Automorphe Formen und Kohomologie

Anton Deitmar

Inhaltsverzeichnis

1 Definitionen

Sei G eine halbeinfache lineare Gruppe ueber $\mathbb{Q}$.

$K \subset G_{\mathbb{A}_{\text{fin}}}$ eine kompakte offene Untergruppe.

$K_\infty \subset G_\infty = G_\mathbb{R}$ maximale kompakte Untergruppe

$Y(K) = G_\mathbb{Q} \backslash G_\mathbb{A} / K K_\infty = \Gamma_K \backslash G_\infty / K_\infty,$

wobei $\Gamma_K = G_\mathbb{Q} \cap K$.

Dann gilt

$$Y(K) \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad G \text{ ist anisotrop ueber } \mathbb{Q}.$$

Sei dies der Fall. Dann gilt

$$L^2(G_\mathbb{Q} \backslash G_\mathbb{A}) \cong \bigoplus_{\pi \in \widehat{G_\mathbb{A}}} N(\pi)\pi.$$

Jede irreduzible Darstellung $\pi \in \widehat{G_\mathbb{A}}$ ist ein Tensorprodukt $\pi_{\text{fin}} \otimes \pi_\infty$.
Fuer die de Rham-Kohomologie ergibt sich

$$H^p\Big(Y(K), \mathbb{C}\Big) \cong \bigoplus_{\pi} N(\pi)\, \pi_{\text{fin}}^K \otimes H^p\Big(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty\Big)$$

Eine Darstellung π heisst **kohomologisch**, falls

$$N(\pi)\, \pi_{\text{fin}}^K \otimes H^p\Big(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty\Big) \neq 0$$

fuer ein $p \geq 0$ gilt.

2 Die Duale Gruppe

Definition 2.1. Sei ${}^LG^0$ die zu G duale Gruppe ueber $\overline{\mathbb{Q}}$, d.h. die Gruppe, die entsteht, wenn man Wurzeln und Cowurzeln vertauscht. Die duale zu SL_2 ist PGL_2.

Die Gruppe $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ operiert auf $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Auf $\mathrm{Aut}(G)$ operiert sie durch

$$\gamma(\phi) = \gamma\phi\gamma^{-1}.$$

So erhaelt man einen Gruppenhomomorphismus

$$\Gamma \to \mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\operatorname{Inn}(G).$$

Fakt: $\mathrm{Out}(G)$ kann mit der Automorphismengruppe des Dynkin-Diagramms identifiziert werden. Daher erhaelt man einen Gruppenhomomorphismus

$$\Gamma \to \mathrm{Out}({}^LG^0).$$

Fakt: Es gibt einen Schnitt $\mathrm{Out}({}^LG^0) \to \mathrm{Aut}({}^LG^0)$, dies checkt man durch explizite Angabe eines Schnitts fuer jedes Dynkin-Diagramm. Nach Wahl eines solchen Schnitts erhaelt man eine Operation von Γ auf ${}^LG^0$. Man definiert die **Langlands Gruppe** als

$${}^LG = \Gamma \rtimes {}^LG^0.$$

Definition 2.2. Zwei Gruppen $G, H/\mathbb{Q}$ sind **Formen** voneinander, falls $G \cong H$ ueber $\overline{\mathbb{Q}}$ gilt.

Beispiele 2.3.

- SL_2 und D^1 fuer eine Quaternionenalgebra D sind Formen voneinander.
- $SO(2)$ und GL_1 sind Formen voneinender.

Definition 2.4. Seien nun G und H Formen und sei $\phi : G \to H$ ein Isomorphismus $/\mathbb{Q}$. Fuer $\gamma \in \Gamma$ ist dann

$$[\gamma] = \gamma\phi^{-1}\gamma^{-1}\phi \in \mathrm{Aut}(G).$$

Die Form H heisst **innere Form**, falls $[\gamma] \in \mathrm{Inn}(G)$ fuer jedes $\gamma \in \Gamma$.

Beispiele 2.5.

- $SO(2)$ und GL_1 sind keine inneren Formen voneinander, denn da beie abelsch sind, muesste $[\gamma]$ immer trivial sein. Waehlt man aber γ als die komplexe Konjugation, so operiert γ auf der Split-Form GL_1 durch $\gamma(z) = \bar{z}$, aber auf $SO(2)(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ operiert es durch

  $$\gamma(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

  (Da die Fixpunkte die Menge aller $z \in \mathbb{C}^\times$ mit $|Z| = 1$ sein muessen.) Zusammen gibt das

  $$[\gamma](z) = \frac{1}{z}.$$

- Sei D eine nicht zerfallende Quaternionenalgebra ueber $\mathbb{Q}$. Dann ist D^1 eine innere Form von SL_2, da das Dynkin-Diagramm A_1 nur aus einem Punkt besteht und daher keine nichttrivialen Automorphismen hat.

Fakt: Die Langlands Gruppe ${}^LG$ bestimmt G nur bis auf inneren Twist. Zu jedem G gibt es aber genau eine innere Form H, die **quasi-split** ist.

Eine Gruppe H heisst quasi-split, wenn es eine ueber Q definierte Borel-Untergruppe gibt. Beispiel: $\mathrm{SO}(2n, 1)$ $n \geq 2$ ist quasi-split, aber nicht split. Die Form $\mathrm{SO}(2n + 1)$ ist nicht quasi-split.

3 Unverzweigte Langlands Korrespondenz (Skizze)

Sei G quasi-split und B eine Borel $/\mathbb{Q}$. Fuer eine Primzahl p gilt bis auf endlichen Index:

$$B_{\mathbb{Q}_p} = B_p = AN,$$

wobei A ein split Torus und N unipotent ist. Fuer $\lambda \in \widehat{A}$ sei dann V_λ der Raum aller lokalkonstanten $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f(anx) = \lambda(a)f(x)$. Die **Hauptseriendarstellung** π_λ auf V_λ ist gegeben durch $\pi)\lambda(y)f(x) = f(xy)$.

Der split Torus A hat eine eindeutig bestimmte maximal kompakte Untergruppe $A_c \cong \left(\mathbb{Z}_p^\times\right)^r$ fuer ein $r \in \mathbb{N}$. Ist $\lambda(A_c) = 1$, so heisst λ **unverzweigt**. In diesem Fall ist auch V_λ unverzweigt, d.h., es gilt $V_\lambda^K \neq 0$ fuer jedes kompakte Untergruppe K.

Es gibt dann eine maximal kompakte Untergruppe K mit $KB = G_p$ und fuer solches K ist die **Hecke-Algebra** $\mathcal{H} = C_c(K \backslash G_p / K)$ kommutativ. Daher ist V_λ^K eindimensional und fuer $f \in \mathcal{H}$ hat man

$$\pi(f) = \int_{G_p} f(x)\, dx = h_f(\pi) P_1,$$

wobei $P_1 = \int_K \pi(k)\, dk$ die natuerliche Projektion auf V_λ^K ist. Schreibe $\overline{A}\mathbb{A}/A_c$. Diese Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}^r$. Die **Cartan-Zerlegung**

$$G_p = KAK$$

impliziert, dass $\mathcal{H} \cong C_c(\overline{A})^W$, wobei

$$W = \big(\text{Normalisator von } A\big) \big/ \big(\text{Zentralisator von } A\big)$$

die **Weyl-Grppe** ist. Dann ist $f \mapsto h_f(\pi)$ ein Algebrenhomomorphismus, liegt also in $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$. Nun kann $\overline{A}$ mit einem maximalen Torus in ${}^L G^0$ identifiziert werden und $x \in \overline{A}/W$ definiert dann eine halbeinfache Konjugationsklasse in ${}^L G^0$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) &\cong \mathrm{Hom}(C_c(\overline{A})^W, \mathbb{C}) \\
&\cong \mathrm{Hom}(\overline{A}, \mathbb{C}^\times)/W \\
&\cong {}^L G^0(\overline{\mathbb{Q}})^{ss}/\mathrm{Konjugation} \\
&\cong \left\{\eta : \Gamma_{\mathbb{Q}_p} \to {}^L G^0(\overline{\mathbb{Q}})\right\} \Big/ \mathrm{Isomorphie}
\end{aligned}$$

Die letzte Bijektion wird hergestellt dadurch, dass man verlangt, dass man η die Konjugationsklasse von $\eta(F)$ von einem (beliebigen) Frobenius-Element zuordnet. Die Zuordnung $\pi \mapsto h_f(\pi) \to \eta$ ist die unverzweigte Langlands-Korrespondenz.

4 Spezielle Quotienten

Seien

F ein Zahlkoerper mit genau einer komplexen Stelle

$\mathcal{O}$ sein Ganzzahlring

$F_\infty = F \otimes \mathbb{R} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^r$

D Quaternionenalgebra $/F$

S Menge der Stellen, an denen D nicht zerfaellt. Verlange, dass S alle reellen Stellen enthaelt. Zur Einfachheit verlange auch, dass S keine Stelle ueber der Primzahl 2 enthaelt.

Λ eine Maximalordnung in D, diese ist eindeutig bis auf Konjugation

$G = \mathrm{GL}_1(D)/\mathrm{GL}_1$ die projektive Einheutengruppe von D

$G_\infty = G_{F\otimes\mathbb{R}}$

K_∞ eine maximal kompakte Untergruppe, dann ist

$$G_\infty/K_\infty \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{PU}(2) \cong \mathbb{H}^3,$$

der dreidimensionale hyperbolische Raum.

Σ eine endliche Mengen endlicher Stellen mit $S_{\mathrm{fin}} \subset \Sigma$.

$K_\Sigma = \prod_{v<\infty} K_{\Sigma,v}$, wobei

$$K_{\Sigma,v} = \begin{cases} \mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_2) & v \notin \Sigma, \\ \left\{ g \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \mod \pi_v \right\} & v \in \Sigma \setminus S, \\ (1 + \mathfrak{m}_v) F_v^\times / F_v^\times & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist $\mathfrak{m}_v$ das eindeutig bestimmte maximale Ideal von Λ_v. Dann ist

$$\Lambda_v / \mathfrak{m}_v = \ell_v$$

die eindeutig bestimmte unverzweigte quadratische Erweiteung von $k_v = \mathcal{O}_v / \mathfrak{p}_v$.

Wenn Σ fest bleibt, schreiben wir auch K_v statt $K_{\Sigma,v}$.

5 Atkin-Lehner Involutionen und Hecke-Operatoren

Fuer $v \in \Sigma \setminus S$ sei

$$w_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_v & 0 \end{pmatrix}.$$

Fuer $v \in S_{\text{fin}}$ sei w_v irgendein Element von $G_v \setminus K_v$ mit $w_v^2 \in K_v$. So ein Element existiert, weil die Zahl

$$\left| \ell_v^\times / k_v^\times \right| = \frac{p^2 k - 1}{p^k - 1} = p^k + 1$$

gerade ist, denn die Primzahl p, ueber der v liegt, ist $\neq 2$.

In jedem Fall normalisiert w_v die Gruppe K_v und daher ist die **Atkin-Lehner-Involution**

$$G_F \backslash G_{\mathbb{A}} / K \to G_F \backslash G_{\mathbb{A}} / K,$$
$$G_F x K \mapsto G_F x w_v K$$

wohldefiniert und hat Ordnung 2. Die Gruppe, die von diesen Involutionen erzeugt wird, ist isomorph zu $\left(\mathbb{Z}/2\right)^\Sigma$.

Hecke-Operatoren

Definition 5.1. Sei $g \in G_{\mathrm{fin}} = G_{\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}}$ und schreibe $K = K_\Sigma$. Dann ist gKg^{-1} ebenfalls eine offene, kompakte Untergruppe von G_{fin} und daher hat die Gruppe

$$K \cap gKg^{-1}$$

endlichen Index in K und in gKg^{-1}. Betrachte die Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
 & Y(K \cap gKg^{-1}) \arrow[dl, "p_K"'] \arrow[dr, "p_{gKg^{-1}}"] & \\
Y(K) & & Y(gKg^{-1}) \arrow[d, "xgKg^{-1} \mapsto xgK"] \\
 & & Y(K)
\end{tikzcd}$$

Die letzte Abbildung wird im Folgenden in der Notation unterdrueckt. Sie ist immer mitgedacht. Wir erhalten so zwei endliche Ueberlagerungen $Y(K \cap gKg^{-1}) \to Y(K)$.

Definition 5.2. Sei $p : E \to X$ eine endliche Ueberlagerung und sei $p_* : H_k(E) \to H_k(X)$ der uebliche Push-forward. Sei dann

$$p^\vee : H_k(X) \to H_k(E),$$
$$p^\vee \sigma = \sum_{\eta : p \circ \eta = \sigma} \eta,$$

wobei angenommen wird, dass σ ein singulaerer Simplex ist, dessen Bild in einer p-Trivialisierenden Umgebung liegt. Nach Baryzentrischer Zerlegung koennen wir das immer annehmen.

Definition 5.3. Fuer $g \in G_{\text{fin}}$ sei der **Hecke-Operator** T_g definiert durch

$$\begin{aligned} T_g : H_k(Y(K), \mathbb{Z}) &\to H_k(Y(K), \mathbb{Z}) \\ T_g &= p_{gKg^{-1}*} \circ p_K^\vee. \end{aligned}$$

Ist insbesondere q eine Stelle $\notin S$, dann schreiben wir T_q fuer T_g mit

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \pi_q \end{pmatrix}.$$

Sei dann $\mathcal{T}_\Sigma \subset \operatorname{End}(H_*(Y(\Sigma)))$ der Ring erzeugt von allen T_q, $q \notin \Sigma$.

Bemerkung 5.4. Sei $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & \pi_q \end{smallmatrix}\right)$. Mit $K = \mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_q)$ gilt dann

$$K \cap gKg^{-1} = \left\{ g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mod (\pi_q) \right\}.$$

Ist also $q \in \Sigma \setminus S$, so folgt

$$K_{\Sigma \setminus q} \cap gK_{\Sigma \setminus q}g^{-1} = K_\Sigma.$$

Die sogenannten **Degenerationsabbildungen**

$$p_k, p_{gKg^{-1}} : Y(\Sigma) \to Y(\Sigma \setminus q)$$

induzieren

$$\begin{aligned}\psi : H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) &\to H_1(\Sigma \setminus q, \mathbb{Z})^2 \\ \alpha &\mapsto \left(p_{K\,*}\alpha, p_{gKg^{-1}\,*}\alpha\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi^\vee : H_1(\Sigma \setminus q, \mathbb{Z})^2 * &\to H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto p_K^\vee \alpha + p_{gKg^{-1}}\beta.\end{aligned}$$

Lemma 5.5. *Es gilt*

$$\psi \circ \psi^\vee = \begin{pmatrix} N(q)+1 & T_q \\ T_q & N(q)+1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned}\psi \circ \psi^\vee &= \begin{pmatrix} p_{K\,*} \\ p_{gKg^{-1}\,*} \end{pmatrix} \left(p_K^\vee, p_{gKg^{-1}}^\vee\right) \\ &= \begin{pmatrix} p_{K*}\, p_K^\vee & p_{K*}\, p_{gKg^{-1}}^\vee \\ p_{gKg^{-1}*}\, p_K & p_{gKg^{-1}*}\, p_{gKg^{-1}}^\vee \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Diagonalelemente sind trivial, da $N(q)+1$ genau der Grad der Ueberlagerung ist. Das Element links unten ist nach Definition gleich T_q. Es bleibt nachzurechnen, dass

$$p_{K*}\, p_{gKg^{-1}}^\vee = T_q$$

gilt. Man rechnet leicht nach, dass $p_{K*}\, p^{\vee}_{gKg^{-1}} = T_{\overline{g}}$, wobei

$$\overline{g} = \begin{pmatrix} \pi_q & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt in PGL_2,

$$\begin{aligned} \overline{g} &= \begin{pmatrix} \pi_q & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & 1 \\ \pi_q & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \pi_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \pi_q \\ 1 & \end{pmatrix} = w_q g w_q^{-1}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \overline{g} K \overline{g}^{-1} &= w_q g K g^{-1} w_q^{-1} \quad \text{und also} \\ K \cap \overline{g} K \overline{g}^{-1} &= w_q \big(g K g^{-1} \cap K \big) w_q^{-1} \\ &= g K g^{-1} \cap K, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □