**Lineare Algebra 2**
Sommer 2025
Professor Deitmar

# Klausurvorbereitungsblatt

1. Sei $G$ eine endliche Gruppe und sei $x \in G$.
   (a) Was ist die Ordnung von $G$?
   (b) Was ist die Ordnung von $x$ und welche Beziehung besteht zwischen den beiden?
   (c) Was ist ein Ideal eines Rings?
   (d) Was ist ein Hauptidealring?

2. Bestimme die Elementarteiler ueber $R = \mathbb{Z}$ der Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
   (Als Probe kann man die Determinante ausrechenen.)

3. Gib alle Untermoduln des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ an. Was ist die Länge dieses Moduls?

4. Sei $V = \left\{ f \in K[x] : \deg f \leq 3 \right\}$ und sei $\alpha \in V^*$ gegeben durch
$$\alpha(f) = f(0) + f(1).$$
   Schreibe $\alpha$ als Linearkombination der zu $1, x, x^2, x^3$ dualen Basis.

5. Bestimme die Dimension des von allen Matrizen der Form $A \otimes B$, $A, B \in \mathrm{M}_2(K)$ aufgespannten Teilraums von $\mathrm{M}_4(K)$.

6. (a) Zeige, dass jeder endliche Integritaetsring ein Körper ist.
   (Betrachte die Abbildung $R \to aR$.)
   (b) Sei $R$ ein Integritaetsring, in dem jedes Ideal $I \neq R$ nur endlich viele Elemente enthaelt. Zeige, dass $R$ ein Körper ist.

7. Zeige, dass eine Gruppe $G$ genau dann abelsch ist, wenn $\alpha : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

8. Zeige, dass jede endlich-erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ zyklisch ist.

9. Ein Element $a$ eines Rings $R$ heisst *nilpotent*, falls $a^n = 0$ fuer ein $n \in \mathbb{N}$. Zeige: ist $a$ nilpotent, dann ist $1 - a$ eine Einheit.

10. Zeige, dass fuer jeden $\mathbb{C}[X]$-Modul $V$, der als $\mathbb{C}$-Vektorraum endliche Dimension hat, gilt
$$\ell_{\mathbb{C}[X]}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(V).$$

**Lineare Algebra 2** Blatt **12**
Sommer 2025
Professor Deitmar Abgabe: **14.7.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $V$ ein Vektorraum und $a \in \bigwedge^k V$, $b \in \bigwedge^l V$. Zeige:
$$a \wedge b = (-1)^{kl} b \wedge a$$
in $\bigwedge^{k+l} V$.

2. Sei $K = \mathbb{R}$ und $\mathcal{H}$ die Quaternionen-Algebra. Zeige
$$\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{C}),$$
wobei der Isomorphismus ein Algebrenisomorphismus ist.

3. Sei $V$ ein Vektorraum und $v_1, \dots, v_m \in V$. Zeige, dass $v_1, \dots, v_m$ genau dann linear unabhängig sind, wenn
$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \neq 0.$$

4. Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Zeige:
$$A \text{ diagonalisierbar} \quad \Rightarrow \quad \bigwedge^k A \text{ diagonalisierbar}, \forall k \in \mathbb{N}.$$
Was sind die Eigenwerte?

**Lineare Algebra 2** Blatt **11**
Sommer 2025
Professor Deitmar Abgabe: **7.7.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zeige, dass es genau zwei Familien natürlicher Isomorphismen $\tau_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ mit $\tau_{W,V} \circ \tau_{V,W} = \mathrm{Id}$ gibt. Hierbei laufen $V$ und $W$ durch alle $K$-Vektorräume. Natürlich heißt, dass für je zwei lineare Abbildungen $f : V \to V'$, $g : W \to W'$ das Diagramm
$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[r, "\tau_{V,W}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & W \otimes V \arrow[d, "g\otimes f"] \\ V' \otimes W' \arrow[r, "\tau_{V',W'}"] & W' \otimes V' \end{tikzcd}$$
kommutiert.

2. Zeige, dass es zu jeder Lie-Algebra $L$ eine lineare Abbildung $\phi : L \to A_L$ in eine assoziative Algebra $A_L$ gibt mit der Eigenschaft
$$\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]_A := \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x) \tag{$*$}$$
und dass für jede andere lineare Abbildung $f : L \to B$ in eine assoziative Algebra $B$ mit der Eigenschaft $(*)$ genau ein Algebrenhomomorphismus $\eta : A_L \to B$ existiert, der das Diagramm
$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & & A_L \arrow[dl, dotted, "\exists!\ \eta"] \\ & B & \end{tikzcd}$$
kommutativ macht. (Hinweis: definiere $A_L$ als Quotienten der tensoriellen Algebra.)

3. Sind $A, B$ Algebren über $K$, dann wird $A \otimes B$ eine Algebra durch
$$\big(a \otimes b\big)\big(c \otimes d\big) = ac \otimes bd.$$
Zeige: Die Abbildungen
$$\begin{aligned} f &: A \to A \otimes B, && a \mapsto a \otimes 1 \text{ und} \\ g &: B \to A \otimes B, && b \mapsto 1 \otimes b \end{aligned}$$
sind universelle Algebrenhomomorphismen in dem Sinne, dass für je zwei Algebrenhomomorphismen $\alpha : A \to Z$ und $\beta : B \to Z$ genau ein Algebrenhomomorphismus $A \otimes B \xrightarrow{\theta} Z$ existiert mit
$$\alpha = \theta \circ f, \quad \text{und} \quad \beta = \theta \circ g.$$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & A \otimes B \arrow[d, dotted, "\exists!\theta"'] & B \arrow[l, "g"'] \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

4. Sei $G$ eine Gruppe. Dann wird $K[G]$ eine Algebra, die *Gruppenalgebra* durch
$$[g][h] := [gh].$$
Formuliere und beweise die universelle Eigenschaft von $K[G]$.

| | |
|---|---|
| **Lineare Algebra 2** | Blatt **10** |
| Sommer 2025 | |
| Professor Deitmar | Abgabe: **30.6.2025, 10:00** |

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $V$ endlich-dimensional und $\psi : V^* \otimes V \to \mathrm{Lin}(V, V)$ der kanonische Isomorphismus.
   Zeige: $X \in V^* \otimes V$ ist genau dann ein reiner Tensor, wenn $\mathrm{Rang}(\psi(X)) \le 1$ ist.

2. Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 1 sei
   $$S : V^* \otimes V \to K$$
   linear, definiert durch
   $$S(\alpha \otimes v) = \alpha(v).$$
   Zeige: $S = \mathrm{tr} \circ \psi$.

3. Seien $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$.
   (a) Bestimme Bild und Kern von $A \otimes B$.
   (b) Die Jordan-Normalformen von $A$ und $B$ seien bekannt. Bestimme die Eigenwerte und die Jordan-Normalform von $A \otimes B$.

4. Zeige: Fuer je zwei Mengen $S, T$ gibt es einen linearen Isomorphismus
   $$\phi_{S,T} : K[S \times T] \xrightarrow{\cong} K[S] \otimes K[T]$$
   mit der folgenden Eigenschaft: Sind $f : S \to S'$ und $g : T \to T'$ Abbildungen, dann kommutiert das Diagramm
   $$\begin{tikzcd} K[S \times T] \arrow[r, "\phi_{S,T}"] \arrow[d, "f\times g"'] & K[S] \otimes K[T] \arrow[d, "f\otimes g"] \\ K[S' \times T'] \arrow[r, "\phi_{S',T'}"] & K[S'] \otimes K[T']. \end{tikzcd}$$
   Ist $(\psi_{S,T})$ eine zweite Familie von Abbildungen mit dieser Eigenschaft, dann gibt es ein $\lambda \in K^\times$ mit $\psi_{S,T} = \lambda \phi_{S,T}$.

| | |
|---|---|
| **Lineare Algebra 2** | Blatt **9** |
| Sommer 2025 | |
| Professor Deitmar | Abgabe: **23.6.2025, 10:00** |

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $R$ ein Ring. Für eine Menge $S$ sei $R[S]$ der freie Modul erzeugt von $S$. Schreibe die Basiselemente in der Form $[s]$, $s \in S$. Für gegebene Moduln $M, N$ sei $U \subset R[M \times N]$ der Untermodul erzeugt von allen Elementen der Form

$$[(m+m',n)] - [(m,n)] - [(m',n)], \qquad [(m,n+n')] - [(m,n)] - [(m,n')],$$
$$[(\lambda m,n)] - \lambda[(m,n)] \qquad [(m,\lambda n)] - \lambda[(m,n)].$$

Definiere

$$M \otimes_R N := R[M \times N]/U.$$

Zeige, dass die $R$-Bilinearform $b_0 : M \times N \to M \otimes N$ genau dieselbe universelle Eigenschaft besitzt wie im Körperfall. Zeige, dass für jede endliche abelsche Gruppe $A$ gilt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A = 0$.

2. Eine *Lie-Algebra* ist ein Paar $(L, [.,.])$ bestehend aus einem $K$-Vektorraum $L$ und einer bilinearen Abbildung

$$[.,.] : L \times L \to L,$$

so dass für ale $a, b, c \in L$ gilt

(i) für jedes $a \in L$ gilt $[a, a] = 0$, (alternierend)

(ii) $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$. (Jacobi-Identität)

Eine Lie-Algebra $L$ heißt *abelsch*, falls für alle $a, b \in L$ gilt $[a, b] = 0$. Zeige:

(a) Sei $L$ ein zweidimensionaler Raum mit Basis $e, f$. Dann gibt es genau eine alternierende Bilinearform $[.,.]$ mit $[e, f] = f$ und diese macht $L$ zu einer Lie-Algebra.

(b) Zeige, dass jede 2-dimensionale Lie-Algebra entweder abelsch ist oder isomorph zu der in Teil (a) gegebenen.

3. Sei $A$ eine $K$-Algebra.

(a) Definiere

$$[a, b] = ab - ba$$

$a, b \in A$. Zeige, dass $(A, [.,.])$ eine Lie-Algebra ist.

(b) Eine *Derivation* auf $A$ ist eine lineare Abbildung $X : A \to A$ mit der Eigenschaft

$$X(ab) = X(a)b + aX(b).$$

Zeige: Sind $X, Y$ Derivationen, dann ist auch $[X, Y] = XY - YX$ eine Derivation. Die Derivationen bilden also eine Lie-Unteralgebra der $K$-Algebra $\mathrm{End}(A)$.

4. Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei $C^\infty(U)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$. Ein *Differentialoperator* auf $C^\infty(U)$ ist eine Abbildung $D : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ der Form

$$D(f)(x) = \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{N} a_{k_1,\dots,k_n}(x)\, \frac{\partial}{\partial x_1^{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n^{k_n}} f(x)$$

Mit glatten Funktionen $a_{k_1,\dots,k_n}(x)$. Zeige, dass ein Differentialoperator $D$ genau dann eine Derivation ist, wenn er nur erste Ableitungen enthält, also von der Form $\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ ist. Einen solchen Operator nennt man *Vektorfeld*.

**Lineare Algebra 2** Blatt **8**
Sommer 2025
Professor Deitmar Abgabe: **16.6.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Basen des endlich dimensionalen Vektorraums $V$. Sei $A$ die Basiswechselmatrix $M^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}$. Seien $\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*$ die dualen Basen von $V^*$.

   Zeige: $M^{\mathfrak{a}^*}_{\mathfrak{b}^*} = \left(A^t\right)^{-1}$.

2. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des Vektorraums $V$ und sei $T : V \to V$ linear. Zeige:

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_i v_i^*(Tv_i).$$

3. Zeige, dass die kanonische Abbildung $\delta : V \to V^{**}$ fuer einen unendlich-dimensionalen Vektorraum kein Isomorphismus zu sein braucht.

4. Eine Sequenz von linearen Abbildungen

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

   heißt *exakt*, falls $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$. Zeige, dass in diesem Fall die induzierte Sequenz

$$W^* \to V^* \to U^*$$

   ebenfalls exakt ist.

**Lineare Algebra 2** Blatt **7**
Sommer 2025
Professor Deitmar Abgabe: **2.6.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Bestimme die Laenge von $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

2. Sei $R$ ein Ring, $M$ ein $R$-Modul und $S \subset M$ eine Teilmenge. Zeige dass der *Annullator*
$$\mathrm{Ann}(S) = \left\{ x \in R : xs = 0 \ \forall_{s \in S} \right\}$$
ein Ideal in $R$ ist. Zeige weiter, dass mit $m_0 \in M$ und $I = \mathrm{Ann}(m_0)$ git Abbildung die Abbildung
$$\begin{aligned} R/I &\to Rm_0, \\ x + I &\mapsto xm_0 \end{aligned}$$
wohldefiniert und eine $R$-lineare Bijektion ist.

3. Sei $R$ ein Ring und $V$ ein endlich-erzeugter $R$-Modul. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ gelte $\mathfrak{m}V = V$. Zeige, dass $V = 0$ ist.
(Hinweis: Induktion nach der Anzahl der Erzeuger.)

4. Seien $U \subset V$ Moduln ueber einem Ring $R$. Zeige: Sind $U$ und $V/U$ endlich-erzeugt, so ist auch $V$ endlich-erzeugt.

**Lineare Algebra 2** Blatt **6**
Sommer 2025
Professor Deitmar Abgabe: **26.5.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. (a) Sei $R$ ein Integritaetsring. Welche Eigenschaft von $R$ ist dazu äquivalent, dass $R[x]$ ein Hauptidealring ist?
   (b) Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Zeige dass $R \times R$ mit $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ und
   $$(a, b)(c, d) = (ac, ad + bc)$$
   ein kommutativer Ring mit Eins wird.
   (c) Sei $R$ ein Integritaetsring, $f \in R \setminus \{0\}$ und sei $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. Zeige dass es einen kanonischen Isomorphismus
   $$R[x]/(fx - 1)R[x] \xrightarrow{\cong} S^{-1}R$$
   gibt.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige dass jeder $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $\phi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ sich in eindeutiger Weise zu einem $\mathbb{Q}$-Vektorraumhomomorphismus $\mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$ fortsetzen laesst und dass die darstellende Matrix bezueglich der Standardbasis von $\mathbb{Q}^n$ ganzzahlig, d.h. in $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ ist. Zeige, dass auf diese Weise eine Bijektionen
   $$\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}), \quad \text{und} \quad \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$
   entstehen.

3. (a) Definiere die Begriffe Kern, Cokern und exakte Sequenz fuer Modulhomomorphismen.
   (b) Sei $M$ ein $R$-Modul und seien $P, Q \subset M$ Untermoduln. Zeige dass die Sequenz
   $$0 \to P \cap Q \xrightarrow{\alpha} P \times Q \xrightarrow{\beta} P + Q \to 0$$
   exakt ist, wobei $\alpha(x) = (x, x)$ und $\beta(x, y) = x - y$.

4. Seien $P, Q$ Untermoduln einer $R$-Moduls $M$. Zeige dass die Abbildung $P \to P + Q \to (P + Q)/Q$ einen Isomorphismus
   $$P/P \cap Q \xrightarrow{\cong} (P + Q)/Q$$
   induziert.

**Lineare Algebra 2** Blatt **5**
Sommer 2025
Professor Deitmar Abgabe: **19.5.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $G$ eine Gruppe und $K$ ein Körper. Sei $R = K[G]$ die Menge aller Abbildungen $f : G \to K$ die endlichen Traeger haben, d.h.

$$R = \{f : G \to K : f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in G\}.$$

Zeige, dass $R$ mit dem *Faltungsprodukt*

$$f * g(x) = \sum_{y \in G} f(y) g(y^{-1}x) = \sum_{ab=x} f(a)g(b)$$

ein (i.A. nichtkommutativer) Ring ist. Man nennt $K[G]$ auch den *Gruppenring* oder die *Gruppenalgebra*. Für $g \in G$ sei $\delta_g \in R$ gegeben durch

$$\delta_g(x) = \begin{cases} 1 & x = g, \\ 0 & x \neq g. \end{cases}$$

Zeige, dass $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$ und dass $K[G]$ genau dann kommutativ ist, wenn $G$ eine abelsche Gruppe ist.

2. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ Ideale in dem Ring $R$. Zeige, dass die folgenden Mengen ebenfalls Ideale sind:

   (a) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \left\{a + b : a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}\right\}$,

   (b) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \left\{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j : a_j \in \mathfrak{a},\ b_j \in \mathfrak{b}\right\}$,

   (c) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

3. Sei $K$ ein Koerper. Zeige, dass $K[x, y]$ kein Hauptidealring ist.

4. Sei $\phi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Sind Urbilder von Idealen wieder Ideale? Sind Urbilder von Primidealen wieder Primideale? Sind Urbilder von maximalen Idealen wieder maximale Ideale?

**Lineare Algebra 2** Blatt **4**
Sommer 2025
Professor Deitmar Abgabe: **12.5.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $\varepsilon = e^{\pi i/3}$. Dann gilt $\varepsilon^6 = 1$, sowie $\overline{\varepsilon} = 1 - \varepsilon$, also $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$. Sei $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ der von $\varepsilon$ erzeugte Unterring von $\mathbb{C}$. Zeige
$$\mathbb{Z}[\varepsilon] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\varepsilon.$$

2. Zeige, dass die Einheiten des Rings $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ genau die Potenzen von $\varepsilon$ sind.
(Hinweis: Zeige, dass $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ keine Elemente $z$ mit $0 < |z| < 1$ enthaelt.)

3. Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und sei $T : V \to V$ linear. Zeige, dass die Abbildung $\phi_T : K[x] \to \mathrm{End}(V)$ ein Homomorphismus in den nichtkommutativen (!) Ring $\mathrm{End}(V)$ ist. Zeige, dass der Kern gleich der Menge $m(x)K[x]$ ist, wobei $m(x)$ das Minimalpolynom von $T$ ist.

4. Sei $R$ ein Ring. Zeige, dass $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ in dem Ring $R[[x]]$ genau dann eine Einheit ist, wenn $a_0$ in $R^\times$ liegt.

**Lineare Algebra 2** Blatt **3**
Sommer 2025
Professor Deitmar Abgabe: **5.5.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Ein Element $a$ eines Rings $R$ heisst *nilpotent*, falls $a^n = 0$ fuer ein $n \in \mathbb{N}$. Zeige: ist $a$ nilpotent, dann ist $1 - a$ eine Einheit.

2. (a) Zeige, dass die Polynommultiplikation assoziativ ist, d.h. dass fuer drei Polynome $f, g, h \in K[X]$ gilt
$$(fg)h = f(gh).$$
   (b) Zeige, dass der Ring $\mathbb{Z}/m$ genau dann ein Koerper ist, wenn $m$ eine Primzahl ist.

3. Sei $R$ ein Ring und $M \neq \emptyset$ eine Menge. Zeige, dass die Menge aller Abbildungen $f : M \to R$ ein Ring wird mit den punktweisen Verknuepfungen. Was sind die Einheiten dieses Rings?

4. Sei $M$ eine nichtleere Menge und sei $R = \mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge. Zeige, dass $R$ mit den Verknuepfungen
$$A + B = A \Delta B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$$
und
$$A \cdot B = A \cap B$$
ein Ring ist. Zeige, dass $M$ die einzige Einheit ist.

**Lineare Algebra 2** Blatt **2**
Sommer 2025
Professor Deitmar Abgabe: **28.4.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Beweise oder widerlege:
   (a) Es gibt einen Gruppenisomorphismus $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \times)$,
   (b) Es gibt einen Gruppenisomorphismus $(\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}_{>0}, \times)$.

2. Sei $A$ eine endliche abelsche Gruppe. Zeige

$$\prod_{a \in A} a^2 = 1.$$

3. Sei $G$ eine Gruppe der Ordnung 55, die auf einer Menge $X$ mit 18 Elementen operiere. Zeige, dass es mindestens zwei Fixpunkte gibt. Ein Fixpunkt ist ein Punkt $x \in X$ mit $gx = x$ für jedes $g \in G$.

4. Beweise oder widerlege: Sind $A, B$ Untergruppen von $G$ und gilt $G = A \cup B$, dann ist $A \subset B$ oder $B \subset A$.

**Lineare Algebra 2** Blatt **1**
Sommer 2025
Professor Deitmar Abgabe: **22.4.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $G$ eine Gruppe, so dass fuer jedes $a \in G$ gilt $a^2 = 1$. Zeige, dass $G$ abelsch ist.
2. Ein *Homomorphismus* von Gruppen ist eine Abbildung $\phi : G \to H$ zwischen Gruppen, so dass $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ gilt. Ein *Isomorphismus* von Gruppen ist ein Homomorphismus, der bijektiv ist. Zeige:
   (a) Ist $\phi$ ein Homomorphismus, dann gilt $\phi(1) = 1$ und $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$ fuer jedes $a \in G$.
   (b) Ist $\phi$ ein Isomorphismus, dann ist die Umkehrabbildung ebenfalls ein Homomorphismus.
3. Seien $e_1, \dots, e_n$ die Standard Basis von $K^n$ und betrachte die Bilinearform $b(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$. Linearformen auf $K^n$ werden als Zeilenvektoren aufgefasst. Sei $v_1, \dots, v_n$ irgendeine Basis und sei $S$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \dots, v_n$. Zeige, dass $v_1^*, \dots, v_n^*$ die Zeilen der Matrix $S^{-1}$ sind.
4. Sei
$$0 \to V_0 \to \cdots \to V_n \to 0$$
eine exakte Sequenz von endlich-dimensionalen Vektorraeumen. Zeige, dass
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \dim(V_j) = 0.$$