

Klausurvorbereitung

1. (a) Was ist eine Sylowgruppe?
(b) Was ist ein Primelement eines Rings und was ist ein irreduzibles Element und welche Eigenschaft impliziert welche in einem integralen Ring?
(c) Was ist ein Quotientenkörper, was hat sowas und inwiefern ist es eindeutig definiert?
(d) Wann heisst eine Körpererweiterung separabel und wann normal?
(e) Was ist der n -te Kreisteilungskörper und wie berechnet man seinen Grad über $\mathbb{Q}$?
2. Rechnungen mit Begründung
 - (a) Berechne die Grade der folgenden Körpererweiterungen:
 - (i) $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{40})/\mathbb{Q}$,
 - (ii) $\mathbb{Q}(e^{\pi i/4})/\mathbb{Q}(i)$.
 - (b) Welche der folgenden Körpererweiterungen sind galoisch?
 - (i) $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5})/\mathbb{Q}$,
 - (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}, e^{\pi i/3})/\mathbb{Q}$,
 - (iii) $\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q}(t^2)$, wobei t transzendent über $\mathbb{Q}$ ist,
 - (iv) $\mathbb{F}_p(t)/\mathbb{F}_p(t^p)$, t transzendent über $\mathbb{F}_p$.
3. Zeige, dass jede endlich-erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ zyklisch ist. (Es darf benutzt werden, dass eine Untergruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch ist.)
4. Sei R ein Integritätsring, in dem jedes Ideal $I \neq R$ nur endlich viele Elemente enthält. Zeige, dass R ein Körper ist. (Hinweis: Sei $a \in R \setminus \{0\}$. Dann ist $R \mapsto aR$ injektiv.)
5. Seien p, q zwei verschiedene Primzahlen und R ein kommutativer Ring mit Eins, der pq Elemente hat. Zeige, dass $R \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_q$. (Hinweis: Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow R$.)

Algebra

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Blatt 12

Abgabe: 15.7.2026 12:00

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Zeige, dass in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen beide kuerzeren Seitenlaengen verschiedene rationale Zahlen sind, die beiden von $\pi/2$ verschiedenen Winkel nicht in $\pi\mathbb{Q}$ liegen.
(Hinweis: Wir koennen das Dreieck so drehen und verschieben, dass die Ecken in $\mathbb{C}$ gleich $0, a, a + bi$ mit $0 < a < b$ in $\mathbb{Q}$. Es gilt dann $a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} e^{2\pi i r}$ fuer ein $0 < r < \frac{\pi}{2}$ und wir muessen zeigen, dass $r \notin \mathbb{Q}$.)
2. (a) Zeige algebraisch, dass ein gleichseitiges Dreieck mit Flaecheninhalt 1 konstruierbar ist.
(b) Gib eine geometrische Konstruktion an. (Nicht ganz enrst gemeint)
3. Zeige, dass es auf dem Einheitskreis unendlich viele konstruierbare Punkte gibt.
4. Entscheide fuer jedes $3 \leq n \leq 16$, ob das regelmaessige n -Eck konstruierbar ist.

Algebra

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Blatt 11

Abgabe: 8.7.2026 12:00

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $K/\mathbb{Q}$ endlich. Zeige, dass K nur endlich viele Einheitswurzeln enthaelt.
(Hinweis: Eulers ϕ .)
2. Sei ϕ die Eulersche ϕ -Funktion.
 - (a) Zeige, dass $\phi(m)\phi(n) \leq \phi(mn)$ fuer alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt und dass Gleichheit genau dann gilt, wenn m und n teilerfremd sind.
 - (b) Zeige, dass $\phi(n) = 1 \Rightarrow n = 1, 2$.
3. Sei $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ die kanonische primitive n -te Einheitswurzel und sei $K = \mathbb{Q}(\varepsilon)$ der entsprechende Kreisteilungskoeper. Sei $\zeta \in K$ eine Einheitswurzel beliebiger Ordnung. Zeige, dass ζ^2 eine Potenz von ε ist.
4. Sei p eine Primzahl und sei ε eine primitive p -te Einheitswurzel. Zeige:
 - (a) Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}$ ist zyklisch.
 - (b) Es sei $p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$, $k_j \in \mathbb{N}$ die Primfaktorzerlegung von $p - 1$. Wie laesst sich die Anzahl der Zwischenkoeper $\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Z}/\mathbb{Q}$ durch die p_j und k_j ausdruecken?

Algebra

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Blatt 10

Abgabe: 1.7.2026 12:00

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Bestimme die Galoisgruppe Γ von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$. Gib alle Untergruppen von Γ und alle Zwischenkoerper an.
2. Eine endliche Galois-Erweiterung L/K heisst *abelsch*, falls die Galois-Gruppe $\text{Gal}(L/K)$ abelsch ist. Sei $f \in K[x]$ ein separables irreduzibles Polynom und sei L der Zerfaellungskoeper. Zeige: Ist L/K abelsch, dann ist $L = K(\alpha)$ fuer jede Nullstelle $\alpha \in L$ von f .
3. Sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung mit Gruppe G . Seien Γ, Σ Untergruppen und E, F ihre Fixkoerper. Zeige, dass die Erweiterung L/EF galoisch ist und druecke die Galois-Gruppe durch Γ und Σ aus.
4. Eine Galois-Erweiterung L/K heisst *zyklisch*, falls die Galois-Gruppe $\text{Gal}(L/K)$ zyklisch ist. Sei Ω ein algebraisch abgeschlossener Koeper und sei $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ ein Automorphismus. Sei $K = \Omega^\sigma$ der Fixkoerper von σ . Zeige, dass jede endliche Erweiterung von K eine zyklische Galois-Erweiterung ist.

Algebra

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Blatt 9

Abgabe: 24.6.2026 12:00

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Eine Zahl $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ heisst *total reell*, falls $\sigma(\alpha) \in \mathbb{R}$ fuer jede Einbettung $\sigma : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt.
Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ total reell. Es gebe ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ vom Grad 2 ist und $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$ gilt.
2. Sei K ein Koerper. Sei L/K eine algebraische Koerpererweiterung. Sei L^{sep} die Menge aller separablen Elemente in L .
Zeige, dass L^{sep} ein Zwischenkoerper ist und dass L^{sep}/K eine separable Erweiterung ist. Zeige ferner, dass L/L^{sep} eine *rein inseparable* Erweiterung ist, d.h., kein Element von $L \setminus L^{\text{sep}}$ ist separabel ueber L^{sep} .
3. Sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung mit Gruppe G . Seien H_1, H_2 Untergruppen und F_1, F_2 ihre Fixkoerper. Zeige, dass fuer $\sigma \in G$ gilt
$$\sigma(F_1) = F_2 \quad \Leftrightarrow \quad H_2 = \sigma H_1 \sigma^{-1}.$$
4. Zeige, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$ galoisch ist und bestimme die Struktur der Galois-Gruppe.
(Hinweis: Die Galois-Gruppe permutiert die Nullstellen von $f(x) = x^4 - 2$.)

Algebra

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Blatt 8

Abgabe: 17.6.2026 12:00

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Zeige, dass es keinen Ringhomomorphismus von $\mathbb{Q}(i)$ nach $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gibt.
2. Sei L/K eine Körpererweiterung, deren Grad eine Primzahl p ist. Zeige, dass $L = K(\alpha)$ für jedes $\alpha \in L \setminus K$.
3. Sei L/K eine algebraische Erweiterung so dass jedes $f \in K[x]$ über L in Linearfaktoren zerfällt. Zeige dass L ein algebraischer Abschluss von K ist.
4. Sei L/K eine algebraische Erweiterung und M ein Zwischenkörper.
Dann gilt

$$L/K \text{ normal} \Rightarrow L/M \text{ normal}.$$

Algebra

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Abgabe: 10.6.2026 12:00

Blatt 7

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. (a) Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Gibt es eine Körpererweiterung von Grad n ?
- (b) Seien K ein Körper, R/K eine Ringerweiterung von endlichem Grad. Zeige: ist R integer, dann ist R ein Körper.
2. Seien $f, g \in K[x]$ normierte Polynome über einem Körper K und sei $n \in \mathbb{N}$, so dass $f^n = g^n$. Zeige, dass $f = h$.
3. Für ein Polynom $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ sei

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

die formale Ableitung. Sei $f \in K[x]$ irreduzibel und sei L/K eine Körpererweiterung, die eine Nullstelle α von f enthält. Zeige:

$$f'(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f' = 0.$$

4. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
 - (a) Jede aufsteigende Folge $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ von Idealen wird stationär, d.h., es gibt ein j_0 mit $I_j = I_{j_0}$ für jedes $j \geq j_0$.
 - (b) Jede nichtleere Menge M von Idealen enthält ein maximales Element.
 - (c) Jedes Ideal ist endlich erzeugt.

Einen Ring, der diese Eigenschaft hat, nennt man einen *noetherschen Ring*. Hauptidealringe sind zB noethersch.

Algebra

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Blatt 6

Abgabe: 3.6.2026 12:00

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal mit der Eigenschaft $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I^k = \{0\}$. Wir schreiben $I^0 = R$. Für $x \neq y$ in R sei

$$v(x, y) := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : x - y \in I^k\}.$$

Zeige, dass

$$d(x, y) := \begin{cases} e^{-v(x, y)} & x \neq y, \\ 0 & x = y, \end{cases}$$

eine Metrik auf R definiert. Zeige, dass diese Metrik sogar die *starke Dreiecksungleichung* erfüllt:

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y)), \quad x, y, z \in R.$$

Folgere, dass jeder Punkt eines Balls $B_r(a) = \{x \in R : d(x, a) < r\}$, $a \in R$, $r > 0$ ein Mittelpunkt ist. (Man nennt d die *I-adische Metrik*.)

2. (a) Zeige, dass ein Polynom $ax^2 + bx + c$ vom Grad 2 ueber einem Koerper K mit $\text{Char}(K) \neq 2$ genau dann irreduzibel ist, wenn $b^2 - 4ac$ kein Quadrat in K ist.
- (b) Zeige, dass $3x^2 + 4x + 3$ als Polynom ueber $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel, ueber $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ aber reduzibel ist.
3. Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Automorphismus. Zeige, dass $\phi = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.
4. Seien K ein Koerper, $n \in \mathbb{N}$ und sei $\rho_K(n)$ die maximale Dimension eines Unterraums $V \subset M_n(K)$, der auer Null nur invertierbare Matrizen enthaelt. Zeige:
- (a) $\rho_K(n) \leq n$,
- (b) $\rho_K(n) = 1$, falls K algebraisch abgeschlossen ist,
- (c) $\rho_{\mathbb{Q}}(n) = n$.

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring mit Eins und fuer $x \in R$ sei $L_x : R \rightarrow R$ die Abbildung $y \mapsto xy$. Zeige
 - (a) R ist genau dann ein Integritaetsring wenn L_x fuer jedes $x \neq 0$ injektiv ist.
 - (b) R ist genau dann ein Koerper, wenn L_x fuer jedes $x \neq 0$ surjektiv ist.
2. Gibt es einen Integritaetsring mit genau 10 Elementen?
3. Sei K ein Körper. Wir identifizieren die Menge aller Folgen $(f_j)_{j \geq 0}$ in K mit der Menge aller *formalen Potenzreihen*

$$K[[x]] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n : f_j \in K \right\}.$$

Wir definieren eine Addition

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

und Multiplikation

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

mit $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$.

- (a) Zeige, dass $K[[x]]$ mit diesen Verknüpfungen ein kommutativer Ring mit Eins ist.
 - (b) Zeige, dass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ genau dann eine Einheit ist, wenn $f_0 \neq 0$.
4. Zeige, dass der Ring $R = K[[x]]$ der formalen Potenzreihen über einem Körper K ein Hauptidealring ist.

Algebra

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Abgabe: 13.5.2026 12:00

Blatt 4

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei F_2 die freie Gruppe in zwei Erzeugern a, b .

(a) Zeige, dass es für jedes Element $z \in F_2$ Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$z = a^k b^l k_1 \cdots k_r,$$

wobei die k_j Kommutatoren sind.

(b) Zeige:

$$F_2^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^2.$$

2. Zeige, dass die Kommutatorgruppe von $\text{Per}(n)$, $n \geq 3$, gleich $\text{Per}^+(n)$ ist, der Gruppe der geraden Permutationen.
(Hinweis: Zeige, dass $\text{Per}^+(n)$ von den Zykeln der Länge 3 erzeugt wird.)
3. Zeige, dass eine Gruppe der Ordnung 40 nicht einfach ist.
4. (a) Bestimme alle kommutativen Ringe mit Eins, die den Nullring (als Ring mit Eins) als Unterring haben.
- (b) Zeige, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{3} \subset \mathbb{R}$ unendlich viele Einheiten hat.

Algebra

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Blatt 3

Abgabe: 6.5.2026 12:00

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei G eine unendliche Gruppe. Ist H eine Untergruppe, dann nennen wir die Zahl $|G/H| \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ den *Index* von H in G . Zeige:
 - (a) Haben die Untergruppen A, B endlichen Index, so auch ihr Schnitt $A \cap B$ und es gilt $|G/A \cap B| \leq |G/A| |G/B|$.
 - (b) Hat die Untergruppe H endlichen Index, dann enthaelt H einen Normalteiler von endlichem Index.
2. Sei G eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler der Gruppenordnung. Die Gruppe G habe einen Normalteiler N der Ordnung p . Zeige, dass G ein nichttriviales Zentrum hat.
3. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Gib eine vollstaendige Liste aller Gruppen der Ordnung ≤ 7 bis auf Isomorphie (mit Beweis!).
(Hinweis: Ist G eine nichabelsche Gruppe der Ordnung 6, dann operiert G auf der Menge seiner 2-Sylow-Gruppen.)
4. Für eine Gruppe G definieren wir

$$G_0 = G, \quad G_{k+1} = [G, G_k] = \langle gxg^{-1}x^{-1} : g \in G, x \in G_k \rangle$$

Die Gruppe G heißt *nilpotent*, falls $G_n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Sei K ein Koerper und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Gruppe G der oberen Dreiecks- $n \times n$ -Matrizen mit Einsen auf der Diagonale nilpotent ist.

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Die Gruppe G operiere auf der Menge X . Seien $g \in G, x \in X$. Zeige, dass

$$gG_xg^{-1} = G_{g \cdot x}.$$

2. Sei G eine Gruppe und sei $\text{Inn}(G)$ die Menge aller *inneren Automorphismen* von G , d.h., die Menge aller Abbildungen der Form

$$\begin{aligned} C_g : G &\rightarrow G, \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

mit $g \in G$. Zeige dass $\text{Inn}(G)$ in $\text{Aut}(G)$ liegt und ein Normalteiler in dieser Gruppe ist.

3. Seien $H \subseteq G$ endliche Gruppen. Zeige

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

4. Eine Gruppenoperation heisst *transitiv*, falls es nur eine Bahn gibt.

Eine endliche Gruppe G operiere transitiv auf einer Menge X , so dass jedes $g \in G$ mindestens einen Fixpunkt in X hat, d.h., zu jedem $g \in G$ gibt es ein $x \in X$ mit $gx = x$. Zeige, dass X aus nur einem Punkt besteht.

Algebra

Sommer 2026

Professor Deitmar, Lou-Jean Cobigo-Bihavan

Blatt 1

Abgabe: 22.4.2026 12:00

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei G eine Gruppe der Ordnung n . Sei $1 \in S \subset G$ eine Teilmenge. Zeige, dass

$$S^n = \{s_1 \cdots s_n : s_1, \dots, s_n \in S\}$$

eine Untergruppe von G ist.

2. Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist zyklisch.
3. Sei N ein zyklischer Normalteiler der Gruppe G und sei $H \subset N$ eine Untergruppe. Ist H ein Normalteiler in G ?
4. Wir sagen: Eine Gruppe G hat *Exponent* $m \in \mathbb{N}$, falls $x^m = 1$ für jedes $x \in G$ gilt.
Für welche Primzahlen p gilt: Jede endliche Gruppe G mit Exponent p ist abelsch?