Dr. S. Eichmann 15. April 2020
Sommersemester 2020

Übungen zu elastischen Kurven
Blatt 1

1.1 Aufgabe (Fundamentallema der Variationsrechnung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Weiter sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, sodass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega f\varphi \, dx = 0.$$

Zeigen Sie, dass $f = 0$ fast überall.
Hinweis: Nutzen Sie, dass für jede Indikatorfunktion $\chi_A \in L^1(\Omega)$ eine Folge $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ existiert, sodass $|\varphi_k| \leq 1$ und $\varphi_k \to \chi_A$ in $L^1(\Omega)$.

1.2 Aufgabe

Sei (S, g) eine Riemannsche Fläche, $-\infty < a < b < \infty$, sowie $c : [a, b] \to M$ eine reguläre, glatte Kurve. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) c ist zur Bogenlänge parametrisiert genau dann, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt $|\dot{c}(t)|_g = 1$.

(b) Es existiert ein glatter Diffeomorphismus $\Phi : [c, d] \to [a, b]$, sodass $c \circ \Phi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist und Φ die Orientierung erhält, d.h. $\Phi' > 0$.

Hinweis: Invertieren Sie $t \mapsto \varphi(t) := \int_a^t |\dot{c}(s)|_g \, ds$.

1.3 Aufgabe

Sei $\mathbb{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > 0\}$ die hyperbolischen Halbebene mit der Metrik $g_{(x,y)}(V, W) = \frac{\langle V,W \rangle}{y^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass für eine glatte reguläre Kurve $c : (a, b) \to \mathbb{H}^2$, gilt

$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = \left(\ddot{c}^1 - 2\frac{\dot{c}^1\dot{c}^2}{c^2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\ddot{c}^2 - \frac{(\dot{c}^2)^2}{c^2} + \frac{(\dot{c}^1)^2}{c^2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $K := \partial B_r((x, y)) \subset \mathbb{R}^2$ ein euklidischer Kreis, sodass $K \cap \mathbb{H}^2 \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass für die geodätische Krümmung κ_K von $K \cap \mathbb{H}^2$ bzgl. der Metrik g je nach gewählter Orientierung bzw. Normalen gilt

$$\kappa_K = \pm\frac{y}{r}.$$

Wir werden dieses Blatt in der dritten Vorlesungswoche besprechen, d.h. in der Woche vom 27. April bis zum 1. Mai. Möchten Sie eine Korrektur Ihrer Lösung, so senden Sie mir diese bitte bis zum 24. April zu.

Die Aufgabenblätter und weitere Hinweise finden Sie unter
https://www.math.uni-tuebingen.de/user/eichmann/Lehre/Elastische_Kurven_2020/.