Dr. S. Eichmann 27. April 2020
Sommersemester 2020

Übungen zu elastischen Kurven
Blatt 2

2.1 Aufgabe

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Riemannsche Fläche und $L > 0$. Sei weiter $\gamma : [0, L] \to M$ eine glatte, reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\varphi \in C_0^\infty((0, L))$ gegeben. Sei $W := \varphi\dot{\gamma}$ das Variationsvektorfeld zu einer glatten Schar von Kurven $\gamma : [0, L] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(\cdot, 0) = \gamma(\cdot)$, d.h. $\frac{d}{dw}\gamma(s, w)|_{w=0} = W(s)$. Berechnen Sie

$$\frac{d}{dw}F(\gamma(\cdot, w))|_{w=0}.$$

2.2 Aufgabe

(a) Berechnen Sie eine Euler-Lagrange Gleichung für das Funktional

$$F(\cdot) + \lambda L(\cdot).$$

unter Randdaten wie in der Vorlesung. Hier ist L das Längenfunktional für eine reguläre glatte Kurve und $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie F die elastische Energie.
Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnisse aus dem Beweis von Theorem 1.3 und nehmen Sie an, dass der Optimierer bzw. kritische Punkte nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

(b) Wie ändert sich die Analyse in Abschnitt 2 für die Euler-Lagrange Gleichung von $F + \lambda L$?

2.3 Aufgabe

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Riemannsche Fläche mit konstanter Gaußkrümmung. Sei weiter $\gamma : I \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte elastische Kurve ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall), sei $\gamma : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine glatte Schar von regulären Kurven mit $\gamma(\cdot, 0) = \gamma(\cdot)$ und für das zugehörige Variationsvektorfeld W gelte

$$W(s) := \frac{d}{dw}\gamma(s, w)|_{w=0} = K^2T + 2K'N.$$

Hier ist $K : I \to \mathbb{R}$ die geodätische Krümmung von γ bzgl. der s-Variablen, $T := \dot{\gamma}$ die Einheitstangente und N die Einheitsnormale an γ, mit der die Krümmung K berechnet wurde, d.h. es gilt $K = g(\nabla_T T, N)$.
Zeigen Sie

$$\frac{d}{dw}\left(K^2(s, w)\right)|_{w=0} = 0.$$

Wir werden dieses Blatt in der fünften Vorlesungswoche besprechen, d.h. in der Woche vom 11. Mai bis zum 15. Mai. Möchten Sie eine Korrektur Ihrer Lösung, so senden Sie mir diese bitte bis zum 8. Mai zu.

Die Aufgabenblätter und weitere Hinweise finden Sie unter
https://www.math.uni-tuebingen.de/user/eichmann/Lehre/Elastische_Kurven_2020/.