

Ein wegzusammenhängender Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, falls $\pi_1(X) = \{1\}$ gilt.

Definition 4.3.2. Eine **Überlagerung** eines Raums X ist eine stetige Abbildung $\pi : E \rightarrow X$ dergestalt, dass es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt und einen Homöomorphismus $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times D$, wobei D ein diskreter topologischer Raum ist, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & U \times D \\ \pi \searrow & & \swarrow pr_1 \\ & X & \end{array}$$

kommutiert.

Fakten.

- (a) Ein Raum X , der wegzusammenhängend und lokal einfach-zusammenhängend ist, besitzt eine **universelle**

Überlagerung \tilde{X} , auf der die Fundamentalgruppe Γ operiert, so dass $X = \Gamma \backslash \tilde{X}$.

- (b) Zu jeder Gruppe Γ gibt es einen Raum X , der Γ als Fundamentalgruppe hat und eine zusammenziehbare universelle Überlagerung \tilde{X} besitzt.

Definition 4.3.3. Eine Garbe \mathcal{F} über X heisst **lokalkonstante Garbe**, falls jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass $\mathcal{F}|_U$ konstant ist.

Beispiel 4.3.4. Auf dem Raum $X = S^1$ gibt es eine Garbe abelscher Gruppen, bei der jeder Halm isomorph zu \mathbb{Z} ist, die lokalkonstant, aber nicht konstant ist. Beweis am Ende des Abschnitts.

Proposition 4.3.5. Sei \mathcal{F} eine lokalkonstante Garbe über X . Ist X zusammenhängend, dann ist die entsprechende Etalgarbe $\pi : F \rightarrow X$ eine Überlagerung. Insbesondere kann man Wege in X zu Wegen in F liften.

Beweis. Sei $x \in X$ und sei U eine offene Umgebung, auf der \mathcal{F} konstant ist. Eine solche Umgebung nennen wir **trivialisierend**. Nach 4.2.3 und 4.2.8 ist der Etalraum $F|_U$ von $\mathcal{F}|_U$ homöomorph zu $U \times M$, wobei $M = \mathcal{F}_x$ der Halm ist und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F|_U & \xrightarrow{\cong} & U \times M \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

kommutiert, wobei wir $F|_U$ für die Etalgarbe $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi} U$ schreiben.

Sei U_x die Menge aller $y \in X$, so dass es einen Isomorphismus der Halme $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_y$ gibt. Wegen Lokalkonstanz gibt es dann immer schon Umgebungen A, B von x und y , so dass $F|_A \cong F|_B$. Ist dann $y \in U_x$ und V eine trivialisierende Umgebung von y , dann folgt $V \subset U_x$, also ist U_x

offen und für jeden Punkt $z \in X$ haben wir $U_x = U_z$ oder $U_x \cap U_z = \emptyset$.
Damit ist U_x clopen und da X zusammenhängend ist, folgt $U_x = X$ und daher ist π eine Überlagerung. \square

Definition 4.3.6. Sei Γ eine Gruppe. Ein Γ -**Modul** ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ mit einer Operation von Γ auf M durch Gruppenshomomorphismen, d.h., für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\gamma.(m + n) = \gamma.m + \gamma.n$$

für alle $m, n \in M$. Da eine abelsche Gruppe dasselbe ist wie ein Modul des Rings \mathbb{Z} , nennen wir eine solche Γ -Operation auch eine **lineare Operation**.

Beispiele 4.3.7.

- Ist R ein Ring und Γ eine Untergruppe der Einheitengruppe R^\times , dann ist jeder R -Modul ein Γ -Modul.
- Sei A eine abelsche Gruppe und Γ eine beliebige Gruppe. Die Menge A^Γ aller Abbildungen $f : \Gamma \rightarrow A$ ist ein Γ -Modul mit der Operation

$$\gamma.f(\tau) = f(\gamma^{-1}\tau).$$

Definition 4.3.8. Sei nun X ein wegzusammenhängender Raum, der lokal einfach-zusammenhängend ist. (Das sind die Räume, die eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow X$ haben.)

Sei \mathcal{F} eine lokalkonstante Garbe über X . Sei $x_0 \in X$ ein Punkt und sei $\Gamma = \pi_1(X, x_0)$ die Fundamentalgruppe. Sei $[\gamma] \in \Gamma$ und sei $m \in M = \mathcal{F}_{x_0}$. Dann kann der Weg γ eindeutig zu einem Weg $\gamma_m : [0, 1] \rightarrow F = \mathcal{F}_{\text{et}}$ geliftet werden, der $\gamma_m(0) = m$ erfüllt. Schreibe $\gamma.m = \gamma_m(1)$.

Lemma 4.3.9. Die Vorschrift $[\gamma]m = \check{\gamma}.m$ definiert eine lineare Operation von Γ auf die Gruppe M .

Beweis. Wir müssen Wohldefiniertheit zeigen. Seien γ, τ Vertreter desselben Elements von Γ , d.h., γ und τ sind homotop mit festen Enden. Sei $h : I^2 \rightarrow X$ eine solche Homotopie. Dann liftet h zu einer Homotopie von γ_m to τ_m . Insbesondere gilt $\tilde{h}(0, 1) = \gamma.m$ und $\tilde{h}(1, 1) = \tau.m$. Also ist $\tilde{h}(s, 1) \in \mathcal{F}_{x_0} = M$ für jedes $s \in [0, 1]$. Daher ist $s \mapsto \tilde{h}(s, 1)$ ein Weg in M , der $\gamma.m$ und $\tau.m$ verbindet. Da M diskret ist, ist dieser Weg konstant, also $\gamma.m = \tau.m$ und die Operation ist wohldefiniert.

Für $[\gamma], [\tau] \in \Gamma$ gilt

$$[\gamma]([\tau]m) = [\gamma]\check{\tau}.m = \check{\gamma}.(\check{\tau}.m) = (\check{\tau}.\check{\gamma}).m = (\gamma.\tau)^\vee.m = [\gamma.\tau]m = ([\gamma][\tau])m$$

Da der trivial Weg durch die Identität operiert, heben wir eine Gruppenoperation definiert.

Schliesslich müssen wir die Linearität der Aktion zeigen, also

$$\gamma.(m + n) = \gamma.m + \gamma.n.$$

Sei γ_m der Lift mit $\gamma_m(0) = m$ und sei γ_n und γ_{m+n} ebenso definiert. Für jedes $t \in [0, 1]$ liegen die Punkte $\gamma_m(t)$ und $\gamma_n(t)$ in der Faser über $\gamma(t)$, sie können also addiert werden. Die Weg $\eta : t \mapsto \gamma_m(t) + \gamma_n(t)$ ist dann ein weiterer Lift von γ . Aber $\eta(0) = m + n = \gamma_{m+n}(0)$ und daher stimmen η und γ_{m+n} wegen der Eindeutigkeit der Lifts überein. Es gilt

$$\gamma.(m + n) = \gamma_{m+n}(1) = \eta(1) = \gamma_m(1) + \gamma_n(1) = \gamma.m + \gamma.n. \quad \square$$

Definition 4.3.10. Sei M ein Γ -Modul. Sei \tilde{X} die universelle Überlagerung von X und sei

$$F = \Gamma \backslash (\tilde{X} \times M),$$

wobei Γ diagonal auf $\tilde{X} \times M$ operiert, also $g(x, m) = (gx, gm)$. Wir

versehen M mit der diskreten Topologie, $\tilde{X} \times M$ mit der Produkt-Topologie und F mit der Quotienten-Topologie. Definiere $\pi : F \rightarrow X$ durch $\pi(\Gamma(x, m)) = \Gamma x \in \Gamma \backslash \tilde{X} = X$.

Lemma 4.3.11. $\pi : F \rightarrow X$ ist eine lokalkonstante Etalgarbe.

Beweis. Sei $x \in X$ und sei U eine Umgebung, die die universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ trivialisiert. Das Urbild $\tilde{U} = p^{-1}(U)$ ist eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen, die alle homöomorph zu U sind und die von Γ permutiert werden. Fixiere ein solches \tilde{U}_0 . Sei $\phi : U \rightarrow \tilde{U}_0$ die Umkehrabbildung der Projektion. Dann ist ϕ ein Homöomorphismus und die natürliche Abbildung

$$U \times M \xrightarrow{\phi \times 1} \tilde{U}_0 \times M \hookrightarrow \tilde{U} \times M \rightarrow \Gamma \backslash \tilde{U} \times M = F|_U$$

ist ein Homöomorphismus, der die Garbe \mathcal{F} trivialisiert. □

Wir haben nun zwei Konstruktionen: Lemma 4.3.9 liefert einen Funktor Φ von der Kategorie aller lokalkonstanten Garben zur Kategorie der Γ -Moduln. Umgekehrt liefert Lemma 4.3.11 einen Funktor Ψ von der Kategorie der Γ -Moduln zur Kategorie der lokalkonstanten Garben.

Satz 4.3.12. *Der Funktoren Φ und Ψ sind quasi-invers zueinander. Für einen wegzusammenhängenden und lokal einfach-zusammenhängenden Raum X haben wir eine Äquivalenz von Kategorien:*

$$\{ \text{lokalkonstante Garben} \} \leftrightarrow \{ \Gamma\text{-Moduln} \}$$

wobei $\Gamma = \pi_1(X, x_0)$ die Fundamentalgruppe ist.

Beweis. Sei F eine lokalkonstante Etalgarbe. Wir konstruieren einen

natürlichen Etalgarben-Isomorphismus

$$\tau : F \rightarrow \Psi\Phi F = \Gamma \backslash (\tilde{X} \times F_{x_0}).$$

Sei $f \in F$ und sei $x = \pi(f)$. Wähle einen Weg η in X von x_0 nach x und sei η_f der eindeutige Lift nach F mit $\eta_f(1) = f$. Sei $f_0 = \eta_f(0) \in F_{x_0}$. Die Homotopieklasse von η definiert ein Element $[\eta]$ von \tilde{X} mit $p([\eta]) = x$. Wir definieren

$$\tau(f) = \Gamma([\eta], f_0).$$

Diese Konstruktion hängt a priori von der Wahl des Weges η ab. Eine andere Wahl liefert, modulo Homotopie, einen Weg der Form $\gamma.\eta$ für ein $[\gamma] \in \Gamma$. In diesem Falle wird f_0 ersetzt durch $[\gamma]f_0$, also ist τ eine wohldefinierte Abbildung.

Die Definition des Inversen τ^{-1} geht so: Jedes Element von $\Gamma \backslash \tilde{X} \times F_{x_0}$ ist von der Form $\Gamma([\eta], f_0)$ mit $[\eta] \in \tilde{X}$ und $f_0 \in F_{x_0}$. Dann liftet η eindeutig zu einem Weg $\hat{\eta}_{f_0}$ mit $\hat{\eta}_{f_0}(0) = f_0$. Setze $\tau^{-1}(\Gamma([\eta], f_0)) = \hat{\eta}_{f_0}(1)$. Es folgt, dass τ bijektiv ist. Die Stetigkeit von τ und τ^{-1} , sowie die Kompatibilität mit Addition und Inversion werden dem Leser überlassen.

Für die Rückrichtung beginnen wir mit einem Γ -Modul M und betrachten $\Phi\Psi(M)$. Dies ist die Faser über x_0 von $\Gamma \backslash \tilde{X} \times M$, welche nach Definition gleich $\Gamma(f_0 \times M)$ ist, also isomorph zu M , wobei f_0 ein beliebiges Element der Faser über x_0 ist. □

* * *

4.4 Der Schnittfunktor

Definition 4.4.1. Sei X ein topologischer Raum. Wir betrachten den Funktor

$$H^0 : \{ \text{Garben über } X \} \rightarrow \{ \text{abelsche Gruppen} \}$$

gegeben durch

$$H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X).$$

Dieser heisst der **globale Schnittfunktor**, oder einfach **Schnittfunktor**. Will man den jeweiligen Raum betonen, schreibt man auch $H^0(X, \mathcal{F})$.

Beispiel 4.4.2. Wir betrachten einen wegzusammenhängenden, lokal-einfach zusammenhängenden Raum X und eine lokalkonstante Garbe \mathcal{F} . Dies kommt von einem Modul M der Fundamentalgruppe $\Gamma = \pi_1(X)$ und die Etalgarbe kann in der Form $\Gamma \backslash (\tilde{X} \times M)$ geschrieben werden. Ein globaler Schnitt $s \in \mathcal{F}(X)$ ist eine Abbildung $s : X \rightarrow \Gamma \backslash (\tilde{X} \times M)$ der Form $s(\Gamma \tilde{x}) = \Gamma(\tilde{x}, a_s(\tilde{x}))$, mit einer eindeutig bestimmten stetigen Abbildung $a_s : \tilde{X} \rightarrow M$. Da \tilde{X} zusammenhängend ist und M diskret, ist die Abbildung a_s konstant. Für $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\Gamma(\tilde{x}, a_s) = s(\Gamma \tilde{x}) = s(\Gamma \gamma \tilde{x}) = \Gamma(\gamma \tilde{x}, a_s) = \Gamma \gamma^{-1}(\gamma \tilde{x}, a_s) = \Gamma(\tilde{x}, \gamma^{-1} a_s).$$

Das bedeutet

$$a_s = \gamma \cdot a_s,$$

d.h., a_s liegt in der Menge M^Γ der Γ -Invarianten. Umgekehrt liefert jedes $a_s \in M^\Gamma$ einen globalen Schnitt, also

$$H^0(\mathcal{F}) \cong M^\Gamma = H^0(\Gamma, M).$$

Proposition 4.4.3. *Sei \mathbb{Z}_X die konstante Garbe mit Halm \mathbb{Z} . Dann gilt*

$$H^0(\mathcal{F}) = \text{Hom}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}).$$

Insbesondere ist der Schnittfunktor linksexakt.

Proof. Der Etalraum von \mathbb{Z}_X ist $\mathbb{Z} \times X$ und ein globaler Schnitt ist eine lokalkonstante Abbildung $s : X \rightarrow \mathcal{F}_{\text{et}}$. Diese induziert einen etalen Garbenhomomorphismus $\theta_s : \mathbb{Z}_{X,\text{et}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{et}}$ durch

$$\theta_s(k, x) = ks(x).$$

Ist umgekehrt $\theta : \mathbb{Z}_{X,\text{et}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{et}}$ beliebig, dann ist

$$s(x) = \theta(1, x)$$

ein globaler Schnitt von \mathcal{F} .

□

* * *

4.5 Garbenkohomologie

Ab jetzt fixieren wir einen kommutativen Ring R mit Eins und betrachten die Kategorie $R \text{ MOD}$ der R -Moduln, sowie die Kategorie $R \text{ MOD}(X)$ der Garben von R -Moduln über einem topologischen Raum X .

Proposition 4.5.1. *Sei R ein Ring und X ein topologischer Raum. Dann hat die abelsche Kategorie $R \text{ MOD}(X)$ aller Garben von R -Moduln genug Injektive.*

Beweis. Sei \mathcal{F} eine Garbe von R -Moduln über X . Für jedes $x \in X$ ist der Halm \mathcal{F}_x ein R -Modul, also gibt es eine Injektion $\mathcal{F}_x \hookrightarrow J_x$ in einen

injektiven R -Modul. Betrachte die Garbe $\mathcal{J} : U \mapsto \prod_{x \in U} J_x$. Dies ist ein Produkt von Wolkenkratzer-Garben $\mathcal{S}_x(J_x)$, $x \in X$ in der Kategorie $R\text{MOD}(X)$ der Garben von R -modules über X . Also gilt für jede Garbe \mathcal{G}

$$\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \cong \prod_{x \in X} \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{S}_x(J_x)).$$

Andererseits ist $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{S}_x(J_x)) \cong \text{Hom}(\mathcal{G}_x, J_x)$. Damit existiert ein natürlicher injektiver Homomorphismus $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}$ gegeben durch die Abbildungen $\mathcal{F}_x \rightarrow J_x$.

Der Funktor $\text{Hom}(-, \mathcal{J})$ ist das direkte Produkt über alle $x \in X$ der Halm-Funktoren $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$, welche exakt sind, gefolgt von $\text{Hom}_R(-, J_x)$, welcher ebenfalls exakt ist, da J_x injektiv ist. Das bedeutet, dass $\text{Hom}(-, \mathcal{J})$ ein exakter Funktor ist, also ist \mathcal{J} ein injektives Objekt. \square

Definition 4.5.2. Die **Garbenkohomologie** einer Garbe \mathcal{F} ist definiert durch die Rechtsableitung des Schnittfunktors, d.h.,

$$H^k(\mathcal{F}) = R^k H^0(\mathcal{F}).$$

Man schreibt dies auch als

$$H^k(X, \mathcal{F}) = R^k H^0(X, \mathcal{F}).$$

Definition 4.5.3. Eine Garbe \mathcal{F} heisst **welk**, wenn für je zwei offenen Mengen $V \subset U \subset X$ die Restriktionsabbildung $\text{res}_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ surjektiv ist. Wolkenkratzergarben sind welk.

Satz 4.5.4. (a) *Injektive Garben sind welk.*

(b) *Ist $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Garben und ist \mathcal{G} welk, dann ist die Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow 0$$

exakt. (Dasselbe gilt dann für jede offene Menge $U \subset X$ an Stelle von X .)

(c) *Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Garben und seien \mathcal{F} und \mathcal{G} welk. Dann ist \mathcal{H} welk.*

(d) *Welche Garben sind azyklisch in Bezug auf den Schnittfunktor H^0 .*

Beweis. (a) Sei \mathcal{K}_R die konstante Garbe mit Halm R . Für ein offene Menge $U \subset X$ sei $\mathcal{K}_{R,U} = j_!(\mathcal{K}_R|_U)$ die Garbifizierung der Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{K}_R(V) & V \subset U, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen, dass es für jede Garbe \mathcal{F} einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathcal{F}(U) \cong \text{Hom}(\mathcal{K}_{R,U}, \mathcal{F})$$

gibt. Für $s \in \mathcal{F}(U)$ sei $\phi_s : \mathcal{K}_{R,U} \rightarrow \mathcal{F}$ wie folgt definiert. Sei $V \subset X$ offen und $t \in \mathcal{K}_{R,U}(V)$. Dann

$$\phi_s(t) = ts|_{U \cap V}.$$

Die inverse Abbildung von $s \mapsto \phi_s$ ist durch $\phi \mapsto s_\phi$ gegeben mit $s_\phi = \phi(1_U)$.

Sei I eine injektive Garbe und sei $V \subset U \subset X$ offene Mengen. Diese induzieren einen Mono $\mathcal{K}_{R,V} \hookrightarrow \mathcal{K}_{R,U}$ und da I injektiv ist, erhält man eine Surjektion $I(U) = \text{Hom}(\mathcal{K}_{R,U}, I) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{K}_{R,V}, I) = I(V)$. Daher ist I welk.

(b) **Vorbetrachtung:** Seien $U, V \subset X$ offen und seien $t \in \mathcal{G}(U), t' \in \mathcal{G}(V)$ so dass $\beta(t) = \beta(t')$ auf $U \cap V$ gilt. Dann gibt es $f \in \mathcal{F}(U \cup V)$, so dass $t' = t + \alpha(f)$ auf $U \cap V$.

Beweis: Da $(t' - t)|_{U \cap V}$ im Kern von β , also im Bild von α liegen, gibt es $f' \in \mathcal{F}(U \cap V)$ mit $\alpha(f') = t' - t$. Da \mathcal{F} welk, setzt f' zu einem $f \in \mathcal{F}(U \cup V)$ fort. Dies ist das gesuchte Element. \square

Sei $s \in \mathcal{H}(X)$. Betrachte die Menge M aller Paare (U, t) mit $U \subset X$ offen und $t \in \mathcal{G}(U)$ mit $\beta(t) = s|_U$. Wir ordnen M durch

$$(U, t) \leq (U', t') \iff U \subset U', t(x) = t'(x) \forall x \in U.$$

Sei $K \subset M$ linear geordnet und sei $U = \bigcup_{(V,t) \in K} V$ und $r : U \rightarrow \mathcal{G}_{\text{et}}$ gegeben durch $r(x) = t(x)$ falls $(V, t) \in K$ und $x \in V$. Dann ist r ein stetiger Etalschnitt, also ein Element von $\mathcal{G}(U)$ und (U, t) ist eine obere Schranke von K . Das Lemma von Zorn liefert ein maximales Element (U, t) in M . Wir zeigen, dass $U = X$ ist. Sei also $x \in X$. Dann gibt es eine offene Umgebung V von x und ein $t' \in \mathcal{G}(V)$ mit $\beta(t') = s|_V$. Nach der Vorbetrachtung kann man t' so wählen, dass $t' = t$ auf $U \cap V$ gilt, also kann man die beiden verkleben zu einem Schnitt auf $U \cup V$. Da U aber maximal war, folgt $V \cup U = U$, damit liegt x in U und da x beliebig war, ist $U = X$.

(c) Wir haben eine exakte Sequenz von Garben

$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$, wobei nun \mathcal{F} und \mathcal{G} welk sind und wir wollen zeigen, dass \mathcal{H} welk ist.

Seien $V \subset U \subset X$ offene Mengen. Wir haben ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen (nach Teil (b))

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \mathcal{H}(V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Mit Diagrammjagd zeigt man, dass der letzte vertikale Pfeil ebenfalls epi ist.

(d) Wir zeigen, dass welche Garben azyklisch sind Sei also \mathcal{F} eine welke Garbe. Da \mathcal{F} in eine injektive Garbe eingebettet werden kann, erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow I \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

wobei I injektiv ist. Nach (a) ist I welk und nach (c) auch \mathcal{H} . Da I injektiv ist, gilt $H^p(I) = 0$ für $p \geq 1$. Die lange exakte Kohomologiesequenz sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathcal{F}) \rightarrow H^0(I) \rightarrow H^0(\mathcal{H}) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(\mathcal{F}) \rightarrow 0 \rightarrow H^1(\mathcal{H}) \rightarrow H^2(\mathcal{F}) \rightarrow 0 \rightarrow H^2(\mathcal{H}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Nach (b) ist die erste Zeile exakt, wenn man eine Null ans Ende setzt, so dass also $H^1(\mathcal{F}) = 0$ für jede welke Garbe gilt. Ferner gilt $H^k(\mathcal{H}) \cong H^{k+1}(\mathcal{F})$ für $k \geq 1$. Aber da \mathcal{H} welk ist, gilt auch $H^1(\mathcal{H}) = 0$ und daher $H^2(\mathcal{F}) = 0$ und also $H^2(\mathcal{H}) = 0$ und so weiter. \square

* * *

Feine Garben

Definition 4.5.5. Sei $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Garbenhomomorphismus. Die

Träger von ϕ , geschrieben $\text{supp}(\phi)$ ist der Abschluss der Menge aller $x \in X$ mit $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \neq 0$, d.h.,

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in X : \phi_x \neq 0\}}.$$

Bemerkung 4.5.6. In Büchern über Algebraische Geometrie findet man den Träger einer Garbe \mathcal{F} definiert als die Menge aller Punkte x mit $\mathcal{F}_x \neq 0$. Das heisst, man nimmt keinen Abschluss. Das ist nützlich für Nicht-Hausdorff-Räume, da der Abschluss sonst zu gross wird. In dieser Vorlesung nutzen wir den Trägerbegriff wie in der Analysis, da auch die Anwendungen vorwiegend Hausdorff-Räume betreffen.

Definition 4.5.7. Eine Garbe \mathcal{F} heisst **feine Garbe**, falls für jede offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ es eine Familie $(\phi_i)_{i \in I}$ von Endomorphismen $\phi_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ gibt, so dass

- (a) $\text{supp}(\phi_i) \subset U_i$ und
- (b) die Familie (ϕ_i) ist lokal-endlich in dem Sinne, dass es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt, mit $U \cap \text{supp}(\phi_i) = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$,
- (c) $\sum_{i \in I} \phi_i = \text{Id}|_{\mathcal{F}}$.

Beispiele 4.5.8.

- (a) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es für jede Überdeckung (U_i) eine **Teilung der Eins**, d.h., eine lokal-endliche Familie $u_i \in C^\infty(M)$ mit $\text{supp}(u_i) \subset U_i$ und

$$\sum_{i \in I} u_i = 1.$$

Das heisst, dass die Garbe C^∞ von Keimen glatter Funktionen fein

ist, wie auch die Garbe Ω^p von (Keimen von) glatten p -Differentialformen, denn man kann definieren $\phi_i(\omega) = u_i\omega$.

(b) Wolkenkratzergarben sind fein.

Definition 4.5.9. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raums X . Eine **Verfeinerung** von \mathcal{U} ist eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$, so dass es zu jedem $j \in J$ ein $i \in I$ gibt, so dass

$$V_j \subset U_i.$$

Ein Raum X heisst **parakompakt**, falls jede Überdeckung eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt.

Beispiele 4.5.10. (a) Ein abzählbar erzeugter, lokalkompakter Hausdorff-Raum ist parakompakt.

(b) Metrische Räume sind parakompakt.

(c) CW-Komplexe sind parakompakt.

(d) Die lange Linie ist nicht parakompakt.

(e) Ein weiteres Gegenbeispiel ist ein Produkt von überabzählbar vielen Kopien eines unendlichen diskreten Raums.

Erinnerung: Jeder Garbe \mathcal{F} lässt sich injektiv einbetten $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$, wobei \mathcal{I} ein Produkt von Wolkenkratzergarben mit injektiven Halmen ist, siehe den Beweis von Proposition 4.5.1.

Lemma 4.5.11.

(a) Ist $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Garben. Falls \mathcal{F} fein ist, dann ist die Sequenz von Gruppen $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow 0$ exakt.

- (b) Sei \mathcal{J} ein Produkt von Wolkenkratzergerben mit injektiven Halmen. Die Garbe \mathcal{J} ist fein und injektiv.
- (c) Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$ eine Auflösung in Garben I^p die Produkte von Wolkenkratzergerben mit injektiven Halmen sind. Ist \mathcal{F} fein, dann ist die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow I^0(X) \rightarrow I^1(X) \rightarrow \dots$ exakt.

Beweis. (a) Wir müssen zeigen, dass g_X surjektiv ist. Sei also $t \in \mathcal{H}(X)$. Dann gibt es eine Überdeckung (U_i) von X und $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$, so dass $g(s_i) = t|_{U_i}$. Die Differenz

$$s_{ij} = s_i - s_j$$

ist ein Schnitt von $\ker(g) \cong \mathcal{F}$ auf $U_i \cap U_j$. Wir nehmen an, dass \mathcal{F} fein ist, können also, nach Verfeinern von Überdeckung annehmen, dass es eine Familie ϕ_i von Endomorphismen von \mathcal{F} gibt, die sich zur Identität aufaddieren. Da der Träger von ϕ_j in U_j liegt, kann man $\phi_j(s_{ij})$ durch Null zu einem Schnitt in $\ker(g)(U_i) \subset \mathcal{G}(U_i)$ fortsetzen. Sei

$$s'_i = \sum_j \phi_j(s_{ij}).$$

Dann ist $s'_i \in \ker(g)(U_i)$ und über $U_i \cap U_j$ gilt:

$$\begin{aligned} s'_i - s'_j &= \sum_k \phi_k(s_{ik}) - \sum_k \phi_k(s_{jk}) \\ &= \sum_k \phi_k(s_i - s_k) + \phi_k(s_j - s_k) = \sum_k \phi_k(s_i - s_j) = s_i - s_j. \end{aligned}$$

Da $g(s'_i) = 0$ und $g(s_i) = t|_{U_i}$, definiert die Vorschrift $s(x) = (s_i - s'_i)(x)$ für $x \in U_i$ einen globalen Schnitt s von \mathcal{G} mit $g(s) = t$.

(b) Sei \mathcal{J} das Produkt aller Wolkenkratzergerben $\mathcal{S}_x(J_x)$, wie im Beweis von Proposition 4.5.1. Dann ist \mathcal{J} injektiv. Wir müssen zeigen, dass

diese Garbe fein ist. Da X parakompakt ist, reicht es, eine lokal-endliche Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ zu betrachten. Da \mathcal{J} ein Produkt von Wolkenkratzergerben ist und Einpunktmengen $\{x\}$, $x \in X$ abgeschlossen sind, gibt es eine Familie $(\phi_i)_i$ von Endomorphismen von \mathcal{J} , die in jedem Punkt nur die Werte 0 oder Id annehmen, mit der Eigenschaft, dass $\text{supp } \phi_i \subset U_i$ und $\sum_i \phi_i = \text{Id}$. Damit ist \mathcal{J} fein.

(c) Sei A ein Objekt einer abelschen Kategorie. Die Menge $\text{End}(A) = \text{Hom}(A, A)$ wird durch Addition und Komposition zu einem Ring mit Eins. Die Kategorie der Komplexe einer gegebenen abelschen Kategorie ist wieder eine abelsche Kategorie. Sei $C^\bullet = (C^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ ein Komplex von Garben über einem Raum X und sei $R = \text{End}(C^\bullet)$. Sei $N \subset R$ die Menge der nullhomotopen Endomorphismen.

N ist ein zweiseitiges Ideal in R .

Um dies zu sehen, sei $\phi \in R$ und sei $n \in N$. Sei P eine Homotopie, so dass $n = Pd + dP$. Da ϕ ein Komplex-Morphismus ist, kommutiert es mit den Differentialen, also $n\phi = p\phi d + dP\phi$ und damit $p\phi$ eine Nullhomotopie für $n\phi$. Ebenso ist ϕP eine Nullhomotopie für ϕn .

Sei \mathcal{F} eine feine Garbe und sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$ eine Auflösung, wobei jedes I^p ein Produkt von Wolkenkratzergerben mit injektiven Halmen ist. Jeder Endomorphismus $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ kann nach Lemma 3.1.11 zu einem Komplex-Endomorphismus $(\psi_p)_{p \geq 0}$ ausgedehnt werden, der eindeutig ist bis auf Homotopie (Lemma 3.1.11). Für eine Wolkenkratzergarbe \mathcal{S} über einem Punkt x_0 gilt

$\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{S}) = \text{Hom}(\mathcal{F}_{x_0}, \mathcal{S}_{x_0})$ und für ein Produkt von

Wolkenkratzergerben gilt $\text{Hom}(\mathcal{F}, \prod_\alpha \mathcal{S}_\alpha) = \prod_\alpha \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{S}_\alpha)$. Daher sind die Differentiale des Komplexes halmweise definiert und die Fortsetzungen ebenso, so dass $\text{supp}(\psi_p) \subset \text{supp } \phi$ gilt. Da die Fortsetzungen nur bis auf Homotopie eindeutig sind, erhalten wir

einen Ring-Homomorphismus

$$\text{End}(\mathcal{F}) \rightarrow \text{End}(I^\bullet)/N.$$

Die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow I^0(X) \rightarrow I^1(X)$ ist exakt. Sei also $p \geq 1$ und sei $s \in I^p(X)$ mit $ds = 0$. Da $I^{p-1} \rightarrow I^p \rightarrow I^{p+1}$ exakt ist, gibt es eine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$, so dass für jedes $i \in I$ ein $t_i \in I^{p-1}(U_i)$ existiert mit $s|_{U_i} = dt_i$. Sei (ϕ_i) eine Familie von Endomorphismen von \mathcal{F} zur Überdeckung (U_i) mit $\text{supp}(\phi_i) \subset U_i$ und $\sum_{i \in I} \phi_i = \text{Id}$. Diese Endomorphismen können zu I^\bullet geliftet werden mit der Eigenschaft $\text{supp}(\phi_{i,p}) \subset U_i$ für jedes $i \in I$ und es gilt $\text{Id} = h + \sum_i \phi_{i,\bullet}$, wobei h nullhomotop ist. Da $ds = 0$, folgt $h(s) = dt$ für ein $t \in I^{p-1}(X)$. Wir können jedes $\phi_{i,p}(t_i)$ und jedes $\phi_{i,p}(dt_i)$ durch Null ausserhalb von U_i fortsetzen und erhalten

$$s = h(s) + \sum_i \phi_{i,p}(s) = dt + \sum_i \underbrace{\phi_{i,p}(dt_i)}_{=d\phi_{i,p}(t_i)} = d\left(t + \sum_i \phi_{i,p}(t_i)\right). \quad \square$$

Satz 4.5.12. *Sei X ein parakompakter Hausdorff-Raum. Dann sind feine Garben azyklisch.*

Beweis. Sei \mathcal{F} eine feine Garbe auf X . Nach (b) und (c) des Lemmas gibt es eine injektive Auflösung $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$, so dass die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow I^0(X) \rightarrow I^1(X) \rightarrow \dots$ exakt ist. Die Garbenkohomologie ist nach Definition die Kohomologie des Komplexes $0 \rightarrow I^0(X) \rightarrow I^1(X) \rightarrow \dots$, der exakt ist, bis auf $I^0(X)$, also $H^k(X, \mathcal{F}) = 0$ für $k \geq 1$. \square

5 Vergleich der Kohomologie-Theorien

5.1 Singuläre Kohomologie

Lemma 5.1.1. *Sei X ein parakompakter Hausdorff Raum.*

- (a) *Disjunkte abgeschlossene Mengen lassen sich durch disjunkte offene Umgebungen trennen.*
- (b) *Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ gibt es eine offene Überdeckung $(U'_i)_{i \in I}$ mit $\overline{U'_i} \subset U_i$ für jedes $i \in I$.*

Proof. Kelly: General Topology. □

Definition 5.1.2. Eine Prägarbe \mathcal{P} heißt **welk**, falls für je zwei offene Mengen $U \subset V$ die Restriktion $\mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(U)$ surjektiv ist.

Lemma 5.1.3. *Sei X parakompakter Hausdorff Raum. Erfüllt eine Prägarbe \mathcal{P} das Verklebungssaxiom und ist sie welk, dann ist auch ihre Garbifizierung \mathcal{P}^+ welk.*

Proof. Wir zeigen zunächst, dass fuer jede offenen Menge $U \subset X$ die Abbildung $\mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}^+(U)$ surjektiv ist.

Hierfür sei $s \in \mathcal{P}^+(U)$, also eine Abbildung $s : U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{P}_x$, so dass es eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $s_i \in \mathcal{P}(U_i)$ gibt mit $s(x) = s_i(x)$ für jedes $x \in U_i$. Da \mathcal{P} keine Garbe ist, können wir an dieser Stelle nicht auf die Kompatibilität der s_j schließen. Nach Übergang zu einer Verfeinerung können wir $(U_i)_{i \in I}$ also lokal-endlich annehmen. Weiter wählen wir eine Überdeckung (U'_i) wie in Lemma 5.1.1.

Für $i, j \in I$ gilt $s_i(x) = s_j(x)$ für jedes $x \in U_i \cap U_j$. Daher gibt es eine offene Umgebung $V_{i,j}(x) \subset U_i \cap U_j$ so dass $s_i|_{V_{i,j}(x)} = s_j|_{V_{i,j}(x)}$. Wegen der lokalen

Endlichkeit der Überdeckung können wir zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $V(x)$ finden, so dass

$$x \in U_i \cap U_j \Rightarrow V(x) \subset V_{i,j}(x), \text{ also } s_i|_{V(x)} = s_j|_{V(x)} \quad (1)$$

$$x \in U_i \Rightarrow V(x) \subset U_i, \quad (2)$$

$$x \in U'_i \Rightarrow V(x) \subset I'_i, \quad (3)$$

$$V(x) \cap \overline{U'_i} \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{U'_i}. \quad (4)$$

Gilt dann $V(x) \cap V(y) \neq \emptyset$, dann gibt es einen Index $i \in I$, so dass $V(x), V(y) \subset U_i$, **denn:** ist $x \in U'_i$, dann gilt nach (3), dass $V(x) \subset U'_i$. Daher $V(y) \cap U'_i \neq \emptyset$ und nach (4) folgt $y \in \overline{U'_i}$. Damit folgt $V(y) \subset U_i$ nach (2).

Sei dann $s_x = s_i$ der nach (1) wohldefinierte Schnitt $s_x \in \mathcal{P}(V(x))$. Dann folgt $s_x|_{V(x) \cap V(y)} = s_i|_{V(x) \cap V(y)} = s_y|_{V(x) \cap V(y)}$. Da \mathcal{P} das Verklebungssaxiom erfüllt, kommen alle s_x von einem globalen Schnitt $t \in \mathcal{P}(X)$, der dann auf s abbildet.

Um die Welkheit zu zeigen, seien $U \subset V$ offene Mengen. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^k(V) & \twoheadrightarrow & \mathcal{P}^{+,k}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}^k(U) & \twoheadrightarrow & \mathcal{P}^{+,k}(U) \end{array}$$

Die Horizontalen sind surjektiv nach dem Obigen. der linke vertikale Pfeil, da \mathcal{P} welk ist. Damit ist auch der letzte Pfeil surjektiv. \square

Sei X ein topologischer Raum und R ein Ring. Für eine offene Menge $U \subset X$ sei $C^k(U, R) = \text{Hom}(C_k(U), R)$ die Menge aller singulären Coketten in U mit Werten in R . Für $V \subset U$ sei $\text{res}_V^U : C^k(U, R) \rightarrow C^k(V, R)$ die Restriktion. Also ist $\mathcal{P}^k : U \mapsto C^k(U, R)$ eine Prägarbe.

Beachte, dass \mathcal{P}^k welk ist.

Der Corandoperator $d : C^k(U, R) \rightarrow C^{k+1}(U, R)$ kommutiert mit Restriktion, definiert also einen Prägarben-Homomorphismus $\mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^{k+1}$. Sei \mathcal{C}^k die Garbifizierung von \mathcal{P}^k . Dann ist \mathcal{C}^0 die Garbe aller Abbildungen mit Werten in R . Es enthält die konstante Garbe \mathcal{K}_R als Untergarbe.

Satz 5.1.4. *Sei X ein parakompakter, lokal zusammenziehbarer Hausdorff-Raum. Die Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_R \rightarrow \mathcal{C}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{d} \dots$$

ist eine welke Auflösung der konstanten Garbe \mathcal{K}_R . Wir schliessen

$$H_{\text{sing}}^k(X, R) = H^k(X, \mathcal{K}_R).$$

Beweis. Für die Exaktheit in \mathcal{C}^0 reicht es, zu zeigen, dass es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt, so dass die Sequenz $\mathcal{K}_R(U) \rightarrow \mathcal{C}^0(U, R) \rightarrow \mathcal{C}^1(U, R)$ exakt ist. Hierfür wähle U wegzusammenhängend. Sei $\alpha \in \ker(d)$, also $\alpha : U \rightarrow R$ mit $\alpha(\gamma(0)) - \alpha(\gamma(1)) = 0$ for jeden Weg γ in U . Da U wegzusammenhängend ist, ist die Abbildung α konstant, d.h., in $\mathcal{K}_R(U)$. Die Exaktheit an den anderen Stellen folgt aus der lokalen Zusammenziehbarkeit, da zusammenziehbare Räume triviale Kohomologie haben. \square

Bemerkung 5.1.5. Die Aussage des Satzes wird falsch auf nicht-lokal-zusammenziehbaren Räumen. Sei zum example X der hawaiianische Ohrring. Dann Haben Eda/Kawamura in *Die singular homology of the Hawaiian earring*. J. London Math. Soc. (2) 62 (2000), no. 1,

305–310. gezeigt, dass

$$H_{\text{sing}}^1(X) \cong \left(\prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z} \right) \oplus \left(\prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z} / \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z} \right).$$

Insbesondere ist dies keine freie Gruppe. Aber die Definition der Čech-Kohomologie impliziert

$$\check{H}^1(X) \cong \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}$$

und wir werden später sehen, dass dies auch gleich der singulären Kohomologie ist.

* * *

5.2 De Rham-Kohomologie

Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $k \in \{0, \dots, \dim X\}$. Für eine offene Menge $U \subset X$ ist die Menge $\Omega^k(U)$ der k -Differentialformen ein \mathbb{R} -Vektorraum. Die Abbildung $U \mapsto \Omega^k(U)$ ist eine Garbe Ω^k . So ist zum Beispiel Ω^0 die Garbe der glatten Funktionskeime. Diese enthält die konstante Garbe $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ als Untergarbe.

Satz 5.2.1. *Die Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \dots$$

ist eine feine Auflösung der konstanten Garbe $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$. Daher erhalten wir

$$H_{dR}^k(X) = H^k(X, \mathcal{K}_{\mathbb{R}}).$$

Beweis. Wir müssen nur die Exaktheit zeigen: Aus der Analysis-Vorlesung entnehmen wir:

Lemma 5.2.2 (Poincaré Lemma). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig und sei ω eine glatte k -Form in U mit $k \geq 1$. Ist $d\omega = 0$, dann gibt es $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$, so dass $\omega = d\eta$.*

Da eine glatte Mannigfaltigkeit lokal diffeomorph ist zu sternförmigen Mengen in \mathbb{R}^n , ist die Sequenz lokal exakt, also eine exakte Sequenz von Garben. Nach Beispiel 4.5.8 sind die Garben Ω^k fein. \square

* * *

5.3 Gruppen-Kohomologie

Definition 5.3.1. Ein **Simplizialkomplex** über einer Menge V ist ein System $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(V)$ von nichtleeren, endlichen Teilmengen, so dass

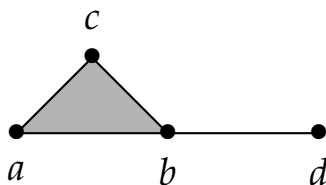
- (a) Für jedes $v \in V$ gilt $\{v\} \in \mathcal{S}$.
- (b) $E \in \mathcal{S}$ und $\emptyset \neq F \subset E$ impliziert $F \in \mathcal{S}$. In diesem Fall heißt F eine **Seite** von E .

Ein Element $E \in \mathcal{S}$ wird **Simplex** oder **Zelle** des Simplizialkomplexes \mathcal{S} genannt. Ein Element von V nennt man **Vertex** oder **Ecke** des Komplexes.

Ist E ein Simplex, die **Dimension** von E ist

$$\dim E = |E| - 1.$$

Im folgenden Bild sind zwei maximale Simplizes $\{a, b, c\}$ und $\{b, d\}$ zu sehen.



Definition 5.3.2. Sei (V, \mathcal{S}) ein Simplicialkomplex. Für jedes $e = \{v_0, \dots, v_n\} \in \mathcal{S}$ mit $(n + 1)$ Elementen wähle einen n -Simplex $\Delta_E \subset \mathbb{R}^n$ und nummeriere die Vertices v_0, \dots, v_n . Sei

$$\mathcal{S}_{\text{geom}} := \left(\bigsqcup_{E \in \mathcal{S}} \Delta_E \right) / \sim,$$

Wobei \sim die Äquivalenzrelation ist, die für $F \subset E$ den Simplex Δ_F mit der entsprechenden Seite von Δ_E identifiziert. Dann ist $\mathcal{S}_{\text{geom}}$ ein topologischer Raum. Dieser Raum heißt die **geometrische Realisierung** des Simplicialkomplexes (V, \mathcal{S}) .

Beispiel 5.3.3. Für eine beliebige Menge V ist der **volle Simplicialkomplex** über V gleich dem System **aller** endlichen Teilmengen.

Zwei Beispiele für Simplicialkomplexe:



Definition 5.3.4. Sei Γ eine Gruppe. Sei $\Gamma \text{ MOD}$ die abelsche Kategorie aller Γ -Moduln. Für ein Γ -Modul M sei

$$M^\Gamma = \{m \in M : \gamma m = m \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

die Gruppe aller Γ -invarianten Elemente. Dann definiert $M \mapsto M^\Gamma$ ein Funktor $\mathcal{H}^0(\Gamma, \cdot)$ von $\Gamma \text{ MOD}$ zur Kategorie $\mathbb{Z} \text{ MOD} = AB$ von

\mathbb{Z} -Moduln oder, was dasselbe ist, von abelschen Gruppen. Man sieht leicht, dass dieser Funktor linksexakt ist. Die Rechts-Ableitungen dieses Funktors liefern nach Definition Gruppenkohomologie:

$$H^k(\Gamma, M) = R^k \mathcal{H}^0(\Gamma, M).$$

Satz 5.3.5. *Sei Γ eine Gruppe. Dann gibt es einen zusammenziehbaren Raum Y , mit einer diskontinuierlichen Operation von Γ , so dass also der Quotient $X = \Gamma \backslash Y$ die Fundamentalgruppe*

$$\pi_1(X) \cong \Gamma$$

hat.

Der Raum X wird auch ein $K(\Gamma, 1)$ -**Raum** genannt oder **klassifizierender Raum** zu Γ und dann schreibt man auch $Y = E\Gamma$ und $X = B\Gamma$.

Proof. Sei $V = \mathbb{N}_0 \times \Gamma$ und sei \mathcal{S} das System aller endlichen Teilmengen $E \subset V$ mit der Eigenschaft

$$|E \cap (\{n\} \times \Gamma)| \leq 1$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist (V, \mathcal{S}) ein Simplicialkomplex über V . Let $V_0 = \{0\} \times \Gamma$.

Die Gruppe Γ operiert auf (V, \mathcal{S}) durch linkstranslationen, d.h., durch

$$\gamma \{(k_1, \gamma_1), \dots, (k_n, \gamma_n)\} = \{(k_1, \gamma\gamma_1), \dots, (k_n, \gamma\gamma_n)\}.$$

Nach Konstruktion gilt für jedes $\gamma \neq 1$, dass

$$\gamma E \cap E = \emptyset.$$

Sei Y die geometrische Realisierung. Dann operiert Γ durch zelluläre Homöomorphismen, d.h., Simplices werden auf Simplices geworfen..
The Elemente von Y können in der Form

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j(j, \gamma_j)$$

geschrieben werden, wobei $\lambda_j \geq 0$ und nur endlich viele sind $\neq 0$ und $\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j = 1$.

Wir behaupten, dass Y zusammenziehbar ist und dass Γ diskontinuierlich operiert.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, sei $f_n : Y \rightarrow Y$ die Abbildung

$$f_n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j(j, \gamma_j) \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j(j, \gamma_j) + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda_j(j+1, \gamma_j).$$

Beachte, dass in $f_n(x)$ kein Summand der Form $\lambda(n, \gamma_n)$ auftritt. Dann ist f_n homotop zu f_{n+1} durch eine Homotopie h_n wie folgt

$$\begin{aligned} h_n \left(s, \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j(j, \gamma_j) \right) \\ = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j(j, \gamma_j) + (1-s)\lambda_n(n, \gamma_n) + s(\lambda_n(n+1, \gamma_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j(j+1, \gamma_j)). \end{aligned}$$

Wir wenden h_0 auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ an, dann h_1 auf $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}]$ und so weiter. Diese passen zusammen und geben eine Homotopie von f_0 zu Id , da für jedes Element von Y nur endlich viele j eine Rolle spielen.

Schliesslich ist die Abbildung f_0 homotop zur Punktabbildung $x \mapsto (0, \text{Id})$ via der Homotopie

$$h(s, x) = (1-s)f_0(x) + s(0, \text{Id}).$$

Daher ist Y zusammenziehbar.

Um zu zeigen, dass Γ diskontinuierlich operiert, stellen wir zunächst fest, dass für gegebenes n die Gruppe Γ frei auf der Menge aller n -Simplizes operiert. Sei $y \in Y$ und sei n_0 der kleinste Index mit $y \in Y_{n_0}$, wobei Y_{n_0} die Vereinigung aller Simplizes der Dimension n_0 ist. Dann gilt stets $Y_n \subset Y_{n+1}$ und eine Menge $U \subset X$ ist genau dann offen, wenn $U \cap Y_n$ offen ist fuer jedes n .

Für jedes $n \geq n_0$ konstruieren wir eine offene Umgebung U_n von x in X_n so dass

$$\gamma U_n \cap U_n = \emptyset \text{ for } \gamma \neq 1, \quad \text{and} \quad U_{n+1} \cap X_n = U_n.$$

Für $n = n_0$ sei $U_n = e$ die n_0 -Zelle, in der x liegt. Da Γ frei auf der Menge aller n_0 -Zellen operiert, folgt die verlangte Eigenschaft. Sei nun $n \geq n_0$ und U_n bereits konstruiert. Für jeden $(n+1)$ -Simplex Δ wähle einen festen Punkt x_Δ im Inneren von Δ und setze

$$V_\Delta = \{tx_\Delta + (1-t)y : 0 < t < 1, y \in \Delta \cap U_n\}.$$

Betrachte die Menge $U_{n+1} = U_n \cup \bigcup_\Delta V_\Delta$, wobei die Vereinigung über alle $(n+1)$ -Simplizes läuft. Die verlangten Eigenschaften sind klar. Schliesslich setze

$$U = \bigcup_n U_n.$$

Dann ist U eine offene Umgebung von x in X mit

$$\gamma U \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \gamma = 1.$$

Also operiert Γ diskontinuierlich und, da X zusammenziehbar ist, folgt

$$\Gamma \cong \pi_1(\Gamma \backslash X),$$

und X ist die universeelle Überlagerung von $B\Gamma := \Gamma \backslash X$. □

Sei $Y = E\Gamma$ die universelle Überdeckung von $B\Gamma = \Gamma \backslash Y$. Ein Γ -Modul M induziert eine lokalkonstante Garbe $\mathcal{M} = \Gamma \backslash (Y \times M)$ über $X = \Gamma \backslash Y$. Sei $H^k(X, \mathcal{M})$ die entsprechende Garbenkohomologie.

Satz 5.3.6. *Es gibt eine natrürliche Isomorphie*

$$H^k(\Gamma, M) \cong H^k(B\Gamma, \mathcal{M}).$$

Insbesondere, wenn $M = G$ eine abelsche Gruppe mit trivial Γ -Aktion ist, dann ist \mathcal{M} die konstante Garbe mit Halm G und dann impliziert Satz 5.1.4, dass

$$H^k(\Gamma, G) = H_{\text{sing}}^k(B\Gamma, G).$$

Beweis. Die Funktoren $M \mapsto H^k(\Gamma, M)$ bilden einen universellen δ -Funktorkomplex auf $\Gamma \text{ MOD}$. Sei $AB(X)$ die Kategorie der Garben abelscher Gruppen auf X . Dann ist $\mathcal{F} \mapsto H^k(X, \mathcal{F})$ ein universeller δ -Funktorkomplex auf $AB(X)$. Der Garben-Funktorkomplex $\Gamma \text{ MOD} \rightarrow AB(X)$, der einem Modul M die lokal-konstante Garbe \mathcal{L}_M zuordnet, ist exakt. Daher ist $M \mapsto H^k(X, \mathcal{L}_M)$ ein δ -Funktorkomplex auf $\Gamma \text{ MOD}$. Es bleibt, die Universalität zu zeigen. Wie üblich zeigen wir die Auslöschbarkeit von H^k für $k \geq 1$. Sei $M \in \Gamma \text{ MOD}$ und sei

$$I_M = \{\alpha : \Gamma \rightarrow M\}$$

die abelsche Gruppe aller Abbildungen von Γ nach M . Dann wird I_M zu einem Γ -Modul durch

$$g.\alpha(\tau) = g(\alpha(g^{-1}\tau)).$$

Die Abbildung, die $m \in M$ auf die konstante Abbildung mit Wert m wirft, ist eine Einbettung $M \hookrightarrow I_M$ von Γ -Moduln. Es ist also noch zu zeigen, dass

$$H^k(X, \mathcal{L}_{I_M}) = 0$$

für $k \geq 1$. Sei $\pi : Y \rightarrow X = \Gamma \backslash Y$ die Projektion.

Lemma 5.3.7. *Es gilt*

$$\mathcal{L}_{I_M} \cong \pi_* \mathcal{K}_M,$$

wobei \mathcal{K}_M die konstante Garbe mit Halm M auf Y ist.

Beweis. Sei $y \in Y$ und sei U eine offene Umgebung von y , so dass $U \cap \gamma U = \emptyset$ für jedes $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$. Ferner kann I_M mit $\prod_{\gamma \in \Gamma} M$ identifiziert werden, wobei Γ durch Permutationen und auf den Faktoren gleichzeitig operiert. Wir schreiben C^{lc} für die Menge aller lokal-konstante Abbildungen. Dann ist $\mathcal{L}_{I_M}(\pi(U))$ nach Definition gleich der Menge aller stetigen Schnitte der Projektion $\Gamma \backslash (\Gamma U \times I_M) \rightarrow \Gamma \backslash (\Gamma U)$. Solch ein Schnitt s ist eine Abbildung $\Gamma U \rightarrow \Gamma \backslash (\Gamma U \times I_M)$, die $y \in \Gamma U$ auf, sagen wir, $\Gamma(y, \alpha(y))$ wirft, wobei die Wohldefiniertheit impliziert, dass für $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\Gamma(y, \gamma^{-1} \alpha(\gamma y)) = \Gamma(\gamma y, \gamma \gamma^{-1} \alpha(\gamma y)) = \Gamma(\gamma y, \alpha(\gamma y)) = s(\gamma y) = s(y) = \Gamma(y, \alpha(y)).$$

Das bedeutet, dass $\alpha(\gamma y) = \gamma \alpha(y)$, und, da I_M die diskrete Topologien trägt, ist α lokalkonstant. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I_M}(\pi(U)) &\cong \left\{ \alpha \in C^{\text{lc}}(\Gamma U, I_M) : \alpha(\gamma y) = \gamma \alpha(y) \right\} \\ &\cong \left\{ \alpha \in C^{\text{lc}}\left(\Gamma U, \prod_{\gamma \in \Gamma} M\right) : \alpha(\gamma y)_\tau = \gamma \alpha(y)_{\gamma^{-1}\tau} \right\} \\ &\cong \left\{ \alpha \in \prod_{\gamma \in \Gamma} C^{\text{lc}}(\Gamma U, M) : \alpha(\gamma y)_\tau = \gamma \alpha(y)_{\gamma^{-1}\tau} \right\} \\ &\cong \prod_{\gamma \in \Gamma} C^{\text{lc}}(\gamma U, M) \cong \pi_* \mathcal{K}_M(\pi(U)). \end{aligned} \quad \square$$

Wir zeigen jetzt, dass $\pi_* \mathcal{K}_M$ azyklisch ist. Hierfür beachte, dass der

Funktor $\pi_* : AB(Y) \rightarrow AB(\Gamma \setminus Y)$ exakt ist. Dies folgt aus den Eigenschaften der Projektion $\pi : Y \rightarrow \Gamma \setminus Y$, denn falls \mathcal{F} eine Garbe über Y ist und $y_0 \in Y$, dann ist der Halm von $\pi_* \mathcal{F}$ über dem Bildpunkt $\pi(y_0)$ gleich

$$\pi_* \mathcal{F}_{\pi(y_0)} = \prod_{y \in Y: \pi(y) = \pi(y_0)} \mathcal{F}_y.$$

Da eine Sequenz von Garben genau dann exakt ist, wenn alle Halmsequenzen es sind, schliessen wir, dass π_* exakt ist.

Ferner gilt für jede Garbe \mathcal{F} auf Y , dass

$$\mathcal{H}^0(\pi_* \mathcal{F}) = \mathcal{H}^0(\mathcal{F}),$$

wobei \mathcal{H}^0 der Schnittfunktor (links über $\Gamma \setminus Y$, rechts über Y) ist. Wir wählen eine spezielle injektive Auflöser von \mathcal{K}_M durch Produkte von Wolkenkratzergerben mit injektiven Halmen

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$$

Die Bilder $\pi_*(I^p)$ sind wieder Produkte von Wolkenkratzergerben mit injektiven Halmen. Da π_* exakt ist, ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \pi_* \mathcal{K}_M \rightarrow \pi_* I^0 \rightarrow \pi_* I^1 \rightarrow \dots$$

eine injektive Auflöser von $\pi_* \mathcal{K}_M$. Es folgt, dass

$$H^k(\Gamma \setminus Y, \pi_* \mathcal{K}_M) = H^k(\mathcal{H}^0(\pi_* I^\bullet)) = H^k(\mathcal{H}^0(I^\bullet)) = H^k(Y, \mathcal{K}_M)$$

Die rechte Seite ist Null für $k \geq 1$, nach Satz 5.1.4 und der Zusammenziehbarkeit von Y . □

5.4 Čech-Kohomologie

In diesem Abschnitt sei X ein parakompakter Hausdorff-Raum.

Lemma 5.4.1.

(a) Sei $U \subset X$ offen, $Z \subset X$ abgeschlossen mit $Z \subset U$. Dann gibt es eine offene Menge V mit

$$Z \subset V \subset \bar{V} \subset U.$$

(b) Für jede lokal-endliche Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ gibt es eine Verfeinerung $(V_i)_{i \in I}$, so dass für jedes $i \in I$ gilt $\bar{V}_i \subset U_i$.

Beweis. (a) Sei A die abgeschlossene Menge $A = X \setminus U$. Wir betrachten zuerst den Fall $Z = \{z\}$. Da X ein Hausdorff-Raum ist, gibt es für jedes $a \in A$ eine offene Umgebung B_a mit $z \notin \bar{B}_a$. Dann ist $(B_a)_{a \in A} \cup \{U\}$ eine offene Überdeckung von X . Da X parakompakt ist, gibt es eine lokal-endliche Verfeinerung $(W_j)_{j \in J} \cup \{U\}$, wobei für jedes $j \in J$ es ein $a \in A$ gibt mit $W_j \subset B_a$. Sei \tilde{V} eine offene Umgebung von z , die nur endlich viele der W_j trifft, sagen wir W_1, \dots, W_n . Dann ist

$$V = \tilde{V} \setminus (\bar{W}_1 \cup \dots \cup \bar{W}_n)$$

eine offene Umgebung von z , die die Behauptung erfüllt, denn $z \notin \bar{B}_a$ für alle $a \in A$ und $W_j \subset B_a$ für ein a .

Sei nun Z beliebig. Nach dem ersten Teil gibt es zu jedem $z \in Z$ eine offene Umgebung V_z mit

$$z \in V_z \subset \bar{V}_z \subset U.$$

Daher ist $(V_z)_{z \in Z} \cup \{X \setminus Z\}$ eine offene Überdeckung von X . Sei $(V_i)_{i \in I} \cup \{X \setminus Z\}$ eine lokal-endliche Verfeinerung. Da diese

Überdeckung lokal-endlich ist, gilt

$$\overline{\bigcup_{i \in I} V_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{V_i}.$$

Sei $V = \bigcup_{i \in I} V_i$. Dann ist V offen und

$$Z \subset V \subset \overline{V} = \bigcup_i \overline{V_i} \subset U.$$

Für (b) sei $(U_i)_{i \in I}$ eine lokal-endliche Überdeckung. Sei S die Menge aller Familien offener Mengen $(V_i)_{i \in J}$, wobei $J \subset I$ und $\overline{V_i} \subset U_i$, so dass $(V_i)_{i \in J} \cup (U_i)_{i \in I \setminus J}$ eine Überdeckung von X ist. Wir ordnen S partiell durch

$$(V_i)_{i \in J} \leq (\tilde{V}_i)_{i \in \tilde{J}} \Leftrightarrow J \subset \tilde{J}, V_i = \tilde{V}_i \quad \forall i \in J.$$

Nach Zorns Lemma gibt es ein maximales Element $(V_i)_{i \in J}$. Wir behaupten, dass $J = I$. **Angenommen**, dies ist nicht der Fall. Sei $i_0 \in I \setminus J$ und sei

$$Z = X \setminus \left(\bigcup_{i \in J} V_i \cup \bigcup_{\substack{i \neq i_0 \\ i \in I \setminus J}} U_i \right)$$

Dann ist Z abgeschlossen und da die V_i und U_i eine Überdeckung sind, erhalten wir $Z \subset U_{i_0}$. Nach (a) gibt es eine offene Menge $V_{i_0} \subset X$ mit $Z \subset V_{i_0} \subset \overline{V_{i_0}} \subset U_{i_0}$. Deshalb kann J um i_0 vergrößert werden und die Familie war nicht maximal, **Widerspruch!** □

Definition 5.4.2. Sei X ein parakompakter Hausdorff-Raum. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Ein Tupel (U_0, \dots, U_k) von Mengen in der Überdeckung heisst ein **Cech- k -Simplex** oder in diesem Abschnitt einfach ein k -Simplex, falls

$$|\sigma| := U_0 \cup \dots \cup U_k \neq \emptyset.$$

Die offene Menge $|\sigma|$ heißt **Träger** von σ . Die i -te **Seite** eines k -Simplex σ ist der $k - 1$ -Simplex

$$\sigma^i = (U_0, \dots, \widehat{U_i}, \dots, U_k).$$

Sei \mathcal{F} eine Garbe über X und sei $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ die Menge aller Abbildungen f , die einem k -Simplex σ ein Element der Menge $\mathcal{F}(|\sigma|)$ zuordnen. Beachte, dass $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$. Die Elemente von $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ werden k -Coketten genannt. Definiere

$$d : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

durch

$$df(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i f(\sigma^i)|_{|\sigma|}.$$

Es gilt $d^2 = 0$, also erhält man einen Cokettenkomplex, dessen Kohomologie man in der Form $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ schreibt. Ein Garbenhomomorphismus $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induziert einen Morphismus von Komplexen $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ und so einen Morphismus $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. Deshalb ist $\check{H}^k(\mathcal{U}, \cdot)$ ein Funktor von der Kategorie der Garben über X zur Kategorie der abelschen Gruppen.

Ein Element f von $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ bildet ein U_i auf einen Schnitt $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ ab. Ist $df = 0$, dann gilt

$$0 = df(U_i, U_j) = f(U_j)|_{U_i \cap U_j} - f(U_i)|_{U_i \cap U_j},$$

und $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, woraus folgt, dass $f(U_i) = s|_{U_i}$ für einen eindeutig bestimmten Schnitt $s \in \mathcal{F}(X)$. Umgekehrt gibt jeder globale Schnitt s eine Abbildung f wie oben indem man $f(U_i) = s|_{U_i}$ setzt. So entsteht ein Isomorphismus

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^0(\mathcal{F}, X).$$

Sei \mathcal{V} eine Verfeinerung der Überdeckung \mathcal{U} . Dann gibt es eine Abbildung $\mu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, so dass $V \subset \mu(V)$ für jedes $V \in \mathcal{V}$. Wir nennen eine solche Abbildung eine **Verfeinerungsabbildung**. Ist $\sigma = (V_0, \dots, V_k)$ ein k -Simplex der Überdeckung \mathcal{V} , dann ist $\mu(\sigma) = (\mu(V_0), \dots, \mu(V_k))$ ein k -Simplex der Überdeckung \mathcal{U} . So wird eine Kokettenabbildung $\mu_k^\# : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^k(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ induziert, gegeben durch

$$\mu_k^\#(f)(\sigma) = f(\mu(\sigma))|_{|\sigma|}$$

und damit ein Homomorphismus

$$\mu_k^* : \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^k(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

Wir müssen zeigen, dass diese Abbildung auf der Kohomologie nicht von der Wahl der Verfeinerungsabbildung abhängt.

Lemma 5.4.3. *Sei $\tau : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ eine andere Verfeinerungsabbildung. Dann gilt*

$$\tau_k^* = \mu_k^*.$$

Beweis. Wir konstruieren eine Homotopie. Sei $\sigma = (V_0, \dots, V_{k-1})$ ein $(k-1)$ -Simplex. Setze

$$\tilde{\sigma}_j = (\mu(V_0), \dots, \mu(V_j), \tau(V_j), \dots, \tau(V_{k-1})).$$

Definiere $P^k : C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{k-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ durch

$$P^k(f)(\sigma) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j f(\tilde{\sigma}_j)|_{|\sigma|}.$$

Wir wollen zeigen:

$$\tau^\# - \mu^\# = dP + Pd.$$

Für $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ und $\sigma = (V_0, \dots, V_k)$ rechnen wir:

$$\begin{aligned} dP(f)(\sigma) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i P(f)(V_0, \dots, \widehat{V_i}, \dots, V_k) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} f(\mu(V_0), \dots, \mu(V_j), \tau(V_j), \dots, \widehat{\tau(V_i)}, \dots, \tau(V_k))|_{|\sigma|} \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^{i+j+1} f(\mu(V_0), \dots, \widehat{\mu(V_i)}, \dots, \mu(V_j), \tau(V_j), \dots, \tau(V_k))|_{|\sigma|} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Pd(f)(\sigma) &= \sum_{j=0}^k (-1)^j df(\tilde{\sigma}_j)|_{|\sigma|} \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j df(\mu(V_0), \dots, \mu(V_j), \tau(V_j), \dots, \tau(V_k))|_{|\sigma|} \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f(\mu(V_0), \dots, \widehat{\mu(V_i)}, \dots, \mu(V_j), \tau(V_j), \dots, \tau(V_k))|_{|\sigma|} \\ &\quad + \sum_{i > j} (-1)^{i+j+1} f(\mu(V_0), \dots, \mu(V_j), \tau(V_j), \dots, \widehat{\tau(V_i)}, \dots, \tau(V_k))|_{|\sigma|} \\ &\quad + \sum_{j=0}^k f(\mu(V_0), \dots, \mu(V_{j-1}), \tau(V_j), \dots, \tau(V_k))|_{|\sigma|} \\ &\quad - \sum_{j=0}^k f(\mu(V_0), \dots, \mu(V_j), \tau(V_{j+1}), \dots, \tau(V_k))|_{|\sigma|}. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Zeilen in dem letzten Ausdruck sind gleich $-dP(f)(\sigma)$,

heben sich also in $dP + Pd$ auf. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 & (dP + Pd)(f)(\sigma) \\
 & + \sum_{j=0}^k f(\mu_0(V_0), \dots, \mu(V_{j-1}), \tau(V_j), \dots, \tau(V_k))|_{|\sigma|} \\
 & - \sum_{j=0}^k f(\mu_0(V_0), \dots, \mu(V_j), \tau(V_{j+1}), \dots, \tau(V_k))|_{|\sigma|} \\
 & = f(\tau(V_0), \dots, \tau(V_k))|_{|\sigma|} - f(\mu(V_0), \dots, \mu(V_k))|_{|\sigma|} \\
 & = (\tau^\# - \mu^\#)(f)(\sigma).
 \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass der Homomorphismus von Komplexen $\mu^\# - \tau^\#$ nullhomotop ist und daher stimmen μ_* und τ_* auf der Kohomologie überein. \square

Für zwei offene Überdeckungen \mathcal{U} und \mathcal{V} schreiben wir $\mathcal{U} < \mathcal{V}$, falls \mathcal{V} eine Verfeinerung von \mathcal{U} ist. Die Menge aller offenen Überdeckungen wird so eine gerichtete Menge.

Ist $\mathcal{U} < \mathcal{V}$, dann haben wir gezeigt, dass es einen kanonischen Homomorphismus $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^k(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ gibt. Die abelschen Gruppen $(\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}))_{\mathcal{U}}$ bilden damit ein gerichtetes System. Wir definieren

$$\check{H}^k(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$