

# Vorlesung Elastische Kurven

Sommersemester 2018, Tübingen

Sascha Eichmann

11. Juli 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die elastische Energie und ihre Euler-Lagrange Gleichung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Analyse der Krümmungsgleichung</b>	<b>5</b>
2.1	Qualitatives Verhalten . . . . .	5
2.2	Jacobisch elliptischen Funktionen . . . . .	7
2.3	Explizite Lösungen der Krümmungsgleichung . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Einschub: Killing-Vektorfelder</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Ordnungsreduktion nach Langer&amp;Singer</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Einschub: Die direkte Methode der Variationsrechnung</b>	<b>22</b>
5.1	Sobolevräume . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Ein Randwertproblem für elastische Kurven</b>	<b>29</b>
6.1	Innere Invarianzen . . . . .	29
6.2	Die Brücke zur Willmore-Energie . . . . .	32
6.3	A-priori Abschätzung an die Bogenlänge . . . . .	34
6.4	Eine geometrische, hinreichende Bedingung für die Existenz von Minimierern . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Symmetrie minimierender Lösungen</b>	<b>43</b>
	<b>Literatur</b>	<b>47</b>

In dieser Vorlesung betrachten wir die elastische Energie von Kurven auf Mannigfaltigkeiten. Diese ist z.B. ein Modell um die physikalische 'Verbiegungsenergie' eines Stück dünnen Drahtes zu messen. Wir werden dies allerdings aus einer rein mathematischen Sicht behandeln und versuchen mehr über Minimierer dieses Funktionals zu erfahren. Dafür werden wir zuerst die kritischen Punkte, d.h. die Euler-Lagrange Gleichung berechnen. Diese werden wir in den Kapiteln 2 und 4 analysieren und so eine genauere Vorstellung von der Gestalt möglicher Lösungen dieser Gleichung bekommen. Danach werden wir uns in Abschnitt 6 in die hyperbolische Geometrie begeben und einen Minimierer der elastischen Energie unter Randdaten mithilfe von variationellen Methoden konstruieren.

## 1 Die elastische Energie und ihre Euler-Lagrange Gleichung

Um die benötigten differentialgeometrischen Grundlagen zu wiederholen bietet sich Christian Bärs Buch [3] an.

Im Folgenden ist  $M$  immer eine glatte 2-dimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit Metrik  $g$ .

**Definition 1.1.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $c : I \rightarrow M$  eine zweimal stetig differenzierbare, reguläre Kurve. Sei weiterhin  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  die geodätische Krümmung von  $c$ . Dann nennen wir

$$F(c) := \int_I \kappa^2(t) |c'|_g(t) dt$$

die elastische Energie von  $c$ .

Um die Euler-Lagrange-Gleichung von  $W$  zu berechnen, müssen wir eine Schaar von Kurven  $\gamma : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  betrachten und  $\frac{d}{dw} F(\gamma(\cdot, w))$  berechnen. Sei also  $\varepsilon > 0$  fest und  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow M$  eine glatte Familie von Kurven. Der Scharparameter heißt  $w \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , während der Parameter der Kurven  $s \in I$  heißt. Weiter definieren wir

$$V(w, s) := \frac{\partial}{\partial s} \gamma(w, s) = \dot{\gamma}(w, s) = \gamma'(w, s) \text{ die Tangente der Kurve}$$

$$v(w, s) := |V(w, s)|_g \text{ die Geschwindigkeit,}$$

$$T(w, s) := \frac{V(w, s)}{v(w, s)} \text{ die Einheitstangente,}$$

$$W(w, s) := \frac{\partial \gamma}{\partial w}(w, s) \text{ das Variationsvektorfeld}$$

und  $\kappa(w, s)$  sei die geodätische Krümmung bezüglich der  $s$ -Variablen.

Mit diesen Bezeichnungen können wir folgendes Lemma formulieren und beweisen:

**Lemma 1.2** (siehe z.B. [6] Lemma 1.1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w} &= g(\nabla_T W, T) v \\ \frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2g(R(W, T)T, \nabla_T T) - 4g(\nabla_T W, T) \kappa^2. \end{aligned}$$

Hierbei ist  $R(\cdot, \cdot)$  der Riemannsche Krümmungstensor von  $M$  und  $\nabla \cdot$  die kovariante Richtungsableitung.

*Beweis.* Um die erste Formel nachzuweisen benötigt man folgende Hilfsrechnung:

$$\begin{aligned} (\nabla_W(\dot{\gamma}))^k &= \frac{\partial^2 \gamma^k}{\partial w \partial s} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i W^j = (\nabla_{\dot{\gamma}} W)^k = (\nabla_{vT} W)^k \\ &= v (\nabla_T W)^k. \end{aligned}$$

Hierbei sind die  $\Gamma_{ij}^k$  die Christoffelsymbole von  $g$ . Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} (g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2v} 2g(\nabla_W \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \\ &= \frac{g(v \nabla_T W, vT)}{v} = vg(\nabla_T W, T). \end{aligned}$$

Für die zweite Formel benötigt man wieder eine Hilfsrechnung:

$$\begin{aligned} (\nabla_W T)^k &= \frac{\partial T^k}{\partial w} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k T^i W^j \\ &= \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\dot{\gamma}^k}{v} \right) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k T^i W^j \\ &= -\frac{\dot{\gamma}^k}{v^2} \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \gamma^k}{\partial s \partial w} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\dot{\gamma}^i}{v} W^j \\ &= \frac{1}{v} (\nabla_{\dot{\gamma}} W)^k - \frac{1}{v^2} g(\nabla_T W, T) v \dot{\gamma}^k \\ &= (\nabla_T W)^k - g(\nabla_T W, T) T^k. \end{aligned}$$

Nun betrachtet man die eigentliche Aussage:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} (g(\nabla_T T, \nabla_T T)) = 2g(\nabla_W \nabla_T T, \nabla_T T) \\ &= 2g(R(W, T)T + \nabla_T \nabla_W T + \nabla_{\nabla_W T} T - \nabla_{\nabla_T W} T, \nabla_T T) \\ &= 2g(R(W, T)T + \nabla_T \nabla_W T + \nabla_{-Tg(\nabla_T W, T) + \nabla_T W} T - \nabla_{\nabla_T W} T, \nabla_T T) \\ &= 2g(R(W, T)T + \nabla_T(-Tg(\nabla_T W, T) + \nabla_T W) - g(\nabla_T W, T)\nabla_T T, \nabla_T T) \\ &= 2g(R(W, T)T, \nabla_T T) - 2\kappa^2 g(\nabla_T W, T) \\ &\quad + 2g(-g(\nabla_T W, T)\nabla_T T - Tg(\nabla_T \nabla_T W, T) - Tg(\nabla_T W, \nabla_T T) + \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) \\ &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) - 4\kappa^2 g(\nabla_T W, T) + 2g(R(W, T)T, \nabla_T T) \end{aligned}$$

□

**Theorem 1.3.** Sei  $\gamma : I = [0, L] \rightarrow M$  eine reguläre, glatte nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei  $\gamma$  außerdem kritisch für  $F$ , d.h. alle für alle kompakten Scharfamilien  $\gamma(s, w)$ , sodass  $\gamma(s, 0) = \gamma(s)$  und  $\gamma(s, w) = \gamma(s, 0)$  für  $s \in I \setminus K$  und  $K \subset \subset I$  gilt

$$\frac{d}{dw} F(\gamma(\cdot, w))|_{w=0} = 0.$$

Dann gilt für die geodätische Krümmung  $K(\cdot)$  von  $\gamma(\cdot)$

$$\frac{d^2}{(ds)^2}K(s) = -K(s)G(\gamma(s)) - \frac{1}{2}(K(s))^3.$$

Hier ist  $G$  die Gaußkrümmung von  $M$ .

*Beweis.* Da  $M$  von Dimension 2 ist, können wir den Riemann'schen Krümmungstensor auch durch die Gaußkrümmung ausdrücken:

$$R(W, T)T = G(g(T, T)W - g(T, W)T) = G(W - g(W, T)T)$$

Mit Lemma 1.2 können wir nun mithilfe partieller Integration rechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw}F(\gamma(\cdot, w))|_{w=0} &= \frac{d}{dw} \int_I K^2 v ds|_{w=0} \\ &= \int_0^L v (2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2g(R(W, T)T, \nabla_T T) - 4g(\nabla_T W, T) K^2) \\ &\quad + g(\nabla_T W, T) v K^2 ds \\ &= \int_0^L 2g(W, (\nabla_T)^3 T) + 2Gg(W, \nabla_T T) + 3K^2 g(W, \nabla_T T) + 6g(W, T)K'K ds \\ &\quad + [2g(\nabla_T W, \nabla_T T) + g(W, -2(\nabla_T)^2 - 3K^2 T)]_0^L \\ &= \int_0^L 2g(W, (\nabla_T)^3 T) + 2Gg(W, \nabla_T T) + 3K^2 g(W, \nabla_T T) + 6g(W, T)K'K ds, \end{aligned}$$

denn die Variation ist kompakt. Sei  $N$  die Einheitsnormale von  $\gamma$ , sodass die Frenet Gleichungen

$$\nabla_T T = KN, \quad \nabla_T N = -KT$$

gelten. Wählen wir  $W(s) := \varphi(s)N(s)$ , mit  $\varphi \in C_0^\infty(I)$ , d.h.  $W$  zeigt in Richtung  $N$ , so erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw}F(\gamma(\cdot, w))|_{w=0} &= \int_0^L \varphi (2g(N, (\nabla_T)^2(NK)) + 2Gg(N, NK) + 3K^2 g(N, NK)) ds \\ &= \int_0^L \varphi (2g(N, (\nabla_T)(K\nabla_T N + K'N)) + 2GK + 3K^3) ds \\ &= \int_0^L \varphi (2g(N, K'\nabla_T N + K\nabla_T(-KT) + K''N + K'\nabla_T N) + 2GK + 3K^3) ds \\ &= \int_0^L \varphi (2g(N, -2K'KT + K(-K'T - K\nabla_T T) + K''N) + 2GK + 3K^3) ds \\ &= \int_0^L \varphi (-2K^3 + 2K'' + 2GK + 3K^3) ds. \end{aligned}$$

Mit dem Fundamentallema der Variationsrechnung erhalten wir dann die Aussage.  $\square$

**Definition 1.4.** Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine glatte, reguläre, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Wir nennen  $\gamma$  elastisch, falls ihre geodätische Krümmung  $K$  die folgende Differentialgleichung erfüllt

$$\frac{d^2}{(ds)^2}K(s) = -K(s)G(\gamma(s)) - \frac{1}{2}(K(s))^3.$$

Für die weitere Theorie setzen wir die Gaußkrümmung  $G$  als konstant voraus und können dann obige Gleichung sogar explizit lösen.

## 2 Analyse der Krümmungsgleichung

### 2.1 Qualitatives Verhalten

In diesem Kapitel wird die Euler-Lagrange Gleichung aus Abschnitt 1 untersucht:

$$K''(s) = -GK(s) - \frac{1}{2}K^3(s). \quad (2.1)$$

Hier sehen wir  $G \in \mathbb{R}$  als einen festen Parameter. Zuerst wenden wir die Energiemethode auf (2.1) an und ziehen erste wichtige Schlussfolgerungen über das Verhalten der Lösungen.

**Lemma 2.1** (siehe [6] Gleichung (2.1)). *Alle Lösungen von (2.1) mit den Anfangsdaten  $K(0) = K_0$  und  $K'(0) = K'_0$  erfüllen folgende Gleichung*

$$(K'(s))^2 = -GK^2(s) - \frac{1}{4}K^4(s) + GK_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K'_0)^2$$

*Beweis.* Die Gleichung wird mithilfe der Energiemethode hergeleitet. Dafür wird (2.1) mit  $K'(s)$  durchmultipliziert und von 0 bis  $s$  integriert.

$$\begin{aligned} K''(s) &= -GK(s) - \frac{1}{2}K^3 \\ \Rightarrow K''(s)K'(s) &= -GK(s)K'(s) - \frac{1}{2}K^3(s)K'(s) \\ \Rightarrow \int_0^s K''(t)K'(t) dt &= \int_0^s -GK(t)K'(t) - \frac{1}{2}K^3(t)K'(t) dt \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(K'(s))^2 - \frac{1}{2}(K'_0)^2 &= -G\frac{1}{2}K^2(s) - \frac{1}{8}K^4(s) + G\frac{1}{2}K_0^2 + \frac{1}{8}K_0^4 \\ \Rightarrow (K'(s))^2 &= -GK^2(s) - \frac{1}{4}K^4(s) + GK_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K'_0)^2 \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.2.** *Jede Lösung von (2.1) ist stets beschränkt.*

*Beweis.* Angenommen es existiert eine Folge  $s_n$  aus dem Existenzbereich von (2.1) mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |K(s_n)| = \infty.$$

Da die rechte Seite von Lemma 2.1 ein Polynom vierten Grades in  $K$  mit negativem Vorzeichen vor dem höchsten Monom ist, geht diese Seite gegen  $-\infty$ . Damit existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $(K'(s_n))^2 < 0$ , ein Widerspruch. □

**Bemerkung 2.3.** Die Beschränktheit von  $K$  liefert mithilfe von Lemma 2.1 die Beschränktheit von  $K'$  und außerdem auch von  $K''$ . Dies impliziert, dass das maximale Existenzintervall einer Lösung ganz  $\mathbb{R}$  ist.

Wir werden später alle Lösungen hinschreiben, benötigen für die Rechnung aber, dass wir o.E. annehmen können, dass  $K'_0 = 0$ . Dafür beweisen wir folgendes Theorem:

**Theorem 2.4.** *Sei  $K$  eine beliebige Lösung von (2.1). Dann existiert ein  $s \in \mathbb{R}$  mit  $K'(s) = 0$ .*

*Beweis.* Zuerst definiert man  $K(0) = K_0$  und  $K'(0) = K'_0$  als Anfangsdaten der Lösung  $K$ .

Der Beweis wird nun per Widerspruch geführt. Man nehme an, es existiere kein  $s \in \mathbb{R}$  mit  $K'(s) = 0$ , dann ist  $K'(s) \neq 0, \forall s \in \mathbb{R}$ . Also ist  $K$  streng monoton wachsend/fallend und außerdem nach Korollar 2.2 beschränkt, damit gilt

$$\exists K_\infty \in \mathbb{R} : \lim_{s \rightarrow \infty} K(s) = K_\infty. \quad (2.2)$$

Nun betrachtet man die Folge  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Sie ist divergent gegen  $\infty$  und damit gilt wegen (2.2)  $|K(n) - K(n+1)| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , denn konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen. Mithilfe des Mittelwertsatzes bekommt man eine weitere gegen  $\infty$  divergente Folge  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wie folgt:

$$0 \leftarrow |K(n) - K(n+1)| = |K'(\xi_n)| |n+1 - n|, \quad \xi_n \in [n, n+1].$$

Also gilt  $K'(\xi_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Nun kann wieder mithilfe des Mittelwertsatzes und obiger Divergenz von  $\xi_n$  eine weitere gegen  $\infty$  divergente Folge  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konstruiert werden:

$$0 \leftarrow |K'(\xi_n) - K'(\xi_{n+2})| = |K''(\eta_n)| \underbrace{|\xi_n - \xi_{n+2}|}_{\geq 1}, \quad \eta_n \in [\xi_n, \xi_{n+2}].$$

Also gilt  $K''(\eta_n) \rightarrow 0$ .

Nun können die Ergebnisse mithilfe von (2.2) zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} K(\xi_n) &= K_\infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} K(\eta_n) &= K_\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} K'(\xi_n) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} K''(\eta_n) &= 0. \end{aligned}$$

Als nächstes müssen diese Konvergenzen in die stetigen Zusammenhänge (2.1) und Lemma 2.1 eingesetzt werden und man erhält

$$0 = -GK_\infty - \frac{1}{2}K_\infty^3 \quad (2.3)$$

$$0 = -GK_\infty^2 - \frac{1}{4}K_\infty^4 + GK_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K'_0)^2. \quad (2.4)$$

Analog erhält man mit der Asymptotik gegen  $-\infty$  und der Bezeichnung  $\lim_{s \rightarrow -\infty} K(s) = K_{-\infty}$  folgende Gleichungen:

$$0 = -GK_{-\infty} - \frac{1}{2}K_{-\infty}^3 \quad (2.5)$$

$$0 = -GK_{-\infty}^2 - \frac{1}{4}K_{-\infty}^4 + GK_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K'_0)^2. \quad (2.6)$$

Die einzigen Lösungen für (2.3) sind  $K_\infty = 0$  und  $K_\infty = \pm\sqrt{-2G}$ . Diese werden im Nachfolgenden durch eine Fallunterscheidung bearbeitet.

(a)  $K_\infty = \pm\sqrt{-2G}$ :

Setzt man  $K_\infty$  in (2.4) ein, erhält man eine Bedingung an  $K_0$  und  $K'_0$ :

$$0 = 2G^2 - \frac{1}{4}4G^2 + GK_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K'_0)^2 = \left(G + \frac{K_0^2}{2}\right)^2 + (K'_0)^2. \quad (2.7)$$

Die einzige Möglichkeit (2.7) zu lösen, besteht darin, dass  $K'_0 = 0$  ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme.

(b)  $K_\infty = 0$ :

Wegen der strengen Monotonie von  $K$  muss  $K_{-\infty} = \pm\sqrt{-2G}$  sein. Dies kann völlig analog zum Fall (a) zum Widerspruch geführt werden, indem  $K_{-\infty}$  in (2.6) eingesetzt wird.

□

## 2.2 Jacobisch elliptischen Funktionen

Um nun alle Lösungen bestimmen zu können, benötigen wir die sogenannten Jacobisch elliptischen Funktionen. Einen Überblick über solche speziellen Funktionen liefert z.B. [1].

**Definition 2.5** (siehe [1] 16.1.3). Für einen Parameter  $k \in (0, 1)$  wird folgende Funktion definiert:

$$F_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_k(\varphi) := \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} d\psi$$

$F'_k$  ist offensichtlich positiv, da  $k \in (0, 1)$ , also existiert  $F_k^{-1}$ . Setze nun noch

$$\text{AM}(s, k) := F_k^{-1}(s).$$

**Definition 2.6** (siehe [1] 16.1.5). Für einen Parameter  $k \in (0, 1)$  werden folgende Funktionen definiert:

$$\text{sn} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad \text{sn}(s, k) := \sin \varphi \Big|_{\varphi=F_k^{-1}(s)} = \sin \circ \text{AM}(s, k)$$

$$\text{cn} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad \text{cn}(s, k) := \cos \varphi \Big|_{\varphi=F_k^{-1}(s)} = \cos \circ \text{AM}(s, k)$$

$$\text{dn} : \mathbb{R} \rightarrow \left[\sqrt{1 - k^2}, 1\right], \quad \text{dn}(s, k) := \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \Big|_{\varphi=F_k^{-1}(s)} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(s, k)}$$

**Lemma 2.7.** Sei  $k \in (0, 1)$  fixiert, dann gilt

$$\text{AM}'(s, k) = \text{dn}(s, k)$$

*Beweis.* Der Hilfssatz folgt aus der Formel zur Berechnung der Ableitung der inversen Funktion. Dafür muss die Ableitung von  $F_k$  berechnet werden.

$$F'_k(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{AM}'(s, k) &= (F_k(s)^{-1})' = \frac{1}{F_k'(F_k^{-1}(s))} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))}}} \\ &= \sqrt{1-k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))} = \operatorname{dn}(s, k). \end{aligned}$$

□

Damit können nun die Ableitungen der Jacobischen elliptischen Funktionen berechnet werden. Die nachfolgenden Ableitungsoperationen beziehen sich immer auf die  $s$ -Komponente der Variable in der Definition der Funktionen, siehe Definition 2.6.

**Theorem 2.8** (siehe [1] Tabelle 16.16). *Sei  $k \in (0, 1)$ , dann gilt*

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}'(s, k) &= \operatorname{dn}(s, k) \operatorname{cn}(s, k) \\ \operatorname{cn}'(s, k) &= -\operatorname{dn}(s, k) \operatorname{sn}(s, k) \\ \operatorname{dn}'(s, k) &= -k^2 \operatorname{cn}(s, k) \operatorname{sn}(s, k) \end{aligned}$$

*Beweis.* Die ersten beiden Gleichungen folgen direkt aus der Kettenregel, der Ableitungen des  $\sin$  bzw. des  $\cos$  und Lemma 2.7.

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}'(s, k) &= \left( \sqrt{1-k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))} \right)' \\ &= \operatorname{dn}(s, k) (-2k^2 \sin(F_k^{-1}(s)) \cos(F_k^{-1}(s))) \frac{1}{2\sqrt{1-k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))}} \\ &= -k^2 \operatorname{cn}(s, k) \operatorname{sn}(s, k). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.9.** Nun können noch 2 wichtige, aber einfache Identitäten bemerkt werden

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall k \in (0, 1) : \operatorname{sn}^2(s, k) + \operatorname{cn}^2(s, k) = 1$$

und

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall k \in (0, 1) : \operatorname{dn}^2(s, k) + k^2 \operatorname{sn}^2(s, k) = 1.$$

**Theorem 2.10.** *Sei  $k \in (0, 1)$  fest, dann sind die Funktionen  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  und  $\operatorname{dn}$  in der  $s$ -Variablen periodisch.*

*Beweis.* Zuerst betrachtet man  $F_k^{-1}(s)$  und setzt  $F_k^{-1}(aF_k(\frac{\pi}{2}) + s) =: x$ , mit  $a \in \mathbb{N}$  und  $s \in \mathbb{R}$ . Nun muss  $x$  in Abhängigkeit von  $s$  berechnet werden. Man erhält folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\varphi)}} d\varphi &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\varphi)}} d\varphi + s \\ &= \int_0^{\pi \frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\varphi)}} d\varphi + s \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \int_0^{x-\pi\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\varphi)}} d\varphi = s$$

Also erhält man folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_k^{-1}(s) &= x - \pi\frac{a}{2} \\ F_k^{-1}(aF_k(\frac{\pi}{2}) + s) &= x. \end{aligned}$$

Dies impliziert die für diesen Beweis folgende essentielle Identität

$$F_k^{-1}(aF_k(\frac{\pi}{2}) + s) = F_k^{-1}(s) + \pi\frac{a}{2}.$$

Für dn setzt man  $a = 2$  und man erhält

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(2F_k(\frac{\pi}{2}) + s, k) &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(2F_k(\frac{\pi}{2}) + s))} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\pi + F_k^{-1}(s))} \\ &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))} = \operatorname{dn}(s, k). \end{aligned}$$

Analog folgt die Aussage für sn und cn mit  $a = 4$ . □

### 2.3 Explizite Lösungen der Krümmungsgleichung

Nun können wir alle Lösungen von (2.1) für konstante Gauss-Krümmung hinschreiben, man vergleiche auch [6, table 2.7]. Dafür nehmen wir immer o.E. an, dass unsere Lösung die Anfangsdaten  $K(0) = K_0$  und  $K'(0) = 0$  erfüllt.

**Theorem 2.11** (siehe [6] Tabelle 2.7c). *Sei  $K \in C^2(\mathbb{R})$  Lösung zu (2.1) mit  $G < 0$ ,  $K(0) = K_0 \in (0, 2\sqrt{-G})$  und  $K'(0) = 0$ . Dann gilt*

$$K(s) = \begin{cases} 2r \operatorname{dn}(r(s + s_0), k), & \text{falls } K_0 \neq \sqrt{-2G}, \\ \sqrt{-2G}, & \text{falls } K_0 = \sqrt{-2G}, \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} r &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{K_0}{2}, & \text{falls } K_0 \in (\sqrt{-2G}, 2\sqrt{-G}), \\ \frac{\sqrt{-4G - K_0^2}}{2}, & \text{falls } K_0 \in (0, \sqrt{-2G}), \end{array} \right\} \in \left( \frac{1}{2}\sqrt{-2G}, \sqrt{-G} \right), \\ k &= \frac{\sqrt{2r^2 + G}}{r} \in (0, 1), \\ s_0 &= \begin{cases} 0, & \text{falls } K_0 \in (\sqrt{-2G}, 2\sqrt{-G}), \\ \frac{1}{r}F_k(\frac{\pi}{2}), & \text{falls } K_0 \in (0, \sqrt{-2G}). \end{cases} \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $K(\cdot)$  periodisch.

*Beweis.* Sei o.B.d.A.  $K_0 \neq \sqrt{-2G}$ , dann berechnen sich die Ableitungen von  $K$  zu

$$\begin{aligned} K'(s) &= -2r^2 \operatorname{cn}(r(s + s_0), k) \operatorname{sn}(r(s + s_0), k) k^2 \\ K''(s) &= -2r^3 k^2 (-\operatorname{dn}(r(s + s_0), k) \operatorname{sn}^2(r(s + s_0), k) + \operatorname{dn}(r(s + s_0), k) \operatorname{cn}^2(r(s + s_0), k)) \\ &= 2r^3 k^2 \operatorname{dn}(r(s + s_0), k) (\operatorname{sn}^2(r(s + s_0), k) - \operatorname{cn}^2(r(s + s_0), k)). \end{aligned}$$

Nun ist damit

$$\begin{aligned}
K'' + GK + \frac{1}{2}K^3 &= 2r^3k^2 \operatorname{dn}(\operatorname{sn}^2 - \operatorname{cn}^2) + 2rG \operatorname{dn} + 4r^3 \operatorname{dn}^3 \\
&= 2r^3k^2 \operatorname{dn}(\operatorname{sn}^2 - \operatorname{cn}^2) + 2rG \operatorname{dn} + 4r^3(1 - k^2 \operatorname{sn}^2) \operatorname{dn} \\
&= r^3k^2 \operatorname{dn}(2 \operatorname{sn}^2 - 2 \operatorname{cn}^2 - 4 \operatorname{sn}^2) + 2rG \operatorname{dn} + 4r^3 \operatorname{dn} \\
&= -2r^3k^2 \operatorname{dn} + 2rG \operatorname{dn} + 4r^3 \operatorname{dn} \\
&= -2(2r^3 + Gr) \operatorname{dn} + 2rG \operatorname{dn} + 4r^3 \operatorname{dn} = 0.
\end{aligned}$$

Also ist die Differentialgleichung erfüllt. Nun fehlt noch die Überprüfung der Anfangsbedingungen. Sei zuerst  $K_0 \in (\sqrt{-2G}, 2\sqrt{-G})$ ,

$$K(0) = 2r \operatorname{dn}(0, k) = 2r \sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(0))} = 2r = K_0.$$

Sei nun  $K_0 \in (0, \sqrt{-2G})$ , damit folgt

$$\begin{aligned}
K(0) &= 2r \operatorname{dn}(rs_0, k) = 2r \sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(rs_0))} \\
&= 2r \sqrt{1 - k^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2r \sqrt{1 - k^2} \\
&= \sqrt{-4G - K_0^2} \sqrt{1 - \frac{2r^2 + G}{r^2}} = \sqrt{-4G - K_0^2} \sqrt{-\frac{G}{r^2} - 1} \\
&= \sqrt{-4G - K_0^2} \sqrt{-\frac{4G}{-4G - K_0^2} - 1} = K_0.
\end{aligned}$$

Nun fehlt noch die Ableitung

$$\begin{aligned}
K'(0) &= -2r^2 \operatorname{cn}(rs_0, k) \operatorname{sn}(rs_0, k) \\
&= -2r^2 \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sn}(rs_0, k) = 0, & \text{falls } K_0 \in (0, \sqrt{-2G}) \\ \operatorname{cn}(0, k) \operatorname{sn}(0, k) = 0, & \text{falls } K_0 \in (\sqrt{-2G}, 2\sqrt{-G}). \end{cases}
\end{aligned}$$

Der Rest folgt aus dem Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf.  $\square$

**Theorem 2.12** (siehe [6] Tabelle 2.7c). *Sei  $K \in C^2(\mathbb{R})$  eine Lösung zu (2.1) mit  $G < 0$ , den Anfangsdaten  $K(0) = K_0 > 2\sqrt{-G}$  und  $K'(0) = 0$  oder  $G \geq 0$ , den Anfangsbedingungen  $K(0) = K_0$  beliebig und  $K'(0) = 0$ , dann gilt*

$$K(s) = K_0 \operatorname{cn}(rs, k)$$

mit

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{G + \frac{1}{2}K_0^2} \\
k &= \frac{K_0}{2r}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist  $K$  periodisch.

*Beweis.* Zuerst überzeugt man sich, dass  $K$  wohldefiniert ist, indem man prüft, dass  $k \in (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} k &= \frac{K_0}{2r} = \frac{K_0}{2\sqrt{G + \frac{1}{2}K_0^2}} \\ &= \sqrt{\frac{K_0^2}{4(G + \frac{1}{2}K_0^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\frac{4G}{K_0^2} + 2}} \begin{cases} < 1, & \text{denn } \frac{4G}{K_0^2} < -1 \\ > \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{denn } \frac{4|G|}{K_0^2} < 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Jetzt werden die Ableitungen von  $K$  berechnet:

$$\begin{aligned} K'(s) &= -K_0 r \operatorname{dn}(rs, k) \operatorname{sn}(rs, k) \\ K''(s) &= -K_0 r (-k^2 r \operatorname{sn}^2(rs, k) \operatorname{cn}(rs, k) + r \operatorname{dn}^2(rs, k) \operatorname{cn}(rs, k)) \\ &= -K_0 r \operatorname{cn}(rs, k) (-k^2 r \operatorname{sn}^2(rs, k) + r(1 - k^2 \operatorname{sn}^2(rs, k))) \\ &= -K_0 r^2 (\operatorname{cn}(rs, k) - 2k^2 \operatorname{cn}(rs, k) \operatorname{sn}^2(rs, k)) \end{aligned}$$

Nun werden die Anfangsdaten geprüft:

$$\begin{aligned} K(0) &= K_0 \operatorname{cn}(r0, k) = K_0 \cos(0) = K_0 \\ K'(0) &= -K_0 r \operatorname{dn}(0, k) \operatorname{sn}(0, k) = 0. \end{aligned}$$

Jetzt muss nur noch überprüft werden, dass  $K$  (2.1) erfüllt, der Rest folgt aus dem Eindeutigkeitssatz.

$$\begin{aligned} K'' - K + \frac{1}{2}K^3 &= -K_0 r^2 (\operatorname{cn} - 2k^2 \operatorname{cn} \operatorname{sn}^2) + GK_0 \operatorname{cn} + \frac{1}{2}K_0^3 \operatorname{cn}^3 \\ &= K_0 \left( -r^2 + 2k^2 r^2 \operatorname{sn}^2 + G + \frac{1}{2}K_0^2 \operatorname{cn}^2 \right) \operatorname{cn} \\ &= K_0 \left( -G - \frac{1}{2}K_0^2 + \frac{1}{2}K_0^2 \operatorname{sn}^2 + G + \frac{1}{2}K_0^2 \operatorname{cn}^2 \right) \operatorname{cn} \\ &= K_0 \left( -\frac{1}{2}K_0^2 + \frac{1}{2}K_0^2 \right) \operatorname{cn} = 0. \end{aligned}$$

□

**Theorem 2.13** (siehe auch [6] Tabelle 2.7c). *Die eindeutige Lösung zu (2.1) mit  $G < 0$  und den Anfangsdaten  $K_0 = 2\sqrt{-G}$ ,  $K'_0 = 0$  ist*

$$K(s) = \frac{2\sqrt{-G}}{\cosh(\sqrt{-G}s)}.$$

*Beweis.* Man berechnet die Ableitungen von  $K$  und setzt diese danach in (2.1) ein.

$$\begin{aligned} K'(s) &= -\sinh(\sqrt{-G}s) \frac{2(-G)}{\cosh^2(\sqrt{-G}s)} \\ K''(s) &= 2G\sqrt{-G} \left( \frac{1}{\cosh(\sqrt{-G}s)} - \sinh^2(\sqrt{-G}s) \frac{2}{\cosh^3(\sqrt{-G}s)} \right), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} K'' + GK + \frac{1}{2}K^3 &= \sqrt{-G} \left( -2(-G) \left( \frac{1}{\cosh(\sqrt{-G}s)} - 2 \frac{\sinh^2(\sqrt{-G}s)}{\cosh^3(\sqrt{-G}s)} \right) \right. \\ &\quad \left. + G \frac{2}{\cosh(\sqrt{-G}s)} - 4G \frac{1}{\cosh(\sqrt{-G})} \right) \\ &= G\sqrt{-G} \left( \frac{4}{\cosh} - 4 \frac{\cosh^2 - 1}{\cosh^3} - 4 \frac{1}{\cosh^3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Die Anfangsdaten ergeben außerdem

$$K(0) = \frac{2\sqrt{-G}}{\cosh(0)} = 2\sqrt{-G}, \quad K'(0) = -\sinh(0) \frac{-2G}{\cosh^2(0)} = 0.$$

Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, da die rechte Seite der Gleichung von (2.1) ein Polynom, damit glatt in  $K$  ist.  $\square$

### 3 Einschub: Killing-Vektorfelder

In diesem Abschnitt werden die sogenannten Killing-Vektorfelder erarbeitet. Dies beruht dabei auf [7] und [5]. Ziel ist es hierbei Paragraph 4 vorzubereiten, denn dort wird entlang einer elastischen Kurve ein Killing-Vektorfeld gefunden, welches zentral beim Verstehen von globalen Eigenschaften einer solchen Kurve ist.

Dafür sei im folgenden Abschnitt stets  $(M, g)$  eine zweidimensionale Riemannsche Fläche.

**Definition 3.1** (siehe [7] Seite 332). Sei  $f : M \rightarrow M$  eine Abbildung.  $f$  ist eine Isometrie genau dann wenn

$$\forall p \in M, \forall V, W \in T_p M : g_{f(p)}(df(p)(V), df(p)(W)) = g_p(V, W).$$

**Definition 3.2** (siehe [7] Seite 209). Sei  $V$  ein glattes Vektorfeld auf  $M$ . Eine Abbildung  $\Theta_V : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  heißt Fluss von  $V$  genau dann wenn  $\forall p \in M$  und  $\forall t \in \mathbb{R}$  gilt, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Theta_V(p, t) &= V(\Theta_V(p, t)) \\ \Theta_V(p, 0) &= p. \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.3.** Relaxiert man die Bedingung an die Funktion  $\Theta_V$  in Definition 3.2 daraufhin nur ein Intervall anstatt ganz  $\mathbb{R}$  zu benutzen, kann mit dem Satz von Picard-Lindelöf gezeigt werden, dass für alle glatten Vektorfelder ein eindeutiger Fluss existiert (siehe [7] Satz 9.12). Für die hiesigen Betrachtungen reicht allerdings obige spezielle Definition.

**Definition 3.4** (siehe [7] Seite 206). Sei  $V$  ein glattes Vektorfeld mit Fluss  $\Theta_V$  auf  $M$ . Sei  $p \in M$  fixiert, dann nennt man  $t \mapsto \Theta_V(p, t)$  Integralkurve von  $V$ .

**Definition 3.5** (Killing-Vektorfeld, [7] Übung 13.13). Sei  $V$  ein glattes Vektorfeld auf  $M$  mit eindeutigem Fluss  $\Theta_V$ .  $V$  heißt Killing-Vektorfeld genau dann, wenn der zugeordnete Fluss  $\Theta_V(\cdot, t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  eine Isometrie nach Definition 3.1 ist.

**Bemerkung 3.6.** In dieser Vorlesung sind nur Killing-Vektorfelder in der Sphäre, im  $\mathbb{R}^2$  oder der hyperbolischen Geometrie von Interesse. Alle diese Mannigfaltigkeiten besitzen keinen Rand. Definition 3.1 bzw. 3.2 implizieren  $\forall t$  mit

$$\begin{aligned} g_p(V(p), V(p)) &= g_p(d\Theta_V(p, 0)V, d\Theta_V(p, 0)V) = g_{\Theta_V(p, t)}(d\Theta_V(p, t)V, d\Theta_V(p, t)V) \\ &= g_{\Theta_V(p, t)}(V(\Theta_V(p, t)), V(\Theta_V(p, t))), \end{aligned}$$

dass Integralkurven eines Killing-Vektorfeldes proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Damit kann es in endlicher Zeit nicht zu einem 'blow-up' kommen, sodass Bemerkung 3.3 hier gerechtfertigt ist.

Um Killing-Vektorfelder effektiv berechnen zu können, ist folgender Satz von zentraler Bedeutung.

**Theorem 3.7** (siehe [5] 1.6.7). Sei  $V$  ein glattes Vektorfeld auf  $M$ . Dann ist  $V$  ein Killing-Vektorfeld genau dann, wenn in lokalen Koordinaten gilt

$$\forall i, j = 1, 2 : \sum_{k=1}^2 \left( V^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{jk} \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial V^k}{\partial x^j} \right) = 0.$$

*Beweis.* Sei  $\Theta_V$  der zu  $V$  zugehörige Fluss nach Definition 3.2. Sei außerdem  $p \in M$ ,  $F$  eine Karte von  $M$ ,  $u := F^{-1}(p)$ , und  $t \in \mathbb{R}$ . Sei weiterhin

$$A_i^j(p, t) := \left( d\Theta_V(p, t) \frac{\partial F}{\partial x^i}(u) \right)^j$$

das Differential von  $\Theta_V$  in lokalen Koordinaten.

Nun berechnet man die Ableitung von  $A_i^j$  nach  $t$ : Sei dafür  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine Kurve mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(u)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( d\Theta_V(p, t) \frac{\partial F}{\partial x^i} \right) \Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} (\Theta_V(c(s), t)) \Big|_{s=0} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (V(c(s))) \Big|_{s=0} \end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Kettenregel in lokalen Koordinaten

$$\frac{\partial}{\partial t} A_i^j(p, t) \Big|_{t=0} = \sum_{\ell=1}^2 \delta_{i\ell} \frac{\partial V^j}{\partial x^\ell} = \frac{\partial V^j}{\partial x^i}. \quad (3.1)$$

' $\Rightarrow$ ' Sei  $\Theta_V$  eine Isometrie, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} (g_{ij}(p)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \left( g_{\Theta_V(p,t)} \left( d\Theta_V(p, t) \frac{\partial F}{\partial x^i}, d\Theta_V(p, t) \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k,\ell=1}^2 A_i^\ell(p, t) g_{k\ell}(\Theta_V(p, t)) A_j^k(p, t) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \left( \sum_{k,\ell=1}^2 \frac{\partial}{\partial t} A_i^\ell(p, t) g_{k\ell}(\Theta_V(p, t)) A_j^k(p, t) + A_i^\ell(p, t) g_{k\ell}(\Theta_V(p, t)) \frac{\partial}{\partial t} A_j^k(p, t) \right. \\ &\quad \left. + A_i^\ell A_j^k \frac{\partial}{\partial t} (g_{k\ell}(\Theta_V(p, t))) \right) \Big|_{t=0} \\ &\stackrel{(3.1)}{=} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial V^k}{\partial x^i}(p) g_{kj}(p) + \frac{\partial V^k}{\partial x^j}(p) g_{ki}(p) + \left( \sum_{m,k,\ell=1}^2 A_i^\ell(p, t) A_j^k(p, t) V^m \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^m} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial V^k}{\partial x^i} g_{kj} + \frac{\partial V^k}{\partial x^j} g_{ki} + V^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

' $\Leftarrow$ ' Es gelten nun die Differentialgleichungen. Seien  $W_1, W_2 \in T_p M$  beliebig. Mit obiger Rechnung gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} (g_{\Theta_V(p,t)} (d\Theta_V(p, t) W_1, d\Theta_V(p, t) W_2)) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i,j} W_1^i W_2^j \frac{\partial}{\partial t} \left( g_{\Theta_V(p,t)} \left( d\Theta_V(p, t) \frac{\partial F}{\partial x^i}, d\Theta_V(p, t) \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \right) \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Sei nun  $t_0 \in \mathbb{R}$  beliebig aber fest, dann gilt

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial t} \left( g_{\Theta_V(p,t)} \left( d\Theta_V(p,t) \frac{\partial F}{\partial x^i}, d\Theta_V(p,t) \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \right) \right|_{t=t_0} \\
\stackrel{t=s+t_0}{=} & \left. \frac{\partial}{\partial s} \left( g_{\Theta_V(p,t_0+s)} \left( d\Theta_V(p,t_0+s) \frac{\partial F}{\partial x^i}, d\Theta_V(p,t_0+s) \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \right) \right|_{s=0} \\
= & \left. \frac{\partial}{\partial s} \left( g_{\Theta_V(\Theta_V(p,t_0),s)} \left( d\Theta_V(\Theta_V(p,t_0),s) \underbrace{d\Theta_V(p,t_0) \frac{\partial F}{\partial x^i}}_{:=W_i}, \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. d\Theta_V(\Theta_V(p,t_0),s) \underbrace{d\Theta_V(p,t_0) \frac{\partial F}{\partial x^j}}_{:=W_j} \right) \right) \right|_{s=0} \\
\stackrel{p'=\Theta_V(p,t_0)}{=} & \left. \frac{\partial}{\partial s} \left( g_{\Theta_V(p',s)} (d\Theta(p',s)W_i, d\Theta_V(p',s)W_j) \right) \right|_{s=0} = 0.
\end{aligned}$$

□

Folgendes Beispiel ist zentral für die späteren Überlegungen.

**Beispiel 3.8.** Ein Vektorfeld  $V$  auf der hyperbolischen Halbebene  $\mathbb{H}^2$  (Metrik  $g_{ij}(x,y) = \frac{1}{y^2} \delta_{ij}$ ) ist ein Killing-Vektorfeld genau dann, wenn es folgende Gestalt besitzt:

$$V(x,y) = a \begin{pmatrix} \frac{x^2-y^2}{2} \\ xy \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $a, b, c \in \mathbb{R}$  beliebig sind.

*Beweis.* Die Killing-Bedingung aus Satz 3.7 wird in der hyperbolischen Halbebene zu folgendem System partieller Differentialgleichungen

$$0 = \frac{2}{y^2} \left( -\frac{V^2}{y} + \frac{\partial V^1}{\partial x} \right) \quad (3.2)$$

$$0 = \frac{2}{y^2} \left( -\frac{V^2}{y} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \right) \quad (3.3)$$

$$0 = \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial V^2}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right). \quad (3.4)$$

Die zweite Gleichung lässt sich elementar integrieren und man erhält:

$$V^2(x,y) = yf(x),$$

wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine hinreichend glatte von  $y$  unabhängige Funktion ist. Einsetzen in die dritte Gleichung liefert dann

$$\frac{\partial V^2}{\partial x} = yf'(x) = -\frac{\partial V^1}{\partial y}.$$

Diese Bedingung an  $V^1$  kann ebenfalls elementar integriert werden und liefert so

$$V^1(x,y) = -\frac{1}{2}y^2 f'(x) + g(x),$$

wobei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls eine hinreichend glatte Funktion ist. Die erste Gleichung gibt nun eine Bedingung an  $f$  und  $g$ :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ : -f(x) - \frac{1}{2}y^2 f''(x) + g'(x) = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung zweimal nach  $y$ , erhält man  $f''(x) = 0$  und damit auch  $g'(x) = f(x)$ . Also gilt mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  beliebig

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ g(x) &= \frac{1}{2}ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 3.9.** Der Raum aller Killing-Vektorfelder auf der Sphäre oder im  $\mathbb{R}^2$  ist ebenfalls dreidimensional. Auf der Sphäre kann man um die  $e_1, e_2$  bzw.  $e_3$  Achsen rotieren. In der Ebene kann man in die  $e_1$  bzw.  $e_2$  Richtung translatieren sowie um einen festen Punkt rotieren.

## 4 Ordnungsreduktion nach Langer&Singer

Hier werden wir die Ableitungsordnung der Euler-Lagrange-Gleichung mithilfe einer Methode von Langer&Singer, siehe [6, Prop. 2.1], weiter reduzieren. Die Aussage lautet wie folgt:

**Theorem 4.1** (siehe [6] Proposition 2.1). *Sei  $(M, g)$  eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Gaußkrümmung. Sei weiterhin  $\gamma : I \rightarrow M$  eine reguläre, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, dessen Krümmung  $K$  Lösung der Differentialgleichung (2.1) ist. Sei  $T$  das Tangentialvektorfeld entlang  $\gamma$  und  $N$  das Einheitsnormalenvektorfeld zu  $T$ , mit dem  $K$  definiert wurde. Dann lässt sich das Vektorfeld*

$$J_\gamma = K^2 T + 2 \frac{dK}{ds} N$$

*entlang  $\gamma$  zu einem eindeutigen Killing-Vektorfeld nach  $M$  fortsetzen.*

Für den Beweis werden wir wieder eine Kurve  $\gamma : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  variieren. Dafür wiederholen wir kurz die Notationen aus Abschnitt 1: Der Scharparameter heißt  $w \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , während der Parameter der Kurven  $s \in I$  heißt. Weiter heißen

$$\begin{aligned} V(w, s) &:= \frac{\partial}{\partial s} \gamma(w, s) \text{ die Tangente der Kurve} \\ v(w, s) &:= |V(w, s)|_g \text{ die Geschwindigkeit,} \\ T(w, s) &:= \frac{V(w, s)}{v(w, s)} \text{ die Einheitstangente,} \\ W(w, s) &:= \frac{\partial \gamma}{\partial w}(w, s) \text{ das Variationsvektorfeld} \end{aligned}$$

und  $\kappa(w, s)$  sei die geodätische Krümmung bezüglich der  $s$ -Variablen.



**Lemma 4.2.** Sei  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow M$  eine glatte Familie von Kurven wie oben. Es gelte zusätzlich, dass

$$\frac{\partial v}{\partial w} = 0 \text{ und } \frac{\partial \kappa^2}{\partial w} = 0.$$

Dann erfüllt das Vektorfeld  $W(0, \cdot)$  entlang  $\gamma(0, \cdot)$  eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung, dessen Lösungsraum dreidimensional ist.

*Beweis.* Seien  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatte Funktionen, sodass  $W(0, s) = \alpha(s)T(0, s) + \beta(s)N(0, s)$ . Dann gilt mit Lemma 1.2 und den Frenet-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_T W, T) = g(\nabla_T(\alpha T + \beta N), T) \\ &= g(\alpha' T + \alpha \nabla_T T + \beta' N + \beta \nabla_T N, T) \\ &= \alpha' - \kappa \beta. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \nabla_T \nabla_T W &= \alpha'' T + 2\alpha' \nabla_T T + \alpha \nabla_T \nabla_T T \\ &\quad + \beta'' N + 2\beta' \nabla_T N + \beta \nabla_T \nabla_T N \\ &= \alpha'' T + 2\alpha' \nabla_T T + \alpha(\kappa' N + \kappa \nabla_T N) \\ &\quad + \beta'' N + 2\beta' \nabla_T N + \beta(-\kappa \nabla_T T - \kappa' T). \end{aligned}$$

Dies impliziert wieder mit Lemma 1.2 und  $G$  der Gauß-Krümmung von  $M$ , dass

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + Gg(g(T, T)W - g(T, W)T, \nabla_T T) \\ &= 2\alpha' \kappa^2 + \kappa \beta'' + \alpha \kappa \kappa' - \beta \kappa^3 + G\beta \kappa. \end{aligned}$$

Setzt man  $\phi = \beta'$  erhält man folgendes System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \phi' &= -\beta \kappa^2 - \alpha \kappa' - G\beta \\ \alpha' &= \kappa \beta \\ \beta' &= \phi \end{cases}$$

□

**Lemma 4.3.** Sei  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow M$  eine glatte Familie von Kurven mit denselben Notationen wie in Lemma 4.2. Sei zusätzlich das Vektorfeld  $W$  ein Killing-Vektorfeld. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= 0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $p \in M$  fixiert aber beliebig. Für den gesamten Beweis führt man Riemannsche Normalkoordinaten in  $p$  ein. Die Christoffelsymbole transformieren sich dabei wie folgt

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{\ell} g^{k\ell} \left( \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right) = 0, \\ \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^\ell} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^\ell} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^\ell} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^\ell} \right). \end{aligned}$$

Die Killing Differentialgleichung Satz 3.7 erhalten dann folgende Gestalt:

$$0 = \frac{\partial V^j}{\partial x^i} + \frac{\partial V^i}{\partial x^j}.$$

Differenziert man diese Gleichung erhält man in Riemannschen Normalkoordinaten

$$0 = \frac{\partial^2 V^j}{\partial x^i \partial x^\ell} + \frac{\partial^2 V^i}{\partial x^j \partial x^\ell} + \sum_k V^k \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^\ell}.$$

Für die erste Aussage genügt es mithilfe von Lemma 1.2 folgende Rechnung durchzuführen:

$$\begin{aligned} g(\nabla_T W, T) &= \sum_{i,j} \frac{\partial W^i}{\partial x^j} T^j T^i = - \sum_{i,j} \frac{\partial W^j}{\partial x^i} T^j T^i \\ &\stackrel{i \leftrightarrow j}{=} - \sum_{i,j} \frac{\partial W^i}{\partial x^j} T^i T^j = -g(\nabla_T W, T). \end{aligned}$$

Also muss  $g(\nabla_T W, T) = 0$  sein. Für die zweite Formel wendet man wieder Lemma 1.2 an, nutzt hier zusätzlich, dass für den Riemannschen Krümmungstensor in zwei Dimensionen gilt

$$R(A, B)C = G(g(C, B)A - g(C, A)B), \quad (4.1)$$

wobei  $A, B, C$  Tangentialvektorfelder sind und  $G$  die Gaußkrümmung bezeichnet.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2g(R(W, T)T, \nabla_T T) - 4g(\nabla_T W, T) \kappa^2 \\ &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2Gg(g(T, T)W - g(W, T)T, \nabla_T T) \\ &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2Gg(W, \nabla_T T). \end{aligned}$$

Die kovarianten Ableitungen von  $W$  berechnen sich in diesen Koordinaten in  $p$  zu:

$$\begin{aligned} (\nabla_T W)^i &= \sum_j \left( \frac{\partial W^i}{\partial x^j} T^j + \sum_k \Gamma_{kj}^i W^k T^j \right) = \sum_j \frac{\partial W^i}{\partial x^j} T^j \\ (\nabla_T \nabla_T W)^m &= \sum_\ell \left( \frac{\partial}{\partial x^\ell} \left( \sum_j \frac{\partial W^m}{\partial x^j} T^j + \sum_k \Gamma_{kj}^m W^k T^j \right) \right) T^\ell \\ &= \sum_\ell \left( \sum_j \left( \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} T^j T^\ell + \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell + \sum_k \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial x^\ell} T^\ell W^k T^j \right) \right) \end{aligned}$$

Für den dritten Term benötigen wir den Riemannschen Krümmungstensor in Normalkoordinaten:

$$R_{ijk}^\ell = \frac{\partial \Gamma_{kj}^\ell}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^\ell}{\partial x^j} + \sum_m (\Gamma_{mi}^\ell \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{mj}^\ell \Gamma_{ki}^m) = R_{ijk}^\ell = \frac{\partial \Gamma_{kj}^\ell}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^\ell}{\partial x^j}.$$

Mit den durchdifferenzierten Killing-Differentialgleichungen in  $p$  ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell,k,j} \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial x^\ell} W^k T^j T^\ell &= \sum_{\ell,k,j} \left( R_{\ell kj}^m + \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^m}{\partial x^k} \right) W^k T^j T^\ell \\
&= \sum_{\ell,k,j} R_{\ell kj}^m W^k T^j T^\ell \\
&\quad + \sum_{\ell,k,j} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{jm}}{\partial x^\ell \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{\ell m}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{j\ell}}{\partial x^m \partial x^k} \right) W^k T^j T^\ell \\
&= G \sum_{\ell,k,j} (g_{kj} \delta_\ell^m - g_{\ell j} \delta_k^m) W^k T^j T^\ell \\
&\quad + \sum_{\ell,j} \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial^2 W^j}{\partial x^m \partial x^\ell} - \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} - \frac{\partial^2 W^\ell}{\partial x^j \partial x^m} - \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^\ell \partial x^j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 W^j}{\partial x^\ell \partial x^m} + \frac{\partial^2 W^\ell}{\partial x^j \partial x^m} \right) T^j T^\ell \\
&= G (g(W, T) T^m - g(T, T) W^m) - \sum_{\ell,j} \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} T^j T^\ell \\
&= G (g(W, T) T^m - W^m) - \sum_{\ell,j} \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} T^j T^\ell
\end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich  $g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T)$  mithilfe der Frenet-Gleichungen zu:

$$\begin{aligned}
g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) &= -Gg(W, \nabla_T T) + \sum_m \left( \sum_{j,\ell} \left( \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} T^j T^\ell + \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{\ell,j} \frac{\partial^2 W^m}{\partial x^j \partial x^\ell} T^j T^\ell \right) \right) \left( \sum_i \frac{\partial T^m}{\partial x^i} T^i \right) \\
&= -Gg(W, \nabla_T T) + \sum_{j,i,\ell,m} \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell \frac{\partial T^m}{\partial x^i} T^i
\end{aligned}$$

Der zweite Term vereinfacht sich mithilfe der Killing-Bedingung zu:

$$\begin{aligned}
\sum_{j,i,\ell,m} \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell \frac{\partial T^m}{\partial x^i} T^i &= - \sum_{j,i,\ell,m} \frac{\partial W^j}{\partial x^m} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell \frac{\partial T^m}{\partial x^i} T^i \\
&\stackrel{m \leftrightarrow j}{=} - \sum_{j,i,\ell,m} \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^m}{\partial x^\ell} T^\ell \frac{\partial T^j}{\partial x^i} T^i \\
&\stackrel{\ell \leftrightarrow i}{=} - \sum_{j,i,\ell,m} \frac{\partial W^m}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial x^\ell} T^\ell \frac{\partial T^m}{\partial x^i} T^i
\end{aligned}$$

Also ist dieser Term gleich 0. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2Gg(W, \nabla_T T) \\
&= -2Gg(W, \nabla_T T) + 2Gg(W, \nabla_T T) = 0.
\end{aligned}$$

□

Kommen wir nun zum Beweis von Theorem 4.1.

*Beweis.* Zuallererst bemerkt man die Wohldefiniertheit des Vektorfeldes  $J_\gamma$  unter Wechsel der Normale  $N$ . Da  $\mathbb{H}^2$  Dimension zwei besitzt, ändert sich bei einem Wechsel zu einem anderen Normalenvektorfeld lediglich das Vorzeichen von  $N$  und damit sofort auch von  $K$ .

Man führt für die Kurve  $\gamma$  folgende Variation in Richtung  $J_\gamma$  ein und nutzt nun die Notationen aus Lemma 4.2 bzw. 1.2:

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$(w, s) \mapsto \gamma(w, s) := \gamma(s) + wJ_\gamma(s)$$

Für  $J_\gamma$  gilt folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen für  $w = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial K^2}{\partial w} = 0, \quad (4.2)$$

denn mit Lemma 1.2 gilt in  $w = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w} &= g(\nabla_T J_\gamma, T)v \\ &= g\left(2K \frac{\partial K}{\partial s} T + K^2 \nabla_T T + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} N + 2 \frac{\partial K}{\partial s} \nabla_T N, T\right)v \\ &= \left(2K \frac{\partial K}{\partial s} - 2K \frac{\partial K}{\partial s}\right)v = 0. \end{aligned}$$

Mit (4.1) gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \frac{\partial K^2}{\partial w} &= 2g(\nabla_T \nabla_T J_\gamma, \nabla_T T) + 2g(R(J_\gamma, T)T, \nabla_T T) \\ &\stackrel{\text{Frenet}}{=} 2g\left(\nabla_T \left(2K \frac{\partial K}{\partial s} T + K^2 \nabla_T T + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} N - 2 \frac{\partial K}{\partial s} \nabla_T N\right), \nabla_T T\right) \\ &\quad + 2Gg(g(T, T)J_\gamma - g(J_\gamma, T)T, \nabla_T T) \\ &= 2g\left(2 \left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)^2 T + 2K \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} T + 2K \frac{\partial K}{\partial s} \nabla_T T\right. \\ &\quad \left.+ 3K^2 \frac{\partial K}{\partial s} N + K^3 \nabla_T N\right. \\ &\quad \left.+ 2 \frac{\partial^3 K}{\partial s^3} N + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \nabla_T N\right. \\ &\quad \left.- 2 \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \nabla_T T - 2 \left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)^2 T - 2 \frac{\partial K}{\partial s} K \nabla_T T, \nabla_T T\right) \\ &\quad + 2Gg(J_\gamma - g(J_\gamma, T)T, \nabla_T T) \\ &\stackrel{\text{Frenet}}{=} 2\left(3K^3 \frac{\partial K}{\partial s} + 2K \frac{\partial^3 K}{\partial s^3}\right) + 4G \frac{\partial K}{\partial s} K \\ &= 6K^3 \frac{\partial K}{\partial s} + 4K \frac{\partial^3 K}{\partial s^3} + 4G \frac{\partial K}{\partial s} K \\ &\stackrel{(2.1)}{=} 6K^3 \frac{\partial K}{\partial s} + 4K \left(-G \frac{\partial K}{\partial s} - \frac{3}{2} K^2 \frac{\partial K}{\partial s}\right) + 4G \frac{\partial K}{\partial s} K = 0. \end{aligned}$$

Gleichung (4.2) bildet für  $J_\gamma$  mithilfe von Lemma 4.2 einen 3-dimensionalen Lösungsraum einer gewöhnlichen Differentialgleichung für  $J_\gamma$  entlang  $\gamma$ . Außerdem gilt (4.2) mithilfe von Lemma 4.3 für alle Killing-Vektorfelder eingeschränkt auf  $\gamma$ . Mit Bemerkung 3.9 erhält man, dass die Dimension aller Lösungen der Killing-Bedingungen auf  $M$  ebenfalls drei ist. Es bleibt also noch zu zeigen, dass die Vektorfelder aus Beispiel 3.8 auch eingeschränkt auf eine Kurve linear unabhängig sind, denn damit existiert dann ein eindeutiges Killing-Vektorfeld, das eingeschränkt auf  $\gamma$  gleich  $J_\gamma$  ist.

Für die sphärische und euklidische Geometrie gelten dieselben Argumente wie in Bemerkung 3.9. Der hyperbolische Fall ist schwerer vorzustellen, weswegen wir diesen hier explizit durchrechnen:

Sei also  $z(t) = (x(t), y(t))$  eine reguläre Kurve in  $\mathbb{H}^2$ . Angenommen entlang von  $z$  sind die drei Vektorfelder aus Beispiel 3.8 linear abhängig, dann existieren nichttriviale Faktoren  $a, b, c$ , sodass gilt:

$$0 = a \begin{pmatrix} \frac{x^2 - y^2}{2} \\ xy \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also gilt, dass

$$0 = axy + by = y(ax + b).$$

Da  $y = 0 \notin \mathbb{H}^2$  muss  $x(t)$  eine konstante Funktion sein oder  $a, b = 0$ . Letzteres wäre mit der anderen Gleichung allerdings bereits ein Widerspruch. Aus der anderen Gleichung folgt damit wiederum

$$0 = a \frac{x^2 - y^2}{2} + bx + c = a \frac{x^2 - y^2}{2} - ax^2 + c = -a \frac{x^2 + y^2}{2} + c.$$

Dies impliziert aber mit  $a \neq 0$

$$y^2 = \frac{c}{2a} - x^2,$$

womit  $y(t)$  ebenfalls eine konstante Funktion ist. Dies bedeutet, dass die Kurve  $z$  nicht regulär ist, also ein Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung 4.4.** Mithilfe von Theorem 4.1 können qualitative und quantitative Eigenschaften von elastischen Kurven herausgearbeitet werden. Z.B.:

Falls  $K(s)$  extremal ist, dann gilt für die Integralkurve von  $J$ , welche in  $\gamma(s)$  startet, dass diese die gesamte elastische Kurve begrenzt. Dies wird zumindestens heuristisch dadurch klar, dass in einem solchen Punkt gilt, dass  $J_\gamma$  und  $\dot{\gamma}$  kollinear sind. Diese Integralkurve hat weiterhin konstante geodätische Krümmung (welche explizit berechenbar ist!) und benimmt sich euklidisch gesehen wie ein Kreis.

Falls andererseits  $K$  eine Nullstelle besitzt, so gilt  $J_\gamma \perp \dot{\gamma}$ . Man kann zeigen, dass die Integralkurve von  $J$  durch diesen Punkt eindeutig und eine Geodäte ist (d.h. geodätische Krümmung gleich Null besitzt).

## 5 Einschub: Die direkte Methode der Variationsrechnung

Die Aufgabe der Variationsrechnung ist es extreme Punkte von Funktionalen zu konstruieren. Mit einer Rechnung wie in Satz 1.2 erfüllen diese Punkte dann eine Euler-Lagrange Gleichung. Diese ist auf unendlich dimensionalen Räumen im Normalfall eine Differentialgleichung, also beweist man so Existenz von Lösungen! Weiterführende Literatur für variationelle Methoden und ihre Anwendung im Bereich der Differentialgleichung ist das Buch von Michael Struwe [8].

Hier werden wir diese Methode in einem separablen, reellen Hilbertraum  $H$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für ein Funktional  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  entwickeln. Gesucht ist also ein  $p \in H$ , sodass

$$\inf_{q \in H} F(q) = F(p).$$

Die Methode funktioniert nun wie folgt: Man nehme eine sogenannte Minimalfolge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ , sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(p_n) = \inf_{q \in H} F(q).$$

Das Ziel besteht nun darin, Kompaktheitseigenschaften der Folge und dazu passende Stetigkeit des Funktionals nachzuweisen, sodass der Grenzwert von  $p_n$  ein Minimum von  $F$  ist. Zuerst werden wir uns um die Kompaktheit kümmern. Da  $H$  i.A. aber unendlich dimensional ist, kann man aus einer beschränkten Folge normalerweise keine normkonvergente Teilfolge extrahieren. Deswegen führen wir nun schwache Konvergenz ein:

**Definition 5.1.** Sei  $H$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Eine Folge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt schwach konvergent zu einem  $p \in H$ , falls für alle  $q \in H$  gilt

$$\langle p_n, q \rangle \rightarrow \langle p, q \rangle.$$

In Zeichen:

$$p_n \rightharpoonup p.$$

**Bemerkung 5.2.** Falls  $p_n \rightarrow p$  normkonvergent ist, gilt auch  $p_n \rightharpoonup p$ .

*Beweis.* Mit der Cauchy-Schwartz Ungleichung gilt für  $q \in H$

$$|\langle p_n, q \rangle - \langle p, q \rangle| = |\langle p_n - p, q \rangle| \leq \|p_n - p\| \|q\| \rightarrow 0.$$

□

Der nächste Satz ist der zentrale Satz um schwach konvergente Teilfolge aus normbeschränkten Folgen zu extrahieren:

**Theorem 5.3.** Sei  $H$  ein separabler, reeller Hilbertraum. Sei weiterhin  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ , sodass ein  $C > 0$  existiert mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \|p_n\| \leq C.$$

Dann existiert eine Teilfolge  $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$  und ein  $p \in H$ , sodass

$$p_{n_j} \rightharpoonup p, \quad j \rightarrow \infty.$$

*Beweis.* Sei  $\{q_\ell, \ell \in \mathbb{N}\} \subset H$ , dicht in  $H$ . Dann gilt mit Cauchy-Schwartz

$$|\langle p_n, q_\ell \rangle| \leq C \|q_\ell\|.$$

Mit Bolzano-Weierstraß können nun sukzessive konvergente Teilfolgen ausgewählt werden, sodass man folgendes erhält

$$\begin{array}{ccccccc} \langle p_{1_1}, q_1 \rangle, & \langle p_{1_2}, q_1 \rangle, & \langle p_{1_3}, q_1 \rangle, & \dots & \rightarrow & f(q_1) \\ \langle p_{2_1}, q_2 \rangle, & \langle p_{2_2}, q_2 \rangle, & \langle p_{2_3}, q_1 \rangle, & \dots & \rightarrow & f(q_2) \\ \langle p_{3_1}, q_3 \rangle, & \langle p_{3_2}, q_3 \rangle, & \langle p_{3_3}, q_3 \rangle, & \dots & \rightarrow & f(q_3) \\ \vdots & & \ddots & & & \end{array}$$

Hierbei ist  $n_j$  eine Teilfolge von  $k_j$ , falls  $n \geq k$ . Wählt man nun die Diagonalelemente aus, d.h. sei o.E.

$$p_n := p_{n_n}$$

so gilt

$$\langle p_n, q_\ell \rangle \rightarrow f(q_\ell).$$

Dies definiert eine Funktion  $f : \{q_\ell, \ell \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Da die  $q_\ell$  dicht in  $H$  liegen, können wir  $f$  auf  $H$  stetig fortsetzen. Sei dafür  $q \in H$  beliebig. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig und  $q_\ell$ , so dass  $\|q - q_\ell\| < \varepsilon$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{n,j \rightarrow \infty} |\langle p_n, q \rangle - \langle p_j, q \rangle| &\leq \limsup_{n,j \rightarrow \infty} |\langle p_n, q - q_\ell \rangle| + |\langle p_n - p_j, q_\ell \rangle| \\ &\quad + |\langle p_j, q_\ell - q \rangle| \leq 2C\varepsilon \end{aligned}$$

Also ist  $\langle p_n, q \rangle$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$ , besitzt also einen Grenzwert  $f(q)$ . Damit gilt nun

$$\forall q \in H : \langle p_n, q \rangle \rightarrow f(q), \quad n \rightarrow \infty.$$

$f$  ist linear, dies folgt sofort aus der Linearität des Skalarprodukts. Nun muss noch gezeigt werden, dass  $f$  stetig ist:

$$|f(q)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle p_n, q \rangle| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n\| \|q\| \leq C \|q\|.$$

Mit dem Darstellungssatz von Riesz für Hilberträume existiert also ein  $p \in H$ , sodass für alle  $q \in H$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle p_n, q \rangle = f(q) = \langle p, q \rangle.$$

□

**Bemerkung 5.4.** Theorem 5.3 kann mithilfe des Satzes von Eberlein-Smulian auf reflexive Banachräume erweitert werden.

Nun definieren wir die Eigenschaften an das Funktional  $F$ , damit die direkte Methode der Variationsrechnung anwendbar wird. Die erste Eigenschaft dient dazu, aus einer Schranke für ein Funktional, eine Schranke für die Minimalfolge herzuleiten:

**Definition 5.5.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir nennen  $F$  koerzitiv, falls für alle Folgen  $p_n \in H$  mit

$$\|p_n\| \rightarrow \infty$$

gilt

$$F(p_n) \rightarrow \infty.$$

Nun kommen wir zur Stetigkeitseigenschaft von  $F$ :

**Definition 5.6.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ .  $F$  heißt schwach unterhalbstetig, falls für alle schwach konvergenten Folgen  $p_n \rightharpoonup p$  in  $H$  gilt

$$F(p) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(p_n).$$

Folgender Satz ist von zentraler Bedeutung um schwache Unterhalbstetigkeit in der Anwendung zu beweisen:

**Theorem 5.7.** Sei  $H$  ein Hilbertraum. Dann ist die vom Skalarprodukt induzierte Norm  $\|\cdot\|$  schwach unterhalbstetig.

*Beweis.* Sei  $p_n \rightharpoonup p$ . Dann gilt

$$\|p\|^2 = \langle p, p \rangle = \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle p_n, p \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|p_n\| \|p\|,$$

woraus die Aussage sofort folgt.  $\square$

Nun fassen wir die erarbeitete Technik im folgenden Satz zusammen. Dabei ist die Beweistechnik von deutlich größerer Bedeutung als die Aussage selber.

**Theorem 5.8.** Sei  $H$  ein separabler Hilbertraum,  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  koerzitiv und schwach unterhalbstetig. Dann existiert ein  $p \in H$ , sodass

$$F(p) = \inf_{q \in H} F(q).$$

*Beweis.* Sei  $\alpha := \inf_{q \in H} F(q) < \infty$ . Sei weiter  $p_n \in H$  eine Minimalfolge, d.h.  $F(p_n) \rightarrow \alpha$ . Die Koerzitivität von  $F$  zeigt nun weiter, dass ein  $C > 0$  existiert mit

$$\|p_n\| \leq C.$$

Der Lokalkompaktheitssatz 5.3 zeigt nun, dass eine schwach konvergente Teilfolge von  $p_n$  existiert, welche wir o.E. ebenfalls  $p_n$  nennen. D.h. es existiert ein  $p \in H$  mit

$$p_n \rightharpoonup p, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die schwache Unterhalbstetigkeit von  $F$  zeigt nun

$$\alpha \leq F(p) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(p_n) = \alpha,$$

also gilt

$$F(p) = \alpha = \inf_{q \in H} F(q).$$

$\square$

## 5.1 Sobolevräume

Nun führen wir die konkreten Hilberträume ein, in denen wir unsere Variationsrechnung durchführen werden. Diese sind die sogenannten Sobolevräume. Details dazu können in [4, Kapitel 7] nachgelesen werden. Sei dafür stets  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge. Zuerst definieren wir den Begriff der schwachen Ableitung.



**Definition 5.9.** Sei  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Wir sagen  $g \in L^1_{loc}(\Omega)$  sei die schwache Ableitung von  $f$  bzgl. der  $i$ -ten Variable, falls für alle  $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$  gilt

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial}{\partial x^i} \eta \, dx = - \int_{\Omega} g \eta \, dx.$$

In diesem Fall schreiben wir  $g = \frac{\partial}{\partial x^i} f$ . Falls  $f$  in allen Variablen schwach differenzierbar ist, nennen wir  $f$  schwach differenzierbar.

**Bemerkung 5.10.** Falls  $f \in C^1(\Omega)$ , so stimmt die schwache Ableitung mit der starken Ableitung überein.

*Beweis.* Sei  $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$  beliebig. Da  $\eta$  kompakten Träger besitzt, können wir partielle Integration ohne Randterme verwenden und erhalten

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial}{\partial x^i} \eta \, dx = - \int_{\Omega} \eta \frac{\partial}{\partial x^i} f \, dx.$$

□

Damit können wir nun die Sobolevräume einführen

**Definition 5.11.** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Wir definieren den Vektorraum

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) : f \text{ ist } k \text{ mal schwach differenzierbar und } D^\ell f \in L^2(\Omega) \forall 0 \leq \ell \leq k\}.$$

Auf diesem Vektorraum definieren wir folgendes Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{H^k(\Omega)} := \sum_{\ell=0}^k \int_{\Omega} \langle D^\ell f, D^\ell g \rangle \, dx.$$

Im Folgenden sammeln wir die wichtigsten Eigenschaften dieser Sobolevräume. Wir starten mit der für unsere Variationsrechnung wichtigste Funktionalanalytische Eigenschaft:

**Theorem 5.12.**  $H^k(\Omega)$  ist vollständig und damit ein Hilbertraum.

Wir geben nun wichtige Regularitätseigenschaften, die Sobolev Funktionen in Zusammenhang mit stetigen und Lebesgue integrierbaren Funktionen setzt.

**Theorem 5.13** (kompakte Sobolev Einbettung). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein glattes beschränktes Gebiet. Dann gelten für  $H^k(\Omega)$  folgende zwei Fälle:

$2k < n$ :  $H^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  kompakt für alle  $1 \leq q < \frac{2n}{n-2k}$

$2k > n$ :  $H^k(\Omega) \hookrightarrow C^m(\bar{\Omega})$  kompakt für alle natürlichen Zahlen  $0 \leq m < k - \frac{n}{2}$

Der nächste Satz erlaubt das Formulieren von Randdaten für Differentialgleichungen.

**Theorem 5.14** (Randoperator). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein glattes beschränktes Gebiet. Dann existiert eine stetige Einbettung

$$T_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega).$$

Dabei heißt  $T_{\partial\Omega}$  Rand- oder Spur Operator.

**Theorem 5.15.** Wir definieren die Menge aller Sobolev-Funktionen mit Nullranddaten

$$H_0^k(\Omega) := W_0^{2,k}(\Omega) := \overline{\{f \in C_0^\infty(\Omega)\}}$$

wobei hier der Abschluss bezüglich der  $H^k$ -Norm genommen wird. Falls  $\Omega$  ein glattes, beschränktes Gebiet ist, gilt mit dem Randoperator

$$H_0^k(\Omega) = \{f \in H^k(\Omega) : T_\Omega D^\ell f = 0, 0 \leq \ell < k\}$$

In diesem Sinne können alle Sobolev-Funktionen von glatten Funktionen approximiert werden:

**Theorem 5.16** (Dichtheitssatz). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein glattes beschränktes Gebiet. Dann ist  $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap H^k(\Omega)$  dicht in  $H^k(\Omega)$  bzgl. der  $H^k$ -Norm.

*Bemerkung:* Mit z.B. dem Satz von Stone-Weierstraß, ist  $H^k(\Omega)$  in diesem Fall separabel.

Folgende Ungleichung verknüpft die verschiedenen Ableitungsordnungen.

**Theorem 5.17** (Poincaré Ungleichung). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt. Dann existiert eine Konstante  $C = C(n, \Omega)$  sodass für alle  $u \in H_0^1(\Omega)$  gilt

$$\int_\Omega |u|^2(x) dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

*Beweis.* Mithilfe von Theorem 5.15 können wir o.E.  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  annehmen. Nun wende man auf  $\int_\Omega |u|^2 \cdot 1 dx$  mit  $1 = \frac{1}{n} \operatorname{div} x$  partielle Integration an. Die Ausführung des Argumentes ist Hausaufgabe.  $\square$

Nun klären wir noch den Begriff der schwachen Lösung einer partiellen Differentialgleichung anhand eines Beispiels:

**Definition 5.18.** Wir nennen  $u \in H_0^1(\Omega)$  schwache Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

falls für alle Testfunktionen  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  gilt

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx.$$

**Bemerkung 5.19.** Falls  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  eine schwache Lösung nach Definition 5.17 ist, so ist sie auch eine starke Lösung der Gleichung.

*Beweis.* Mittels partieller Integration und dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung. Das Ausführen des Argumentes ist Hausaufgabe.  $\square$

Zum Schluss nun noch ein Beispiel um die Vorgehensweise der variationellen Methode in Sobolevräumen zu verdeutlichen.

**Beispiel 5.20.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Sei weiterhin  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann besitzt folgendes Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

eine schwache Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ .

*Beweis.* Wir definieren folgendes Funktional  $F : W_0^{1,2} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx.$$

Cauchy-Schwartz und die Poincare-Ungleichung zeigen die Wohldefiniertheit von  $F$  (s.u.), bzw. dass  $F$  nach unten beschränkt ist. Angenommen wir hätten ein  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gefunden, sodass  $\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt

$$F(u) \leq F(u + \varphi).$$

Variieren wir  $F$  in Richtung  $\varphi$  erhalten wir für alle  $\varepsilon \in (-1, 1)$ :

$$\begin{aligned} F(u) &\leq F(u + \varepsilon\varphi) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f u dx - \varepsilon \int_{\Omega} f \varphi dx. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass  $\varepsilon \mapsto F(u + \varepsilon\varphi)$  ist nach  $\varepsilon$  differenzierbar und die Ableitung ist bei  $\varepsilon = 0$  gleich 0:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(u + \varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Also gilt für alle  $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

welches die schwache Formulierung der obigen Differentialgleichung ist. Nun müssen wir nur noch die Existenz von  $u$  zeigen. Zuerst zeigen wir, dass  $F$  nach unten durch die  $W_0^{1,2}(\Omega)$ -Norm beschränkt ist:

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\geq} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \sqrt{\int_{\Omega} f^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} u^2 dx} \\ &\stackrel{\text{Poincare}}{\geq} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - C \sqrt{\int_{\Omega} f^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx} \\ &\stackrel{\text{Young}}{\geq} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - C(\varepsilon) \int_{\Omega} f^2 dx - C\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Wählt man nun  $\varepsilon > 0$  klein genug, so erhält man

$$F(u) \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - C \int_{\Omega} f^2 dx,$$

also ist  $F$  wohldefiniert und nach unten beschränkt. Außerdem zeigt die Ungleichung auch die Koerzitivität von  $F$ . Sei nun  $u_m \in W_0^{1,2}(\Omega)$  eine Minimalfolge für  $F$ . Dann zeigt die Koerzitivität von  $F$ , dass  $u_m$  beschränkt in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  ist.

Der Einbettungssatz 5.13 ( $W_0^{1,2}$  bettet kompakt in  $L^2$  ein) und Satz 5.3 zeigen nun, dass eine Teilfolge  $u_m$  existiert, sodass

$$u_m \rightharpoonup u \text{ in } W_0^{1,2}(\Omega) \text{ und } u_m \rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega).$$

Satz 5.7 sowie Bemerkung 5.2 zeigen nun, dass  $F$  schwach unterhalbstetig bzgl. dieser Minimalfolge ist, womit  $u$  ein Minimierer ist.  $\square$

**Bemerkung 5.21.** Die Existenz in Beispiel 5.20 kann schneller mit dem Darstellungssatz von Riesz für Hilberträume gezeigt werden. Diese Methode ist aber nur bei linearen Problemen anwendbar, während der variationelle Ansatz auch bei nichtlinearen Problemen Anwendung findet, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

## 6 Ein Randwertproblem für elastische Kurven

Im Folgenden wollen wir ein Randwertproblem für elastische Kurven in der hyperbolischen Geometrie formulieren und mithilfe variationeller Methoden lösen. Dazu ziehen wir uns explizit auf die hyperbolische Halbebene zurück, welche durch  $\mathbb{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  mit Metrik  $g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2} \delta_{ij}$  definiert ist. Wir werden das Problem als Minimierungsproblem formulieren, aber im Hintergrund steht natürlich, dass wir dadurch ähnlich wie in Beispiel 5.9 eine Differentialgleichung lösen. Dafür seien  $\alpha_-, \alpha_+ > 0$  gegeben. Dann definieren wir die Menge, in der wir das Minimum suchen durch

$$M_{\alpha_-, \alpha_+} := \{c \in H^2([0, 1], \mathbb{H}^2) : c(0) = (-1, \alpha_-), c(1) = (1, \alpha_+), \\ \dot{c}^2(0) = \dot{c}^2(1) = 0, \dot{c}^1(0), \dot{c}^1(1) > 0, |\dot{c}| \neq 0\}. \quad (6.1)$$

Dann lautet das Problem:

$$\text{Finde } \gamma \in M_{\alpha_-, \alpha_+} : F(\gamma) \leq F(c) \quad \forall c \in M_{\alpha_-, \alpha_+}. \quad (6.2)$$

Die Topologie wird durch  $H^2 = W^{2,2}$  gegeben, d.h. wir müssen für eine minimierende Folge eine  $W^{2,2}$ -Schranke finden, um Satz 5.3 anwenden zu können. Dabei wird es zwei Probleme geben. Zum einen ist  $F$  ein geometrisches Funktional, d.h. der Wert von  $F(c)$  ändert sich nicht, wenn  $c$  umparametrisiert wird. Ohne zusätzliche Einschränkungen an die Minimalfolge wird man deswegen keine Kompaktheit erreichen können. Nachdem diese sogenannten inneren Invarianzen herausdividiert wurden, muss aber immer noch eine entsprechende Schranke an die  $W^{2,2}$ -Norm gefunden werden. Dies wird nur möglich sein, wenn die hyperbolische Bogenlänge beschränkt bleibt. Wir werden das Problem aber umgehen können, indem wir unter einer Energieschranke arbeiten. Das Ergebnis lautet wir folgt:

**Theorem 6.1.** *Falls*

$$W_{\alpha_-, \alpha_+}^h := \inf\{F(c) : c \in M_{\alpha_-, \alpha_+}\} < 8,$$

dann besitzt Problem (6.2) eine Lösung.

### 6.1 Innere Invarianzen

Wie in der Einleitung beschrieben werden wir hier die inneren Invarianzen herausdividieren. Da wir nur mit Kurven arbeiten, können wir uns auf eine besondere Klasse von Parametrisierungen zurückziehen, und zwar proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Sei also  $c \in H^2([0, 1], \mathbb{H}^2)$  regulär. Die Sobolev-Einbettung Theorem 5.13 zeigt dabei, dass  $c \in C^1([0, 1])$  liegt, also eine stetige Ableitung besitzt. Da wir weiterhin voraussetzen, dass  $\dot{c} \neq 0$ , können wir proportional zur Bogenlänge umparametrisieren, sodass gilt

$$\int_0^t |\dot{c}|_g dt = L \cdot t,$$

wobei  $L$  der hyperbolischen Bogenlänge von  $c([0, 1])$  entspricht. Differenziert man obige Gleichung erhält man

$$L^2 = g(\dot{c}, \dot{c}) = \frac{(\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2}{(c^2)^2}. \quad (6.3)$$

Differenziert man obige Gleichung erhält man

$$\dot{c}^1 \ddot{c}^1 + \dot{c}^2 \ddot{c}^2 = L^2 c^2 \dot{c}^2. \quad (6.4)$$

Wir können die geodätische Krümmung  $\kappa[c]$  von  $c$  dann folgendermaßen ausdrücken

$$\kappa[c]^2 = g \left( \nabla_{\frac{\dot{c}}{L}} \frac{\dot{c}}{L}, \nabla_{\frac{\dot{c}}{L}} \frac{\dot{c}}{L} \right) = \frac{1}{L^4} g(\nabla_{\dot{c}} \dot{c}, \nabla_{\dot{c}} \dot{c}). \quad (6.5)$$

Um nun weiter rechnen zu können, müssen wir die kovarianten Ableitungen berechnen. Dafür benötigen wir die Christoffelsymbole in  $\mathbb{H}^2$ :

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}. \quad (6.6)$$

Damit erhalten wir

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \left( \ddot{c}^1 - 2 \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( \ddot{c}^2 - \frac{(\dot{c}^2)^2}{c^2} + \frac{(\dot{c}^1)^2}{c^2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Nun können wir die elastische Energie einer proportional zur Bogenlänge parametrisierten Kurve berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \kappa[c]^2 ds &= \frac{1}{L^3} \int_0^1 g(\nabla_{\dot{c}} \dot{c}, \nabla_{\dot{c}} \dot{c}) dt \\ &= \frac{1}{L^3} \int_0^1 \frac{1}{(c^2)^2} \left( \left( \ddot{c}^1 - 2 \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} \right)^2 + \left( \ddot{c}^2 - \frac{(\dot{c}^2)^2}{c^2} + \frac{(\dot{c}^1)^2}{c^2} \right)^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{L^3} \int_0^1 \frac{1}{(c^2)^2} \left( (\dot{c}^1)^2 - 4 \frac{\ddot{c}^1 \dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} + 4 \left( \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\dot{c}^2)^2 - 2 \frac{\ddot{c}^2 (\dot{c}^2)^2}{c^2} + 2 \frac{\ddot{c}^2 (\dot{c}^1)^2}{c^2} + \frac{(\dot{c}^2)^4}{(c^2)^2} - 2 \left( \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} \right)^2 + \frac{(\dot{c}^1)^4}{(c^2)^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{L^3} \int_0^1 \frac{1}{(c^2)^2} \left( (\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2 - 4 \frac{\ddot{c}^1 \dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} + 2 \left( \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\ddot{c}^2 (\dot{c}^2)^2}{c^2} + 2 \frac{\ddot{c}^2 (\dot{c}^1)^2}{c^2} + \frac{(\dot{c}^2)^4}{(c^2)^2} + \frac{(\dot{c}^1)^4}{(c^2)^2} \right) dt \\ &\stackrel{(6.3)}{=} \frac{1}{L^3} \int_0^1 \frac{1}{(c^2)^2} \left( (\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2 - 4 \frac{\ddot{c}^1 \dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} + 2 \left( \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\ddot{c}^1 \dot{c}^2 \dot{c}^1}{c^2} - 2 \frac{L^2 (\dot{c}^2)^2 c^2}{c^2} + 2 \frac{\ddot{c}^2}{c^2} (L^2 (c^2)^2 - (\dot{c}^2)^2) + \frac{(\dot{c}^2)^4}{(c^2)^2} + \frac{(\dot{c}^1)^4}{(c^2)^2} \right) dt \\ &\stackrel{(6.4)}{=} \frac{1}{L^3} \int_0^1 \frac{1}{(c^2)^2} \left( (\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2 - 2 \frac{\ddot{c}^1 \dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} + 2 \left( \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2L^2 (\dot{c}^2)^2 + 2\ddot{c}^2 c^2 L^2 + 2 \frac{\ddot{c}^1 \dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} - 2L^2 (\dot{c}^2)^2 + \frac{(\dot{c}^2)^4}{(c^2)^2} + \frac{(\dot{c}^1)^4}{(c^2)^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{L^3} \int_0^1 \frac{1}{(c^2)^2} \left( (\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2 + 2 \left( \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\ddot{c}^2 c^2 L^2 - 4L^2 (\dot{c}^2)^2 + \frac{(\dot{c}^2)^4}{(c^2)^2} + \frac{(\dot{c}^1)^4}{(c^2)^2} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L^3} \left( \int_0^1 \frac{1}{(c^2)^2} \left( (\ddot{c}^1)^2 + (\ddot{c}^2)^2 + 2 \left( \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} \right)^2 - 2L^2 (\dot{c}^2)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(\dot{c}^2)^4}{(c^2)^2} + \frac{(\dot{c}^1)^4}{(c^2)^2} \right) dt + 2L^2 \int_0^1 \dot{c}^2 \frac{1}{c^2} - \frac{(\dot{c}^2)^2}{(c^2)^2} dt \right) \\
&= \frac{1}{L^3} \int_0^1 \frac{1}{(c^2)^2} \left( (\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2 - 2L^2 (\dot{c}^2)^2 + \frac{(\dot{c}^2)^4}{(c^2)^2} + 2 \left( \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} \right)^2 + \frac{(\dot{c}^1)^4}{(c^2)^2} \right) dt \\
&\quad + \frac{2}{L} \left[ \frac{\dot{c}^2}{c^2} \right]_0^1 \\
&\stackrel{(6.4)}{=} \frac{1}{L^3} \int_0^1 \frac{1}{(c^2)^2} \left( (\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2 - 2L^2 (\dot{c}^2)^2 + L^4 (c^2)^2 \right) dt \\
&\quad + \frac{2}{L} \left[ \frac{\dot{c}^2}{c^2} \right]_0^1.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir also

$$F(c) = \frac{1}{L^3} \int_0^1 \frac{1}{(c^2)^2} \left( (\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2 - 2L^2 (\dot{c}^2)^2 \right) dt + L + \frac{2}{L} \left[ \frac{\dot{c}^2}{c^2} \right]_0^1. \quad (6.8)$$

Damit können wir nun folgendes Theorem zeigen.

**Theorem 6.2.** *Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_{\alpha_-, \alpha_+}$  eine Minimalfolge für  $F(\cdot)$  mit gleichgradig beschränkter hyperbolischer Bogenlänge. Dann existiert ein Minimum  $c \in M_{\alpha_-, \alpha_+}$ .*

*Beweis.* Sei  $L_n$  die hyperbolische Bogenlänge von  $c_n$  und sei  $c_n$  o.E. proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Dann haben wir wegen der gleichgradigen Bogenlängenschranke

$$\exists C > 0 : \frac{1}{C} \leq c_n^2 \leq C \text{ und } |c_n^1| \leq C$$

$$\stackrel{6.3}{\Rightarrow} \exists C > 0 : |\dot{c}^1|, |\dot{c}^2| \leq C$$

$$\stackrel{6.8}{\Rightarrow} \exists C > 0 : \int_0^1 (\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2 dt \leq C$$

Also ist  $c_n$  beschränkt in  $H^2((0, 1), \mathbb{R}^2)$ . Theorem 5.3 und die kompakte Sobolev Einbettung nach  $C^1$  (siehe z.B. [4, Abschnitt 7.10]) liefert ein  $c \in H^2((0, 1), \mathbb{R}^2)$  sodass nach Auswahl einer Teilfolge gilt

$$c_n \rightarrow c \text{ in } C^1([0, 1], \mathbb{R}^2) \text{ und } c_n \rightharpoonup c \text{ in } H^2((0, 1), \mathbb{R}^2).$$

Erste Konvergenz bedeutet mit der gleichgradigen Abschätzung an  $c_n^2$  nach unten, dass  $c \in H^2((0, 1), \mathbb{H}^2)$ . Weiterhin bedeutet dies auch, dass  $c$  die Randdaten annimmt und proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Damit ist  $c$  auch regulär und es gilt

$$c \in M_{\alpha_-, \alpha_+}.$$

Nun müssen wir noch die schwache Unterhalbstetigkeit von  $F$  diskutieren: Dafür zeigen wir nun, dass  $\frac{\dot{c}_n^1}{c_n^2}$  schwach in  $H^2$  gegen  $\frac{\dot{c}^1}{c^2}$  konvergiert. Sei also  $\varphi \in$

$H^2((0, 1))$ .

$$\begin{aligned}
& \left| \int \frac{\ddot{c}_n^1}{c_n^2} \varphi - \frac{\ddot{c}^1}{c^2} \varphi dt \right| \\
& \leq \left| \int \left( \frac{1}{c_n^2} - \frac{1}{c^2} \right) \ddot{c}_n^1 \varphi dt \right| + \left| \int (\ddot{c}_n^1 - \ddot{c}^1) \frac{1}{c^2} \varphi dt \right| \\
& \leq \left\| \frac{1}{c_n^2} - \frac{1}{c^2} \right\|_{C^0} \sqrt{\int (\ddot{c}_n^1)^2 dt} \sqrt{\int \varphi^2 dt} + \left| \int (\ddot{c}_n^1 - \ddot{c}^1) \frac{1}{c^2} \varphi dt \right| \\
& \leq C \left\| \frac{1}{c_n^2} - \frac{1}{c^2} \right\|_{C^0} + \left| \int (\ddot{c}_n^1 - \ddot{c}^1) \frac{1}{c^2} \varphi dt \right| \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

da  $\frac{1}{c^2} \varphi \in H^2$ , also eine zulässige Testfunktion für die schwache Konvergenz ist. Analog gilt dieselbe Aussage für  $\ddot{c}_n^2$ . Mit der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm, siehe Lemma 5.7, in Kombination mit (6.8) ist  $F$  schwach unterhalbstetig für die Folge  $c_n$ .  $\square$

## 6.2 Die Brücke zur Willmore-Energie

In diesem Abschnitt werden wir die hyperbolische elastische Energie einer Kurve verbinden mit der Willmore Energie einer Rotationsfläche. dazu definieren wir zuerst den Begriff der Rotationsfläche oder auch axialsymmetrische Fläche:

**Definition 6.3.** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  eine reguläre Kurve. Dann definieren wir die Fläche  $S(c) \subset \mathbb{R}^3$  durch die Parametrisierung

$$[0, 1] \times [0, 2\pi] \ni (t, \varphi) \mapsto f(t, \varphi) = (c^1(t), c^2(t) \cos \varphi, c^2(t) \sin \varphi).$$

Wir nennen  $S(c)$  eine axialsymmetrische Fläche und  $c$  die zugehörige Profilkurve.

Nun definieren wir noch die Willmore Energie einer Fläche  $S \subset \mathbb{R}^3$

**Definition 6.4.** Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine eingebettete zweimal stetig differenzierbare, zweidimensionale Fläche. Sei weiter  $H : S \rightarrow \mathbb{R}$  die mittlere Krümmung von  $S$ . Dann nennen wir

$$W_\epsilon(S) = \int_S |H|^2 d\mathcal{H}^2$$

Willmore Energie von  $S$ .

Hierbei muss beobachtet werden, dass wir hier  $H$  als Mittelwert der Hauptkrümmungen definieren.

Die Brücke zwischen Willmore Energie und elastischer Energie geht auf eine Beobachtung von Bryant und Griffiths, siehe [2], zurück:

**Theorem 6.5.** Sei  $S(c)$  eine axialsymmetrische Fläche mit Profilkurve  $c \in C^2$ . Dann gilt

$$\frac{2}{\pi} W_\epsilon(S(c)) = F(c) - 4 \left[ \frac{\dot{c}^2}{\sqrt{(\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2}} \right]_0^1.$$



*Beweis.* Nun berechnen wir Krümmungsgrößen von  $S(c)$ . Sei dazu  $f$  wie in Definition 6.3. Zuerst leiten wir den metrischen Tensor her:

$$\begin{aligned} f(t, \varphi) &= (c^1(t), c^2(t) \cos \varphi, c^2(t) \sin \varphi) \\ \partial_t f &= (\dot{c}^1(t), \dot{c}^2(t) \cos \varphi, \dot{c}^2(t) \sin \varphi) \\ \partial_\varphi f &= (0, -c^2(t) \sin \varphi, c^2(t) \cos \varphi) \\ (g_{ij})_{i,j=t,\varphi} &= \begin{pmatrix} (\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2 & 0 \\ 0 & (c^2)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun wenden wir uns der zweiten Fundamentalform zu:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 f &= (\ddot{c}^1(t), \ddot{c}^2(t) \cos \varphi, \ddot{c}^2(t) \sin \varphi) \\ \partial_\varphi^2 f &= (0, -c^2(t) \cos \varphi, -c^2(t) \sin \varphi) \\ \partial_t \partial_\varphi f &= (0, -\dot{c}^2 \sin \varphi, \dot{c}^2 \cos \varphi) \\ \partial_t f \times \partial_\varphi f &= (c^2 \dot{c}^2, -c^2 \dot{c}^1 \cos \varphi, -c^2 \dot{c}^1 \sin \varphi) \\ |\partial_t f \times \partial_\varphi f| &= c^2 \sqrt{(\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2} = c^2 |\dot{c}| \\ (h_{ij})_{i,j=t,\varphi} &= \frac{1}{|\dot{c}|} \begin{pmatrix} \dot{c}^1 \dot{c}^2 - \dot{c}^2 \dot{c}^1 & 0 \\ 0 & \dot{c}^1 c^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist die Weingarten-Abbildung

$$(g^{ij} \circ h_{ij}) = \frac{1}{|\dot{c}|} \begin{pmatrix} \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2 - \dot{c}^2 \dot{c}^1}{|\dot{c}|^2} & 0 \\ 0 & \frac{\dot{c}^1}{c^2} \end{pmatrix}.$$

Die mittlere Krümmung berechnet sich also zu

$$H = \frac{1}{2} \frac{c^2 \ddot{c}^1 \dot{c}^2 - c^2 \dot{c}^2 \ddot{c}^1 + |\dot{c}|^2 \dot{c}^1}{|\dot{c}|^3 c^2}$$

Hierbei bleibt zu beachten, dass hier  $H$  der Mittelwert der Hauptkrümmungen ist, womit sich der Vorfaktor  $\frac{1}{2}$  erklärt.

Nun interpretieren wir  $c$  als Kurve in der hyperbolischen Halbebene  $\mathbb{H}^2$  mit geodätischer Krümmung  $\kappa$ . Zur Wiederholung: Die kovariante Ableitung von  $\dot{c}$  nach  $\dot{c}$  ist:

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \left( \dot{c}^1 - 2 \frac{\dot{c}^1 \dot{c}^2}{c^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( \dot{c}^2 - \frac{(\dot{c}^2)^2}{c^2} + \frac{(\dot{c}^1)^2}{c^2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da  $T_p \mathbb{H}^2$  konform zu  $\mathbb{R}^2$  ist, wählen wir die Normale  $N$  von  $c$  so, dass  $(\dot{c}, N)$  ein Rechtssystem bildet.

$$N = \frac{1}{\sqrt{g_c(\dot{c}, \dot{c})}} \begin{pmatrix} -\dot{c}^2 \\ \dot{c}^1 \end{pmatrix}.$$

Also gilt für die Krümmung  $\kappa$

$$\kappa = \frac{g(\nabla_{\dot{c}} \dot{c}, N)}{g(\dot{c}, \dot{c})} = \frac{\dot{c}^2 \dot{c}^1 c^2 - \dot{c}^1 \dot{c}^2 c^2 + \dot{c}^1 (\dot{c}^2)^2 + (\dot{c}^1)^3}{|\dot{c}|^3}.$$

Insgesamt gilt also für die elastische Energie:

$$\int_0^1 \kappa^2(t) ds(t) = \int_0^1 \frac{(\dot{c}^2 \dot{c}^1 c^2 - \dot{c}^1 \dot{c}^2 c^2 + \dot{c}^1 (\dot{c}^2)^2 + (\dot{c}^1)^3)^2}{|\dot{c}|^5 c^2} dt.$$

Nun können wir Willmore und elastische Energie vergleichen:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \mathcal{W}(S(c)) - F(c) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 H^2 |\dot{c}| c^2 dt d\varphi - \int_0^1 \kappa^2 \sqrt{g(\dot{c}, \dot{c})} dt \\
&= \int_0^1 \frac{(c^2 \ddot{c}^1 \dot{c}^2 - c^2 \ddot{c}^2 \dot{c}^1 + |\dot{c}|^2 \dot{c}^1)^2}{|\dot{c}|^5 c^2} dt \\
&\quad - \int_0^1 \frac{(\ddot{c}^2 \dot{c}^1 c^2 - \ddot{c}^1 \dot{c}^2 c^2 + |\dot{c}|^2 \dot{c}^1)^2}{|\dot{c}|^5 c^2} dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{|\dot{c}|^5 c^2} ((c^2 \ddot{c}^1 \dot{c}^2)^2 - 2(c^2)^2 \ddot{c}^1 \dot{c}^2 \ddot{c}^2 \dot{c}^1 + 2c^2 \ddot{c}^1 \dot{c}^2 |\dot{c}|^2 \dot{c}^1 \\
&\quad + (c^2 \ddot{c}^2 \dot{c}^1)^2 - 2c^2 \ddot{c}^2 \dot{c}^1 |\dot{c}|^2 \dot{c}^1 + |\dot{c}|^4 (\dot{c}^1)^2) dt \\
&\quad - \int_0^1 \frac{1}{|\dot{c}|^5 c^2} ((c^2 \ddot{c}^1 \dot{c}^2)^2 - 2(c^2)^2 \ddot{c}^1 \dot{c}^2 \ddot{c}^2 \dot{c}^1 - 2c^2 \ddot{c}^1 \dot{c}^2 |\dot{c}|^2 \dot{c}^1 \\
&\quad + (c^2 \ddot{c}^2 \dot{c}^1)^2 + 2c^2 \ddot{c}^2 \dot{c}^1 |\dot{c}|^2 \dot{c}^1 + |\dot{c}|^4 (\dot{c}^1)^2) dt \\
&= 4 \int_0^1 \frac{c^2 \ddot{c}^1 \dot{c}^2 |\dot{c}|^2 \dot{c}^1 - c^2 \ddot{c}^2 \dot{c}^1 |\dot{c}|^2 \dot{c}^1}{|\dot{c}|^5 c^2} dt \\
&= 4 \int_0^1 \frac{\ddot{c}^1 \dot{c}^2 \dot{c}^1 - \ddot{c}^2 (\dot{c}^1)^2}{((\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2)^{\frac{3}{2}}} dt \\
&= \left[ -4 \frac{\dot{c}^2}{\sqrt{(\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2}} \right]_0^1
\end{aligned}$$

□

### 6.3 A-priori Abschätzung an die Bogenlänge

In diesem Abschnitt leiten wir eine Abschätzung an die Bogenlänge her, falls wir unter der in Theorem 6.1 genannten Energieschranke bleiben. Dazu bemerken wir zuerst folgende Beobachtung, die im Prinzip die Herkunft dieser Energieschranke erklärt. Diese Beobachtung geht auf Hans-Christoph Grunau zurück.

**Lemma 6.6.** *Sei  $c \in M_{\alpha_-, \alpha_+}$ . Seien weiterhin  $t_1 < t_2$  so, dass*

$$\dot{c}^1(t_1) = \dot{c}^1(t_2) = 0 \text{ und } \dot{c}^2(t_1) \cdot \dot{c}^2(t_2) < 0.$$

Dann gilt

$$F(c) \geq 8.$$

*Beweis.* Sei zuerst  $\dot{c}^2(t_1) < 0$ . Dann gilt mit Theorem 6.5:

$$\begin{aligned}
F(c) &= F(c)|_{[0, t_1]} + F(c)|_{[t_1, t_2]} + F(c)|_{[t_2, 1]} \\
&\geq F(c)|_{[t_1, t_2]} = \frac{2}{\pi} W_\epsilon(S(c))|_{[t_1, t_2]} + 4 \left[ \frac{\dot{c}^2}{\sqrt{(\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2}} \right]_{t_1}^{t_2} \\
&\geq 8
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir  $\dot{c}^2(t_1) > 0$ . Mit den Randdaten gilt ähnlich wie oben

$$\begin{aligned}
F(c) &= F(c)|_{[0,t_1]} + F(c)|_{[t_1,t_2]} + F(c)|_{[t_2,1]} \\
&\geq F(c)|_{[0,t_1]} + F(c)|_{[t_2,1]} = \frac{2}{\pi} W_e(S(c))|_{[0,t_1]} + \frac{2}{\pi} W_e(S(c))|_{[t_2,1]} \\
&\quad + 4 \left[ \frac{\dot{c}^2}{\sqrt{(\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2}} \right]_0^{t_1} + 4 \left[ \frac{\dot{c}^2}{\sqrt{(\dot{c}^1)^2 + (\dot{c}^2)^2}} \right]_{t_2}^1 \\
&\geq 8
\end{aligned}$$

□

Die nächsten beiden Lemmata zeigen, dass eine Folge  $c_n \in M_{\alpha_-, \alpha_+}$  unter Energieschranke 8 in einer hyperbolischen Kugel mit endlichen Radius leben muss:

**Lemma 6.7.** *Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_{\alpha_-, \alpha_+}$  eine Folge mit  $\sup_n F(c_n) < 8$ . Dann existiert ein  $C > 0$ , sodass*

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } C < c_n^2(t).$$

*Beweis.* Wir werden per Widerspruch vorgehen. Wir nehmen also an, dass nach Auswahl einer Teilfolge, wir eine Folge  $t_n \in [0, 1]$  finden, sodass

$$c_n^2(t_n) = \min_{t \in [0,1]} c_n^2(t) \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Falls  $n$  groß genug ist, gilt mithilfe der Randdaten, dass  $t_n \in (0, 1)$  und damit  $\dot{c}_n^2(t_n) = 0$ . Wir machen nun folgende technische Zwischenbehauptung:

Es existieren zwei Folgen  $0 < t_n^- < t_n < t_n^+ < 1$ , sodass

$$\left| \frac{\dot{c}_n^2}{\sqrt{(\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2}}(t_n^-) \right| \rightarrow 1 \quad \text{and} \quad \left| \frac{\dot{c}_n^2}{\sqrt{(\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2}}(t_n^+) \right| \rightarrow 1.$$

Bevor wir diese Behauptung zeigen, schließen wir den eigentlichen Beweis ab: Dafür müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen. Zuerst nehmen wir an, dass nach Auswahl einer Teilfolge für großes  $n$  gilt  $\dot{c}_n^2(t_n^-) < 0$ . Dann folgt ähnlich wie in Lemma 6.6

$$\begin{aligned}
F(c_n)|_{[0,t_n]} &= F(c_n)|_{[0,t_n^-]} + F(c_n)|_{[t_n^-,t_n]} \geq F(c_n)|_{[t_n^-,t_n]} \\
&= \frac{2}{\pi} W_e(S(c_n))|_{[t_n^-,t_n]} + 4 \left[ \frac{\dot{c}_n^2}{\sqrt{(\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2}} \right]_{t_n^-}^{t_n} \\
&\geq 4 + o(1).
\end{aligned}$$

Der andere Fall  $\dot{c}_n^2(t_n^-) > 0$  lässt sich wie folgt bearbeiten

$$\begin{aligned}
F(c_n)|_{[0,t_n]} &= F(c_n)|_{[0,t_n^-]} + F(c_n)|_{[t_n^-,t_n]} \geq F(c_n)|_{[0,t_n^-]} \\
&= \frac{2}{\pi} W_e(S(c_n))|_{[0,t_n^-]} + 4 \left[ \frac{\dot{c}_n^2}{\sqrt{(\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2}} \right]_0^{t_n^-} \\
&\geq 4 + o(1).
\end{aligned}$$

Analog arbeitet man auf dem Intervall  $[t_n, 1]$  und erhält so

$$F(c_n) = F(c_n)|_{[0, t_n]} + F(c_n)|_{[t_n, 1]} \geq 8 + o(1),$$

also einen Widerspruch.

Kommen wir nun zum Beweis der Zwischenbehauptung: Wieder arbeiten wir per Widerspruch und nehmen an, solche Folgen  $t_n^-, t_n^+$  würden nicht existieren. Wieder nach Auswahl einer Teilfolge existiert damit also ein  $\delta > 0$ , sodass

$$\forall t \in [0, 1] : \left| \frac{\dot{c}_n^2}{\sqrt{(\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2}}(t) \right| \leq 1 - \delta. \quad (6.9)$$

Quadrieren liefert

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\dot{c}_n^2)^2 &\leq (1 - \delta)^2 \cdot ((\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2) \\ \Rightarrow 0 &\leq (\dot{c}_n^2)^2(1 - (1 - \delta)^2) \leq (1 - \delta)^2(\dot{c}_n^1)^2. \end{aligned}$$

Da  $c$  regulär ist, gilt  $\dot{c} \neq 0$  und wir erhalten

$$\forall t \in [0, 1] : \dot{c}_n^1 \neq 0.$$

Also ist  $c_n$  ein Graph auf  $[0, 1]$  über der  $x$ -Achse. Also erhalten wir  $u_n \in H^2([-1, 1], (0, \infty))$ , sodass  $c_n([0, 1]) = \{(x, u_n(x)) : x \in [-1, 1]\}$ . Zuerst zeigen wir  $|x_n| := |c_n^1(t_n)| \rightarrow 1$ . Dafür beobachten wir, dass (6.9) uns ein  $C > 0$  gibt, sodass  $\forall x \in [-1, 1]$  gilt  $|u_n'(x)| \leq C$ . Der Mittelwertsatz liefert dann

$$|x_n \pm 1| \geq \frac{\min\{\alpha_-, \alpha_+\}}{C} + o(1) > 0$$

für  $n$  groß genug. Jetzt können wir rechnen:

$$\begin{aligned} 8 \geq F(c_n)|_{[0, t_n]} &= F(u_n)|_{[-1, x_n]} \\ &= \int_{-1}^{x_n} \frac{u_n''(x)^2 u_n(x)}{(1 + u_n'(x)^2)^{\frac{5}{2}}} dx + \int_{-1}^{x_n} \frac{1}{u_n(x) \sqrt{1 + u_n'(x)^2}} dx \\ &\geq \int_{-1}^{x_n} \frac{1}{u_n(x) \sqrt{1 + u_n'(x)^2}} dx. \\ &= \int_{-1}^{x_n} \frac{1}{1 + u_n'(x)^2} ds(x) \\ &\geq \frac{1}{1 + C^2} \int_{-1}^{x_n} ds(x) \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

da  $u_n(x_n) \rightarrow 0$  und damit läuft die hyperbolische Bogenlänge gegen  $\infty$ . Analog findet man die Folge  $t_n^+$ , indem man auf dem Intervall  $[t_n, 1]$  arbeitet.  $\square$

Nachdem wir eine Abschätzung nach 'unten' erarbeitet haben, benötigen wir nun noch eine Abschätzung nach oben:

**Lemma 6.8.** *Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_{\alpha_-, \alpha_+}$  eine Folge mit  $\sup_n F(c_n) < 8$ . Dann existiert ein  $C > 0$ , sodass*

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } C > |c_n(t)|.$$

*Beweis.* Wie in Lemma 6.7 gehen wir per Widerspruch vor. Wir nehmen also an, es existiert nach Auswahl einer Teilfolge, die Existenz von  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ , sodass

$$\max\{|c_n(t)|, t \in [0, 1]\} = |c_n(\xi_n)| \rightarrow \infty, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wir transformieren das Problem nun in das Kreisscheibenmodell der hyperbolischen Geometrie mithilfe der Cayley Transformation. In komplexen Koordinaten  $z = x + iy$  lautet diese Transformation

$$Q(z) := \frac{z - i}{z + i}.$$

Für diese gilt, dass  $Q(\mathbb{H}^2) = B_1(0)$  und diese ist eine Isometrie bzgl. der hyperbolischen Geometrie. Damit ändert diese die elastische Energie nicht. Führen wir nun noch eine Rotation um den Ursprung mit Winkel  $\varphi$  ein und nennen diese  $R_\varphi$ . Diese ist eine Isometrie des Kreisscheibenmodells und ändert ebenfalls nicht die elastische Energie. Nun transformieren wir  $c_n$  und definieren

$$c_{n,\varphi} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2 \text{ mit } c_{n,\varphi}(t) := Q^{-1}(R_\varphi(Q(c_n(t)))).$$

Mit  $\varphi > 0$  finden wir damit also eine Folge  $(t_n^\varphi)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$  für großes  $n$ , sodass

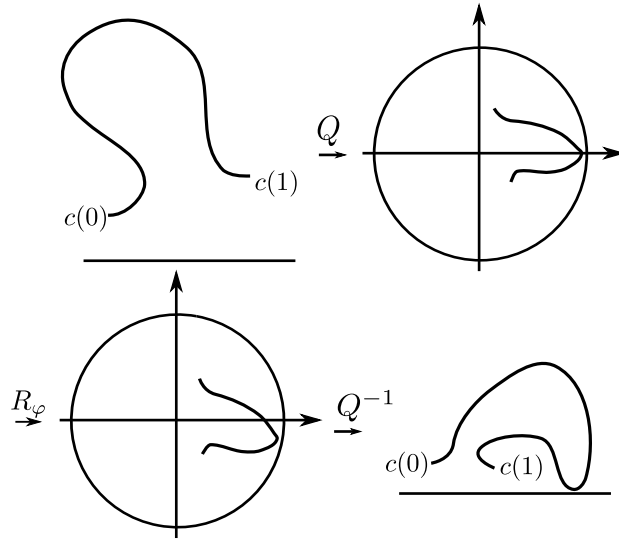


Abbildung 1: Transformation von Kurven, sodass diese gegen 0 laufen.

$$c_{n,\varphi}^2(t_n^\varphi) = \min_{t \in [0,1]} c_{n,\varphi}^2(t) \rightarrow 0.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  fest aber beliebig. Da  $R_\varphi$ ,  $Q$  und  $Q^{-1}$  stetig sind, existiert ein  $\varphi > 0$  klein, sodass

$$\left| \frac{\dot{c}_{n,\varphi}^2(0)}{\dot{c}_{n,\varphi}^1(0)} \right| < \varepsilon \text{ and } \left| \frac{\dot{c}_{n,\varphi}^2(1)}{\dot{c}_{n,\varphi}^1(1)} \right| < \varepsilon.$$

Damit erhalten wir auch

$$\left| \frac{\dot{c}_{n,\varphi}^2(0)}{\sqrt{(\dot{c}_{n,\varphi}^1(0))^2 + (\dot{c}_{n,\varphi}^2(0))^2}} \right| \leq \left| \frac{\dot{c}_{n,\varphi}^2(0)}{\dot{c}_{n,\varphi}^1(0)} \right| < \varepsilon,$$

und ebenfalls für  $t = 1$ . Genau wie im Beweis von Lemma 6.7 finden wir nun Folgen  $0 < t_n^{\varphi,-} < t_n^{\varphi} < t_n^{\varphi,+} < 1$  mit

$$\left| \frac{\dot{c}_{n,\varphi}^2}{\sqrt{(\dot{c}_{n,\varphi}^1)^2 + (\dot{c}_{n,\varphi}^2)^2}}(t_n^{\varphi,\pm}) \right| \rightarrow 1, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Für großes  $n$  nehmen wir  $\dot{c}_{n,\varphi}^2(t_n^{\varphi,-}) > 0$  und  $\dot{c}_{n,\varphi}^2(t_n^{\varphi,+}) > 0$  an. Dann

$$\begin{aligned} F(c_n) &= F(c_{n,\varphi}) \geq F(c_{n,\varphi})|_{[0,t_n^{\varphi,-}]} + F(c_{n,\varphi})|_{[t_n^{\varphi},t_n^{\varphi,+}]} \\ &= \frac{2}{\pi} W_e(S(c_{n,\varphi}))|_{[0,t_n^{\varphi,-}]} + \frac{2}{\pi} W_e(S(c_{n,\varphi}))|_{[t_n^{\varphi},t_n^{\varphi,+}]} \\ &\quad + 4 \left[ \frac{\dot{c}_{n,\varphi}^2}{\sqrt{(\dot{c}_{n,\varphi}^1)^2 + (\dot{c}_{n,\varphi}^2)^2}} \right]_0^{t_n^{\varphi,-}} + 4 \left[ \frac{\dot{c}_{n,\varphi}^2}{\sqrt{(\dot{c}_{n,\varphi}^1)^2 + (\dot{c}_{n,\varphi}^2)^2}} \right]_{t_n^{\varphi}}^{t_n^{\varphi,+}} \\ &\geq 8 + o(1) - \varepsilon > 8 - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

für  $n$  groß genug. Die anderen Fälle funktionieren genauso. Wählen wir nun  $\varepsilon < \frac{1}{2}(8 - \sup_n F(c_n))$ , so erhalten wir einen Widerspruch.  $\square$

Nun kommen wir zur finalen Bogenlängenabschätzung:

**Theorem 6.9.** *Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_{\alpha_-, \alpha_+}$  eine Folge mit  $\sup_n F(c_n) < 8$ . Sei weiterhin  $L_n$  die hyperbolische Bogenlänge von  $c_n$ . Dann existiert ein  $C > 0$ , sodass*

$$L_n < C.$$

*Beweis.* Wie üblich gehen wir per Widerspruch vor, nehmen also an, dass nach Auswahl einer Teilfolge gilt  $L_n \rightarrow \infty$ . O.E. reparametrisieren wir alle  $c_n$  proportional zur Bogenlänge. Dann liefert Lemma 6.7

$$(\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2 = (c_n^2)^2 L_n^2 \rightarrow \infty. \quad (6.10)$$

Lemma 6.8 zusammen mit dem Mittelwertsatz gibt uns

$$\begin{aligned} \infty > C > \left| c_n^1 \left( \frac{2}{6} \right) - c_n^1 \left( \frac{1}{6} \right) \right| &= |\dot{c}_n^1(t_{n,1})| \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6} \leq t_{n,1} \leq \frac{2}{6}, \\ \infty > C > \left| c_n^2 \left( \frac{4}{6} \right) - c_n^2 \left( \frac{3}{6} \right) \right| &= |\dot{c}_n^2(t_{n,2})| \frac{1}{6}, \quad \frac{3}{6} \leq t_{n,2} \leq \frac{4}{6}, \\ \infty > C > \left| c_n^1 \left( \frac{6}{6} \right) - c_n^1 \left( \frac{5}{6} \right) \right| &= |\dot{c}_n^1(t_{n,3})| \frac{1}{6}, \quad \frac{5}{6} \leq t_{n,3} \leq \frac{6}{6}. \end{aligned}$$

Damit liefert (6.10)

$$\begin{aligned} |\dot{c}_n^2(t_{n,1})| &\rightarrow \infty, \\ |\dot{c}_n^1(t_{n,2})| &\rightarrow \infty, \\ |\dot{c}_n^2(t_{n,3})| &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned} \left| \frac{\dot{c}_n^2}{\sqrt{(\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2}} \right| (t_{n,1}) &\rightarrow 1, \\ \left| \frac{\dot{c}_n^2}{\sqrt{(\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2}} \right| (t_{n,2}) &\rightarrow 0, \\ \left| \frac{\dot{c}_n^2}{\sqrt{(\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2}} \right| (t_{n,3}) &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Wie vorher muss man nun auch für eine Abschätzung an die elastische Energie einige Fälle unterscheiden. Wir bearbeiten aber nur  $\dot{c}_n^2(t_{n,1}) < 0$  und  $\dot{c}_n^2(t_{n,3}) < 0$ , den die anderen Fälle sind mit einer Anpassung der Integrationsintervalle analog.

$$\begin{aligned} F(c_n) &\geq F(c_n)|_{[t_{n,1}, t_{n,2}]} + F(c_n)|_{[t_{n,3}, 1]} \\ &= \frac{2}{\pi} W_e(S(c_n))|_{[t_{n,1}, t_{n,2}]} + \frac{2}{\pi} W_e(S(c_n))|_{[t_{n,3}, 1]} \\ &\quad + 4 \left[ \frac{\dot{c}_n^2}{\sqrt{(\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2}} \right]_{t_{n,1}}^{t_{n,2}} + 4 \left[ \frac{\dot{c}_n^2}{\sqrt{(\dot{c}_n^1)^2 + (\dot{c}_n^2)^2}} \right]_{t_{n,3}}^1 \\ &\geq 8 + o(1). \end{aligned}$$

□

## 6.4 Eine geometrische, hinreichende Bedingung für die Existenz von Minimierern

In diesem Abschnitt werden wir eine hinreichende Bedingung an  $\alpha_-$  und  $\alpha_+$  geben, sodass die Voraussetzung von Theorem 6.1 erfüllt ist. Dafür benötigen wir eine entsprechende Vergleichsfunktion, welche wir aus Katenoiden und Halbkreisen konstruieren werden. Dafür berechnen wir zuerst die geodätische Krümmung dieser Kurven:

**Lemma 6.10.** Sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$  gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} zt \\ z \cosh t \end{pmatrix}.$$

Hier ist  $z \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Dann ist  $\gamma$  nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisiert und es gilt für die Krümmung  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$K(t) = \frac{2}{\cosh t},$$

also ist  $\gamma$  mit Satz 2.13 eine elastische Kurve. Weiter gilt für die elastische Energie und alle  $s > 0$

$$F(\gamma)|_{[0,s]} < 4 \text{ und } F(\gamma)|_{[0,\infty)} = 4.$$

*Beweis.* Zuallererst werden die Ableitungen von  $\gamma$  berechnet:

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} z \\ z \sinh t \end{pmatrix}, \quad \ddot{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \cosh t \end{pmatrix}.$$

Weiterhin gilt, dass  $\gamma$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist, denn

$$|\dot{\gamma}|_g^2 = \frac{z^2 + z^2 \sinh^2 t}{z^2 \cosh^2 t} = 1.$$

Damit berechnet sich die Normale  $N$  zu

$$N(t) = \begin{pmatrix} -z \sinh t \\ z \end{pmatrix}.$$

Nun können wir mithilfe der Formeln aus dem Beweis von z.B. Theorem 6.5 die geodätische Krümmung  $K$  von  $\gamma$  berechnen:

$$\begin{aligned} K &= g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, N) \\ &= \frac{\left( \ddot{\gamma}^1 - 2 \frac{\dot{\gamma}^1 \dot{\gamma}^2}{\gamma^2} \right) N^1 + \left( \ddot{\gamma}^2 - \frac{(\dot{\gamma}^2)^2}{\gamma^2} + \frac{(\dot{\gamma}^1)^2}{\gamma^2} \right) N^2}{(\dot{\gamma}^2)^2} \\ &= \frac{2z^2 \frac{\sinh^2 t}{\cosh t} + z^2 \cosh t - z^2 \frac{\sinh^2 t}{\cosh t} + z^2 \frac{1}{\cosh t}}{z^2 \cosh^2 t} \\ &= \frac{2 \sinh^2 t + \cosh^2 t - \sinh^2 t + 1}{\cosh^3 t} = \frac{2}{\cosh t}. \end{aligned}$$

Nun noch zur elastischen Energie:

$$F(\gamma)|_{[0, s]} = \int_0^s \left( \frac{2}{\cosh(s)} \right)^2 ds = 4 [\tanh(x)]_0^s \rightarrow 4.$$

□

**Lemma 6.11.** Sei

$$p_{x_0, r}(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}, & x \in (x_0 - r, x_0 + r) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ein Kreis mit Mittelpunkt auf der  $x$ -Achse. Für die geodätische Krümmung  $\kappa$  für den Anteil in  $\mathbb{H}^2$  gilt

$$\kappa = 0$$

*Beweis.* Wir reparametrisieren und erhalten

$$p_{x_0, r}(t) := r \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Ableitungen und die Normale  $N$ :

$$\begin{aligned} \dot{p}_{x_0, r} &= r \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \\ \ddot{p}_{x_0, r} &= -r \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ N &= \frac{r}{|\dot{p}_{x_0, r}|_g} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = (r \cos t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Wie im Beweis von Theorem 6.5 können wir damit die kovariante Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{C}_{r,M}} \dot{C}_{r,M} &= \begin{pmatrix} -r \sin t + 2 \frac{r^2 \cos t \sin t}{r \cos t} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -r \cos t - \frac{r^2 \sin^2 t}{r \cos t} + \frac{r^2 \cos^2 t}{r \cos t} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Also ergibt

$$\begin{aligned}g(\nabla_{\dot{C}_{r,M}} \dot{C}_{r,M}, N) &= \frac{r \cos t}{(r \cos t)^2} \begin{pmatrix} -r \sin^2 t + 2r \sin^2 t \\ -r \cos^2 t - r \sin^2 t + r \cos^2 t \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}$$

□

**Definition 6.12.** Wir sagen das Paar  $(\alpha_-, \alpha_+) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  erfüllt eine Kleinheitsbedingung, falls die folgende Aussage wahr ist:

- Falls  $\alpha_- \leq \alpha_+$ , dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$p_{1, \alpha_+}(x) < \alpha_- \cosh\left(\frac{1+x}{\alpha_-}\right).$$

- Falls  $\alpha_- > \alpha_+$ , dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$p_{-1, \alpha_-}(x) < \alpha_+ \cosh\left(\frac{1-x}{\alpha_+}\right).$$

**Theorem 6.13.** Falls  $(\alpha_-, \alpha_+) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  die Kleinheitsbedingung 6.12 erfüllt gilt

$$\inf\{F(c) : c \in M_{\alpha_-, \alpha_+}\} < 8.$$

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $\alpha_- \leq \alpha_+$ . Weiter sei

$$\cosh_-(x) = \alpha_- \cosh\left(\frac{1+x}{\alpha_-}\right) \text{ und } \cosh_+(x) = \alpha_+ \cosh\left(\frac{1-x}{\alpha_+}\right).$$

Definiere  $t \mapsto (x(t), r(t))$  so, dass, der obere Halbkreis  $p_{x(t), r(t)}(\cdot)$  tangential zum Graphen von  $\cosh_+$  an  $(1-t, \cosh_+(1-t))$  ist. Da  $\cosh_+$  glatt ist, sind  $x(\cdot)$  und  $r(\cdot)$  stetig. Kleinheitsbedingung 6.12 garantiert nun, dass  $p_{x(0), r(0)} = p_{1, \alpha_+}$  und  $\cosh_-$  sich nicht treffen. Allerdings schneiden sich  $\cosh_-$  und  $\cosh_+$  weswegen wir eine erste Zeit  $t_0 > 0$  finden, sodass  $\tilde{t} > t_0$  existiert mit  $p_{x(t_0), r(t_0)}$  tangential zum Graphen von  $\cosh_-$  in  $(1-\tilde{t}, \cosh_-(1-\tilde{t}))$ . Bild 2 skizziert die Situation. Nun definieren wir unsere Vergleichsfunktion durch

$$v_{\alpha_-, \alpha_+}(x) = \begin{cases} \cosh_-(x), & x \in [-1, 1-\tilde{t}] \\ p_{x(t_0), r(t_0)}(x), & x \in (1-\tilde{t}, 1-t_0] \\ \cosh_+(x), & x \in (1-t_0, 1] \end{cases}$$

Da  $v_{\alpha_-, \alpha_+} \in C^{1,1}([-1, 1])$ , ist es auch in  $M_{\alpha_-, \alpha_+}$ . Weiter ist  $p_{x(t_0), r(t_0)}$  eine Geodäte, gibt also einen Beitrag zur elastischen Energie. Mithilfe von Lemma 6.10 erhalten wir

$$\inf\{F(c) : c \in M_{\alpha_-, \alpha_+}\} \leq F(v_{\alpha_-, \alpha_+}) < 8.$$

□

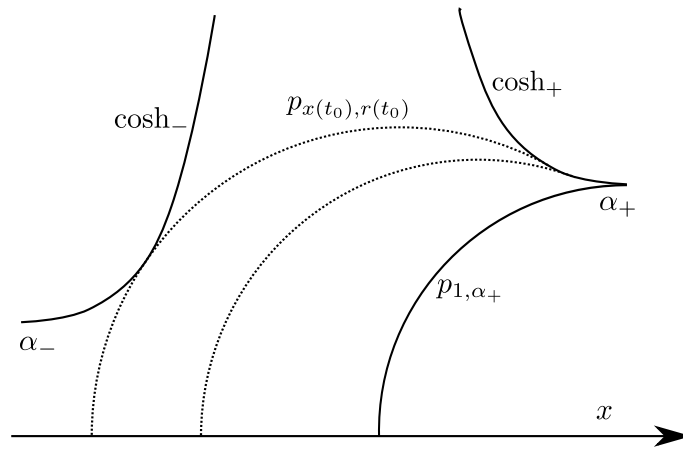


Abbildung 2: Vergleichsfunktion für die elastische Energie.

**Bemerkung 6.14.** Hier einige Bemerkungen, was man im Rahmen des bearbeitet Dirichlet-Problems noch zeigen kann:

- (a) Man kann zeigen, dass jeder Minimierer glatt ist, indem man die Euler-Lagrange Gleichung im  $H^2$ -Fall herleitet und Regularitätstheorie betreibt. Damit ist dieser in unserem Sinne eine elastische Kurve.
- (b) Falls  $(\alpha_-, \alpha_+)$  die Kleinheitsbedingung 6.12 erfüllt ist jeder Minimierer ein Graph über der  $x$ -Achse, also gilt  $c([0, 1]) = \{(x, u(x)) : x \in [-1, 1]\}$ .
- (c) Im Allgemeinen sind Lösungen der Euler-Lagrange Gleichung unter Randdaten auch im Graphenfall nicht eindeutig. Ungeklärt ist dies aber bis dato für Minimierer.

## 7 Symmetrie minimierender Lösungen

In diesem Abschnitt werden wir Methoden aus den ersten Kapiteln benutzen um zu zeigen, dass alle Lösungen aus Theorem 6.1 mit symmetrischen Randdaten ( $\alpha_- = \alpha_+$ ) ebenfalls symmetrisch ist. Bei elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung werden solche Resultate üblicherweise über ein Eindeutigkeitsatz gezeigt. Dieser erfordert üblicherweise ein Maximumprinzip, welches uns allerdings nicht zur Verfügung steht. Unser Resultat hier lautet wie folgt:

**Theorem 7.1.** *Sei  $[-1, 1] \ni x \mapsto (x, u(x))$  ein Minimum von  $F$  in  $M_{\alpha, \alpha}$  mit glatten  $u : [-1, 1] \rightarrow (0, \infty)$ . Dann gilt*

$$u(-x) = u(x) \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Die Beweisstrategie ist im Groben wie folgt: Wir werden zuerst annehmen  $u$  wäre nicht symmetrisch. Mithilfe der Ordnungsreduktion von Langer & Singer können wir dann zeigen, dass die geodätische Krümmung periodisch ist und mindestens eine volle Periode durchläuft. Mit expliziten Abschätzungen an die Lösungen aus dem Lemmata 2.11 und 2.12 werden wir dann zeigen, dass die elastische Energie von  $(\cdot, u(\cdot))$  mindestens 8 beträgt. Dies ist aber ein Widerspruch zu Theorem 6.13.

Führen wir nun etwas Notation ein. Sei  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{H}^2$  die Reparametrisierung von  $(\cdot, u(\cdot))$  nach hyperbolische Bogenlänge mit Bogenlänge  $L$ . Weiterhin sei  $K$  die geodätische Krümmung von  $\gamma$  und  $\kappa[u]$  die geodätische Krümmung von  $(\cdot, u(\cdot))$ . Nutzen wir nun das Ordnungsreduktionsprinzip 4.1 in Kombination mit der expliziten Gestalt der Killingfelder auf  $\mathbb{H}^2$ , so erhalten wir Parameter  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit

$$K^2 \begin{pmatrix} \dot{\gamma}^1 \\ \dot{\gamma}^2 \end{pmatrix} + 2\dot{K} \begin{pmatrix} -\dot{\gamma}^2 \\ \dot{\gamma}^1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} (\gamma^1)^2 - (\gamma^2)^2 \\ \gamma^1 \gamma^2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Differenziert man diese Gleichung nach dem Bogenlängenparameter erhält man

$$\begin{aligned} 2K\dot{K} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}^1 \\ \dot{\gamma}^2 \end{pmatrix} + K^2 \begin{pmatrix} \ddot{\gamma}^1 \\ \ddot{\gamma}^2 \end{pmatrix} + 2\ddot{K} \begin{pmatrix} -\dot{\gamma}^2 \\ \dot{\gamma}^1 \end{pmatrix} + 2\dot{K} \begin{pmatrix} -\ddot{\gamma}^2 \\ \ddot{\gamma}^1 \end{pmatrix} \\ = a \begin{pmatrix} \gamma^1 \dot{\gamma}^1 - \gamma^2 \dot{\gamma}^2 \\ \dot{\gamma}^1 \gamma^2 + \gamma^1 \dot{\gamma}^2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \dot{\gamma}^1 \\ \dot{\gamma}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Das Subscript  $+$  soll im Nachfolgenden bedeuten, dass das zugehörige Objekt am rechten Rand ausgewertet wurde. Ein Beispiel wäre  $\kappa[u](1) = K_+$ . Analog dazu bedeutet das Subscript  $-$  die Auswertung am linken Rand. Das Subscript  $\pm$  soll verdeutlichen das die Aussage für den rechten, sowie den linken Rand gilt.

Die Randwerte und die Bogenlängenparametrisierung sichern:

$$\gamma_{\pm}^2 = \alpha, \quad \gamma_{\pm}^1 = \pm 1, \quad \dot{\gamma}_{\pm}^2 = 0, \quad \dot{\gamma}_{\pm}^1 = \alpha. \quad (7.3)$$

Setzt man dies in die erste Koordinate von Gleichung (7.1) ein, erhält man

$$\alpha K_{\pm}^2 = a \frac{1 - \alpha^2}{2} \pm b + c.$$

Woraus sofort folgt, dass

$$\alpha(K_+^2 - K_-^2) = 2b. \quad (7.4)$$

Die zweite Koordinate von (7.1) liefert dann

$$2\dot{K}_\pm = \pm a + b,$$

welches durch Addition zu

$$\dot{K}_+ + \dot{K}_- = b \quad (7.5)$$

wird. Nun benötigen wir die Frenet-Gleichungen von  $\gamma$ . Diese lautet in Kurzform  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = KN$ , wobei  $N$  die Normale ist, mit der  $K$  berechnet wurde (vgl. Beweis zu Theorem 6.5). In Koordinaten lauten diese dann

$$\ddot{\gamma}^1 - 2\frac{1}{\gamma^2}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2 = -K\dot{\gamma}^2, \quad (7.6)$$

$$\ddot{\gamma}^2 - \frac{1}{\gamma^2}(\dot{\gamma}^2)^2 + \frac{1}{\gamma^2}(\dot{\gamma}^1)^2 = K\dot{\gamma}^1. \quad (7.7)$$

Einsetzen der Randdaten liefert

$$\ddot{\gamma}_\pm^1 = 0, \quad \ddot{\gamma}_\pm^2 = \alpha(K_\pm - 1).$$

In Kombination mit der zweiten Koordinate von (7.2) ergibt sich damit

$$\alpha K_\pm^2(K_\pm - 1) + 2\alpha\dot{K}_\pm = a\alpha^2.$$

Die Krümmungsgleichung (2.1),

$$\ddot{K}(s) = K(s) - \frac{1}{2}K^3(s),$$

vereinfacht dies zu

$$2K_\pm - K_\pm^2 = a\alpha. \quad (7.8)$$

**Lemma 7.2.**  $u : [-1, 1] \rightarrow (0, \infty)$  ist genau dann gerade, wenn

$$\kappa[u](-1) = \kappa[u](1).$$

*Beweis.* Aus  $u(x) = u(-x)$  folgt mit der geodätischen Krümmung für Graphen

$$\kappa[u](x) = \frac{u(x)u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}. \quad (7.9)$$

bereits, dass gerade Lösungen die obige Gleichung implizieren.

Sei deswegen nun  $u$ , sodass  $\kappa[u](-1) = \kappa[u](1)$ . Die Gleichungen (7.4) und (7.5) implizieren, dass  $\dot{K}_- = -\dot{K}_+$ .

Nun spiegelt man  $\gamma$  an der  $y$ -Achse und nennt diese neue Kurve  $\tilde{\gamma}$ . Es ist zu zeigen, dass die Bilder von  $\tilde{\gamma}$  und  $\gamma$  übereinstimmen. Durch die Spiegelung existiert ein  $s \in \mathbb{R}$ , sodass

$$\tilde{\gamma}(s) = (1, \alpha), \quad \dot{\tilde{\gamma}}(s) = (-\alpha, 0), \quad \kappa[\tilde{\gamma}](s) = -K_- = -K_+, \quad \kappa[\tilde{\gamma}]'(s) = -\dot{K}_- = \dot{K}_+$$

Die letzten beiden Gleichungen rühren daher, dass eine solche Spiegelung eine orientierungsumkehrende Isometrie von  $\mathbb{H}^2$  ist. Kehrt man nun die Durchlaufrichtung von  $\tilde{\gamma}$  um, erfüllt es am rechten Rand im Punkt  $(1, \alpha)$  dieselben Anfangsdaten für die Frenet-Gleichung und die Krümmungsgleichung (2.1) wie  $\gamma$ . Der Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf liefert dann die Aussage.  $\square$

Im Folgenden sei  $u : [-1, 1] \rightarrow (0, \infty)$  stets **nicht**-gerade.

**Lemma 7.3.** Sei  $u : [-1, 1] \rightarrow (0, \infty)$  *nicht-gerade*. Dann gilt

$$\kappa[u](-1) + \kappa[u](1) = 2.$$

*Beweis.* Mithilfe einer Subtraktion folgt aus (7.8)

$$\begin{aligned} 2(K_+ - K_-) - (K_+^2 - K_-^2) &= 0 \\ \Rightarrow (K_+ - K_-)(2 - (K_+ + K_-)) &= 0. \end{aligned}$$

Lemma 7.2 ergibt nun die Aussage.  $\square$

**Korollar 7.4.** Sei  $u : [-1, 1] \rightarrow (0, \infty)$  *nicht-gerade*. Dann gilt

$$u''(-1) = -u''(1), \quad u''(1) \neq 0.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus (7.9), den Randdaten und den Lemmata 7.2 sowie 7.3.  $\square$

**Lemma 7.5.**  $K$  ist periodisch und durchläuft mindestens eine Periode

*Beweis.* Wir werden folgende stärkere Aussage zeigen: Es existieren  $-1 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$  und ein  $C \in \mathbb{R}$  sodass

$$\kappa[u](x_1) = \kappa[u](x_2) = \kappa[u](x_3) = C.$$

Sei o.B.d.A. mit Folgerung 7.4  $u''(-1) < 0$  und  $u''(1) > 0$ . Wegen der Randdaten, muss  $u$  damit in  $-1$  ein striktes Maximum und in  $1$  ein striktes Minimum besitzen. Da aber  $u(1) = u(-1)$  gilt, existieren damit  $-1 < x_- < x_+ < 1$ , sodass

$$u'(x_+) = 0, \quad u''(x_+) \leq 0, \quad u'(x_-) = 0, \quad u''(x_-) \geq 0.$$

Mit (7.9) gilt damit für die Krümmung:

$$\kappa[u](-1) < 1, \quad \kappa[u](x_-) \geq 1, \quad \kappa[u](x_+) \leq 1, \quad \kappa[u](1) > 1.$$

Der Zwischenwertsatz liefert dann die Aussage.  $\square$

**Lemma 7.6.** Sei  $K$  orbitartig, also wie in Lemma 2.11 mit Parametern  $K_0, k, r$ . Dann gilt

$$\int_0^{\frac{1}{r}F_k(\pi)} K^2(s) ds > 8.$$

*Beweis.* Mit einer Verschiebung im Argument, können wir annehmen, dass  $|K_0| > \sqrt{2}$ , womit  $s_0 = 0$ . Nun können wir rechnen

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{r}F_k(\pi)} K^2(s) ds &= \int_0^{\frac{1}{r}F_k(\pi)} 4r^2 \operatorname{dn}^2(rs, k) ds \\ &= 4r^2 \int_0^{\frac{1}{r}F_k(\pi)} (1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(rs))) ds \\ &= 4r \int_0^\pi \frac{1 - k^2 \sin^2(x)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)}} dx \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - (2r^2 - 1) \sin^2(x)} dx. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right) \ni \rho \rightarrow \phi(\rho) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho - (2\rho - 1) \sin^2(x)} dx$$

und zeigen  $\phi(\rho) > 1$ . Mit  $\phi(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$  reicht es zu zeigen, dass  $\phi'(\rho) < 0$  for  $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ :

$$\begin{aligned} 2\phi'(\rho) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\sqrt{\rho - (2\rho - 1) \sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\rho - (2\rho - 1) \sin^2 x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\rho - (2\rho - 1) \sin^2 x}} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\rho - (2\rho - 1) \sin^2 x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\rho - (2\rho - 1) \sin^2 x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\pi - 2x)}{\sqrt{\rho - (2\rho - 1) \cos^2 x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \left( \frac{1}{\sqrt{\rho - (2\rho - 1) \sin^2 x}} - \frac{1}{\sqrt{\rho - (2\rho - 1) \cos^2 x}} \right) dx \\ &< 0. \end{aligned}$$

Da  $\phi(1) = 1$  sind wir fertig. □

Nun noch der wellenartige Fall:

**Lemma 7.7.** *Sei  $K$  wellenartig, also wie in Lemma 2.12 mit den dort definierten Parametern  $K_0, k, r$ . Dann gilt*

$$\int_0^{\frac{1}{r} F_k(2\pi)} K^2(s) ds \geq 4\pi.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{r} F_k(2\pi)} K^2(s) ds &= K_0^2 \int_0^{\frac{1}{r} F_k(2\pi)} \operatorname{cn}^2(rs, k) ds \\ &= K_0^2 \int_0^{\frac{1}{r} F_k(2\pi)} \cos^2(F_k^{-1}(rs)) ds \\ &= K_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \cos^2(x) \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)}} dx \\ &\geq \frac{K_0^2}{\sqrt{-1 + \frac{1}{2} K_0^2}} \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx \\ &= \frac{K_0^2}{\sqrt{-1 + \frac{1}{2} K_0^2}} \pi \end{aligned}$$

Nun schätzen wir noch den Vorfaktor ab:

$$\begin{aligned}(K_0^2 - 4)^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow K_0^4 &\geq 8K_0^2 - 16 = 16 \left( \frac{K_0^2}{2} - 1 \right) \\ \Rightarrow \frac{K_0^2}{\sqrt{\frac{K_0^2}{2} - 1}} &\geq 4.\end{aligned}$$

□

Die Lemmata 7.6 und 7.7 zeigen, dass eine elastische Kurve, dessen Krümmung durch mindestens eine Periode läuft mindestens eine elastische Energie von 8 haben muss. Lemma 7.5 schließt damit den Beweis von Theorem 7.1.

## Literatur

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, U.S. Government Printing Office Washington, D.C. 20402, 10th edition, 1972.
- [2] R. Bryant and P. Griffiths. Reduction for constrained variational problems and  $\int k^2/2 ds$ . *Am. J. Math.*, 108:525–570, 1986.
- [3] C. Bär. *Elementare Differentialgeometrie*. De Gruyter Berlin, 2nd edition, 2010.
- [4] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag Berlin, 3rd edition, 1998.
- [5] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer Verlag Berlin, 1. auflage edition, 1995.
- [6] J. Langer and D. Singer. The total squared curvature of closed curves. *J. Differ. Geom.*, 20:1–22, 1984.
- [7] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2nd edition, 2013.
- [8] Michael Struwe. *Variational Methods*. Springer, 2008.