Karlsruher Institut für Technologie

Fakultt fr Mathematik
Institut fr Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Frank Herrlich
JProf Dr. Gabriela Weitze-Schmithsen

SWAS im Sommersemester 2011

BILLARD und TEICHMÜLLERKURVEN

Vom (idealisierten) Billardspiel auf einem polygonalen Billardtisch gibt es einen verblüffenden und faszinierenden Zusammenhang zu handfester algebraischer Geometrie: Sind die Winkel des Tisches rationale Vielfache von π, so lassen sich endlich viele Kopien des Tisches zu einer Translationsfläche X zusammenkleben, auf der die Billardbahnen zu Geodätischen werden. Variation der Translationsstruktur führt zu einer eingebetteten Kreisscheibe Δ_X im Teichmüllerraum, auf der die affinen Transformationen von X operieren. Letztere bilden die *Veechgruppe* $\Gamma(X)$ von X. Veech [10] hat gezeigt, dass die Dynamik des Billardflusses auf dem ursprünglichen Polygon optimal ist, wenn $\Gamma(X)$ ein Gitter in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass das Bild von Δ_X im Modulraum M_g (g das Geschlecht von X) eine algebraische Kurve ist.
Diese *Teichmüllerkurven* sind in den letzten 10 Jahren unter verschiedenen Gesichtspunkten intensiv studiert worden. Einiges davon soll das Ziel der SWAS-Bemühungen im Sommersemester 2011 sein. Wie üblich gliedert sich das Programm in drei Blöcke à jeweils drei thematisch zusammenhängende Vorträge.

I. Einführung in Teichmüllerkurven

Hauptziel des ersten Blocks ist es, die oben skizzierten Konzepte einzuführen und durch explizite Beispiele mit Leben zu füllen: Translationsflächen, polygonale Billardtische und die ZK-Konstruktion, Veechgruppe; die Veech-Alternative; Teichmüllerkurven; Spurkörper.
Als Beispiele bieten sich Origamis und evtl. McMullens L-förmige Tische in Geschlecht 2 an.
Als Literatur für diesen Block kommen in Frage: [4], [5], [6], [8], [9], [11].

II. Algebraische Charakterisierung von Teichmüllerkurven

Ziel des zweiten Blocks ist es, Möllers Charakterisierung von Teichmüllerkurven durch Eigenschaften der zugehörigen Variation von Hodgestrukturen zu verstehen. Dies geschieht durch Studium der Analogie, aber auch der Unterschiede zu Shimurakurven. Insbesondere wird gezeigt, dass die Jacobischen der Punkte auf der Teichmüllerkurve reelle Multiplikation mit dem Spurkörper haben. Eine wesentliche Rolle bei der Charakterisierung spielt das Konzept der (maximalen) Higgs-Bündel.
Literatur: [7] und die darin zitierten Quellen.

III. Lyapunov-Exponenten von Teichmüllerkurven

Das aus der Ergodentheorie stammende Konzept der Lyapunov-Exponenten spielt in den letzten Jahren eine wichtige Rolle in vielen Untersuchungen. Wir wollen in diesem Block zunächst dieses Konzept allgemein erläutern und dann verstehen, wie man die Charakterisierung von Teichmüllerkurven aus dem zweiten Block benutzen kann, um Lyapunov-Exponenten explizit zu berechnen. Wie man Lyapunov-Exponenten als Grade von im zweiten Block studierten Bündeln berechnen kann, steht in [1], Sect. 8. Anschließend können dann Beispiele diskutiert werden, für die die Zahlenwerte explizit bestimmt werden können; konkret ist das für zyklische Überlagerungen von Kopfkissen bekannt, s. [2] und [3].

Literatur

[1] I. Bouw und M. Möller, Teichmüller curves, triangle groups, and Lyapunov exponents, *Annals of Math.* 172 (2010), 139–185.

[2] A. Eskin, M. Kontsevich und A. Zorich, Lyapunov spectrum of square-tiled cyclic covers, *Preprint* arXiv:1007.5330 [math.DS]

[3] G. Forni, C. Matheus und A. Zorich, Square-tiled cyclic covers, *Preprint* arXiv:1007.4275 [math.DS].

[4] F. Herrlich und G. Schmithüsen, An extraordinary origami curve, *Math. Nachrichten* 281 No.2 (2008), 219–237.

[5] F. Herrlich und G. Schmithüsen, The boundary of Teichmüller disks in Teichmüller and in Schottky space, in A. Papadopoulos (ed.) *Handbook of Teichmüller theory, Volume I*, Chapter 6. European Mathematical Society (2006).

[6] C. McMullen, Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces, *Journal of the AMS* 16 (2003), 857–885.

[7] M. Möller, Variations of Hodge structures of a Teichmüller curve, *Journal of the AMS* 19 (2006), 327–344.

[8] G. Schmithüsen, Veech Groups of Origamis. *PhD thesis, Universität Karlsruhe*, 2005.

[9] S. Tabachnikov, *Geometry and Billards.* Amer. Math. Soc. 2005.

[10] W.A. Veech, Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Inventiones Math.*, 97(3) (1989), 553–583.

[11] Ya. Vorobets, Planar structures and billiards in rational polygons: the Veech alternative. *Russ. Math. Surv.* 51, No.5, 779-817 (1996).