

Vorlesung Elastische Kurven

Sommersemester 2020, Tübingen

Sascha Eichmann

27. April 2020

Inhaltsverzeichnis

0	Differentialgeometrische Grundlagen	2
0.1	Intrinsische Geometrie von Riemannschen Flächen	2
0.2	Kurven auf Riemannschen Flächen	6
1	Die elastische Energie und ihre Euler-Lagrange Gleichung	7
2	Analyse der Krümmungsgleichung	11
2.1	Qualitatives Verhalten	11
2.2	Jacobisch elliptischen Funktionen	14
3	Einschub: Isometrien und Killing-Vektorfelder	16
4	Ordnungsreduktion nach Langer&Singer	16
5	Einschub: Die direkte Methode der Variationsrechnung	17
6	Ein Randwertproblem für elastische Kurven	18
7	Symmetrie minimierender Lösungen	19
	Literatur	19

Kurz zur praktischen Durchführung dieser Veranstaltungen:

Solange Präsenzveranstaltungen an der Universität untersagt sind, wird dieser Kurs online stattfinden. Der Modus ist dabei wie folgt: Sie arbeiten dieses Skript selbstständig durch und können mit mir jede Woche über Discord über den Stoff diskutieren. Zusätzlich können Sie Übungsaufgaben lösen und mir über URM zukommen lassen, indem Sie eine pdf-Datei Ihrer Lösung erstellen und auf URM hochladen. Die Korrektur können Sie dann ebenfalls über URM bekommen. Natürlich können wir ebenfalls über die Aufgaben über Discord sprechen. Falls Sie noch Zugang zum Discord Server bzw. URM benötigen, schreiben Sie mir bitte eine Email. Ich werde Sie dann auf den entsprechenden Plattformen einladen bzw. anmelden.

Sobald wieder Präsenzveranstaltungen erlaubt sind, wird dieser Kurs regulär als solche fortgesetzt werden.

Nun kurz zur didaktischen Idee der Veranstaltung: Das Ziel ist es die grundlegenden Ideen der Variationsrechnung an einem geometrisch einfachen aber nicht trivialen Beispiel kennenzulernen. Dieses Beispiel ist die elastische Energie von Kurven auf Mannigfaltigkeiten. Diese ist z.B. ein Modell um die physikalische 'Verbiegungsenergie' eines Stück dünnen Drahtes zu messen. Wir werden dies allerdings aus einer rein mathematischen Sicht behandeln und versuchen mehr über Minimierer dieser Energie zu erfahren.

Dafür werden wir zuerst die kritischen Punkte, d.h. die Euler-Lagrange Gleichung berechnen (dies ist eine notwendige Bedingung dafür ein Minimierer zu sein). Diese werden wir in den Kapiteln 2 und 4 analysieren und so eine genauere Vorstellung von der Gestalt möglicher Lösungen dieser Gleichung bekommen. Danach werden wir uns in Abschnitt 6 in die hyperbolische Geometrie begeben und die Existenz eines Minimierers der elastischen Energie unter Randdaten mithilfe von variationellen Methoden beweisen. Die dafür nötige direkte Methode der Variationsrechnung erarbeiten wir in Abschnitt 5. Zuerst wiederholen wir aber in Abschnitt 0 die nötigen differentialgeometrischen Grundlagen und führen die hier benutzte Notation ein.

0 Differentialgeometrische Grundlagen

Ich empfehle dieses Kapitel zuerst nur zu überfliegen und später bei Bedarf die einzelnen Definitionen und Sätze herauszusuchen. Insbesondere ist Abschnitt 0.2 erst einmal wichtiger für die Definition der Elastischen Energie 1.1.

Wir orientieren uns bei den Grundlagen am Buch von Bär, siehe [2]. Zuerst wiederholen wir den Begriff von Flächen und darauf definierten Metriken:

0.1 Intrinsische Geometrie von Riemannschen Flächen

Definition 0.1. $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt (2 dimensionale) reguläre Fläche, dann und nur dann, falls für alle Punkte $p \in S$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte Abbildung $F : U \rightarrow V$ existiert, sodass $S \cap V = F(U)$ und $\forall u \in U$ gilt $\text{Rang } DF(u) = 2$. F heißt in diesem Fall Parametrisierung von S in p (siehe z.B. Abbildung 1).

Dann definieren wir den Tangentialraum $T_p M := \text{span} \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}(F^{-1}(p)), \frac{\partial F}{\partial x^2}(F^{-1}(p)) \right)$ von S an p .

Für einen Vektor $V \in T_p M$ existieren damit eindeutige Zahlen $V^1, V^2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$V = V^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + V^2 \frac{\partial F}{\partial x^2}.$$

Wir nennen die V^i lokale Koordinaten des Vektors V .

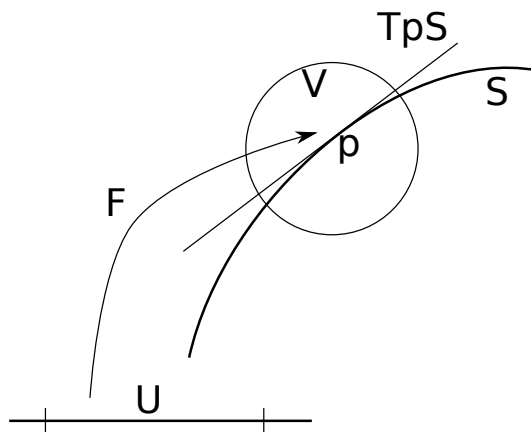


Abbildung 1: Parametrisierung einer Fläche.

Bemerkung: Für praktische Zwecke werden wir viele Größen in diesem Kapitel in lokalen Koordinaten erklären. Natürlich müsste man in diesem Fall die Unabhängigkeit dieser Größen bzgl. Wechsel der Parametrisierung nachweisen, wir verweisen hier allerdings nur auf die entsprechenden Beweise.

Definition 0.2 (siehe [2] Definition 3.2.6). Seien $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen, sowie $f : S \rightarrow S'$ glatt (D.h. für alle Parametrisierungen F von S ist $f \circ F$ glatt). Dann wird das Differential $df(p) : T_p S \rightarrow T_{f(p)} S'$ von f in $p \in S$ durch folgende Konstruktion definiert: Sei $V \in T_p S$ und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = V$. Dann setzt man

$$df(p)(V) := \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0}.$$

Definition 0.3 (siehe [2], Definition 4.4.1). Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Dann heißt die Abbildung, die allen $p \in M$ ein Skalarprodukt $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Tangentialraum von M zuordnet, Riemannsche Metrik, falls für alle Parametrisierungen $F : U \rightarrow M$ von M gilt, dass die Abbildungen

$$g_{ij}(x) := g_{F(x)} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right), x \in U \subset \mathbb{R}^2, \quad i, j = 1, 2$$

glatt in x sind. $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ heißt metrischer Tensor. Das Paar (M, g) nennt man dabei Riemannsche Fläche.

Bemerkung: Eine mögliches Beispiel für eine Riemannsche Metrik auf M ist das vom ambienten \mathbb{R}^3 euklidische Skalarprodukt zu nutzen, d.h. für $V, W \in T_p M$ gelte dann $g_p(V, W) = \langle V, W \rangle_{\mathbb{R}^3}$.

Definition 0.4 (Christoffelsymbol, siehe [2] Definition 4.2.13). Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche. Dann definiert man in lokalen Koordinaten das Christoffelsymbol

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^2 g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right),$$

wobei $(g^{k\ell})_{k,\ell=1,2}$ das Inverse des metrischen Tensors $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ ist.

Bemerkung: Vorsicht, bei dem Christoffelsymbol handelt sich nicht um einen Tensor, d.h. dieser ist nicht invariant gegenüber Parameterwechsel, obwohl wir es so schreiben.

Definition 0.5 (kovariante Ableitung, siehe [2] Seite 185). Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche und sei V ein glattes Tangentialvektorfeld auf M , d.h. $\forall p \in M$ gilt $V(p) \in T_p M$. Sei nun $p \in M$ fixiert und F eine Parametrisierung von M in p . Sei weiterhin $W \in T_p M$ und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = W$ und $\varepsilon > 0$. Sei weiterhin $\tilde{c} := F^{-1} \circ c$ die Kurve in lokalen Koordinaten. Dann wird die kovariante Ableitung von V nach W in p durch

$$\nabla_W V := \sum_{k=1}^2 \left((V \dot{\circ} \tilde{c})^k + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(0)) V^i \dot{\tilde{c}}(0)^j \right) \frac{\partial F}{\partial x^k}$$

definiert.

Bemerkung: V muss nicht auf ganz M gegeben sein, damit die kovariante Ableitung wohldefiniert ist. Es genügt, dass V auf einer Kurve \tilde{c} wie in der Definition gegeben ist.

Bemerkung 0.6. Die Definition der kovarianten Ableitung, siehe 0.5, liegt zwar in lokalen Koordinaten vor, allerdings kann gezeigt werden, dass diese wohldefiniert ist (siehe [3] Seite 105).

Lemma 0.7 (siehe [2] Seite 185). *In lokalen Koordinaten kann die kovariante Ableitung auch ohne eine Hilfskurve angegeben werden. Dafür gelten hier die gleichen Bezeichnungen wie in 0.5. Dann gilt*

$$(\nabla_W V)^i = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^2 \Gamma_{kj}^i V^k \right) W^j.$$

Lemma 0.8 (siehe [2] Lemma 4.2.12). *Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve auf M mit $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, J ein weiteres Intervall in \mathbb{R} mit $\varphi : J \rightarrow I$ eine Umparametrisierung von c , V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf M und $f, h : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen auf M . Seien weiterhin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p \in M$ und $\tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine glatte Kurve mit $\tilde{c}(0) = p$ sowie $\dot{\tilde{c}}(0) = Z(p)$. Dann gelten folgende Formeln für die kovariante Ableitung:*

- *Linearität erster Teil:*

$$\nabla_Z(\alpha V + \beta W) = \alpha \nabla_Z V + \beta \nabla_Z W$$

- *Produktregel erster Teil in $p \in M$:*

$$\nabla_{Z(p)} fV = \left. \frac{d}{dt} f(\tilde{c}(t)) \right|_{t=0} V + f \nabla_Z V$$

- *Produktregel zweiter Teil:*

$$\frac{d}{dt} g_{c(t)}(V, W) = g_{c(t)}(\nabla_{\dot{c}(t)} V, W) + g_{c(t)}(V, \nabla_{\dot{c}(t)} W)$$

- *Kettenregel:*

$$\nabla_{c \circ \varphi} V(c \circ \varphi) = \dot{\varphi}(\nabla_{\dot{c}} V) \circ \varphi$$

- *Linearität zweiter Teil:*

$$\nabla_{fV+hW} Z = f \nabla_V Z + h \nabla_W Z$$

Definition 0.9 (siehe [2] Definition 4.3.1). Seien V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf einer Riemannschen Fläche (M, g) . Dann wird die zweifache kovariante Ableitung durch

$$\nabla_{V,W}^2 Z := \nabla_V(\nabla_W Z) - \nabla_{\nabla_V W} Z$$

definiert.

Definition 0.10 (siehe [2] Definition 4.3.4). Seien V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf einer Riemannschen Fläche (M, g) . Dann wird der Riemannsche Krümmungstensor durch

$$R(V, W)Z := \nabla_{V,W}^2 Z - \nabla_{W,V}^2 Z$$

definiert.

Lemma 0.11 (siehe [2] Tabelle 1). *Der Riemannsche Krümmungstensor besitzt folgende Darstellung in lokalen Koordinaten:*

$$R_{ijk}^\ell = \frac{\partial \Gamma_{kj}^\ell}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^\ell}{\partial x^j} + \sum_m (\Gamma_{mi}^\ell \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{mj}^\ell \Gamma_{ki}^m).$$

Definition 0.12 (siehe [2] Tabelle 1). Die Gauß-Krümmung G auf einer Riemannschen Fläche (M, g) wird in Koordinaten durch

$$G = \frac{1}{2} \sum_{j,k} g^{jk} \left(\sum_\ell R_{\ell jk}^\ell \right)$$

erklärt.

Bemerkung 0.13. Das Theorema Egregium (siehe [2] Satz 4.3.8 und Tabelle 1, Seite 183) zeigt, dass die extrinsische Definition der Gauß-Krümmung mit Definition 0.12 für den Fall übereinstimmt, dass die Metrik durch den ambienten Raum \mathbb{R}^3 induziert wird.

Folgendes Resultat ist nur für 2-dimensionale Flächen korrekt und besitzt keine entsprechende Verallgemeinerung in höheren Dimensionen.

Theorem 0.14 (siehe [2] Lemma 4.3.11). Sei (M, g) eine 2-dimensionale Riemannsche Fläche und $G : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Gauß-Krümmung auf M . Seien weiterhin V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf (M, g) . Dann gilt für den Riemannschen Krümmungstensor

$$\begin{aligned} R_{ij\ell}^k &= G(g_{j\ell}\delta_i^k - g_{i\ell}\delta_j^k) \\ R(V, W)Z &= G(g(Z, W)V - g(Z, V)W) \end{aligned}$$

Theorem 0.15 (Riemannsche Normalkoordinaten, siehe [2] Satz 4.6.7). Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche und $p \in M$. Dann existiert eine Parametrisierung von M um p , sodass für den metrischen Tensor in p gilt:

- $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$
- $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0$, $i, j, k = 1, 2$.

0.2 Kurven auf Riemannschen Flächen

Definition 0.16 (siehe [2] Definition 2.1.1). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, (M, g) eine Riemannsche Fläche und $c : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Diese wird als regulär bezeichnet genau dann, wenn $\forall t \in I$ gilt $\dot{c}(t) \neq 0$.

Definition 0.17 (geodätische Krümmung, siehe [2] Definition 4.5.14). Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \rightarrow M$ eine glatte, reguläre Kurve. Sei weiterhin N ein glattes Vektorfeld an c mit $N(t) \in T_{c(t)}M$, $g_{c(t)}(N(t), N(t)) = 1$, $\forall t \in I$ und $g_{c(t)}(\dot{c}(t), N(t)) = 0$. Dann wird die geodätische Krümmung κ von c durch

$$\kappa(t) := \frac{g_{c(t)}(\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t), N(t))}{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}$$

definiert.

Bemerkung 0.18. Die Definition der geodätischen Krümmung in 0.15 ist gegenüber richtungserhaltenden Umparametrisierungen invariant. Wird die Laufrichtung der Kurve jedoch umgekehrt, ändert dies lediglich das Vorzeichen der geodätischen Krümmung.

Außerdem ändert ein umgekehrtes Vorzeichen für die Normale ebenfalls nur das Vorzeichen der geodätischen Krümmung.

Definition 0.19 (siehe [2] Proposition 2.1.13). Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine glatte, reguläre Kurve. Diese ist nach der Bogenlänge parametrisiert genau dann, wenn für das Längenfunktional folgende Bedingung gilt

$$\forall t \in [a, b] : L_{[a,t]}(c) := \int_a^t \sqrt{g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s))} ds = t - a.$$

Bemerkung 0.20. In den Übungen werden wir zeigen, dass man jede glatte reguläre Kurve zur Bogenlänge umparametrisieren kann.

Theorem 0.21 (Frenet-Gleichungen, siehe [2] Aufgabe 4.24). Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $t_0, t_1 > 0$, $c : [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Einheitsnormalenvektorfeld N bezüglich g entlang c wie in Definition 0.15 und $\kappa : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ die dazugehörige geodätische Krümmung von c . Dann gelten für diese Kurve die Frenet Gleichungen:

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \kappa \cdot N \text{ und } \nabla_{\dot{c}} N = -\kappa \cdot \dot{c}.$$

Sei umgekehrt eine glatte Funktion $\kappa : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann existiert zu jedem Punkt $p \in M$ und Einheitsvektor $V \in T_p M$ bezüglich g eine eindeutige Kurve $c : [t_0, t_1] \rightarrow M$, welche die Frenet Gleichungen mit geodätischer Krümmung κ erfüllt, nach der Bogenlänge parametrisiert ist und die Anfangsbedingung $c(t_0) = p$ und $\dot{c}(t_0) = V$ erfüllt.

1 Die elastische Energie und ihre Euler-Lagrange Gleichung

Im Folgenden ist M immer eine glatte 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik g , siehe Definition 0.3.

Definition 1.1 (Elastische Energie). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c : I \rightarrow M$ eine zweimal stetig differenzierbare, reguläre Kurve. Sei weiterhin $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ die geodätische Krümmung von c . Dann nennen wir

$$F(c) := \int \kappa^2 ds := \int_I \kappa^2(t) |c'|_g(t) dt$$

die elastische Energie von c .

Bemerkung: In Definition 1.1 wurde keine Normale von c spezifiziert, denn κ^2 ist unabhängig von der Wahl der Normalen, siehe Bemerkung 0.18.

Nun wollen wir eine notwendige Bedingung dafür herausrechnen, dass eine Kurve minimal bzgl. der elastischen Energie ist. Dafür vergleichen wir eine optimale Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ mit einer beliebigen anderen Kurve $c : I \rightarrow M$. Optimale Kurve bedeutet in diesem Falle, dass $F(\gamma) \leq F(c)$. Gleichzeitig möchten wir noch zusätzlichen Nebenbedingungen fordern. In unserem Fall, dass Randdaten von c und γ gleich sind, d.h. hier $\gamma|_{\overline{I} \setminus I} = c|_{\overline{I} \setminus I}$ und $\dot{\gamma}|_{\overline{I} \setminus I} = \dot{c}|_{\overline{I} \setminus I}$. Natürlich können noch andere Bedingungen betrachtet werden, wie zum Beispiel, dass alle vergleichenden Kurven geschlossen sein müssen. Das prinzipielle Vorgehen im Folgenden ändert sich dadurch aber nicht.

Um nun die Euler-Lagrange Gleichung (so wird diese notwendige Bedingung genannt) von F zu berechnen, müssen wir eine Schaar von regulären glatten Kurven $\gamma : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ betrachten. Für diese Schaar soll gelten $F(\gamma(\cdot, 0)) \leq F(\gamma(\cdot, w))$ für alle $w \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und die entsprechenden Nebenbedingungen sollen eingehalten werden. Damit besitzt die reellwertige glatte Abbildung $\mathbb{R} \ni w \mapsto F(\gamma(\cdot, w))$ ein Minimum in 0. Damit gälte $0 = \frac{d}{dw} F(\gamma(\cdot, w))$ und dies nennt man Euler-Lagrange Gleichung.

Sei also $\varepsilon > 0$ fest und $\gamma : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine glatte Familie von Kurven. Der

Scharparameter heißt $w \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, während der Parameter der Kurven $s \in I$ heißt. Weiter definieren wir (siehe auch Abbildung 1.1)

$$\begin{aligned} V(s, w) &:= \frac{\partial}{\partial s} \gamma(s, w) = \dot{\gamma}(s, w) = \gamma'(s, w) \text{ die Tangente der Kurve} \\ v(s, w) &:= |V(s, w)|_g \neq 0 \text{ die Geschwindigkeit,} \\ T(s, w) &:= \frac{V(s, w)}{v(s, w)} \text{ die Einheitstangente,} \\ W(s, w) &:= \frac{\partial \gamma}{\partial w}(s, w) \text{ das Variationsvektorfeld} \end{aligned}$$

und $\kappa(s, w)$ sei die geodätische Krümmung bezüglich der s -Variablen. Mit diesen

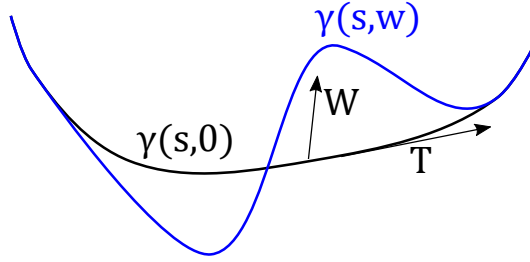


Abbildung 2: Variation einer Kurve.

Bezeichnungen können wir folgendes Lemma formulieren und beweisen. Wir benötigen diese Größen, denn diese sind genau die Ableitungen der Integranden in der Definition von F :

Lemma 1.2 (siehe z.B. [4] Lemma 1.1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w} &= g(\nabla_T W, T) v \\ \frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2g(R(W, T)T, \nabla_T T) - 4g(\nabla_T W, T) \kappa^2. \end{aligned}$$

Hierbei ist $R(\cdot, \cdot)$ der Riemannsche Krümmungstensor von M (siehe Def. 0.10) und $\nabla \cdot$ die kovariante Richtungsableitung.

Beweis. Um die erste Formel nachzuweisen benötigen wir folgende Hilfsrechnung. Man beachte, dass diese in lokalen Koordinaten (siehe Def. 0.1) durchgeführt wird:

$$\begin{aligned} (\nabla_W(\dot{\gamma}))^k &\stackrel{0.5}{=} \frac{\partial^2 \gamma^k}{\partial w \partial s} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i W^j \stackrel{\text{Schwartz}, 0.5}{=} (\nabla_{\dot{\gamma}} W)^k = (\nabla_{vT} W)^k \\ &\stackrel{0.8}{=} v (\nabla_T W)^k. \end{aligned}$$

Hierbei sind die Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole von g . Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} (g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}))^{\frac{1}{2}} \stackrel{0.8}{=} \frac{1}{2v} 2g(\nabla_W \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \\ &= \frac{g(v \nabla_T W, vT)}{v} = vg(\nabla_T W, T). \end{aligned}$$

Für die zweite Formel benötigen wir wieder eine Hilfsrechnung. Man beachte, dass die hier verwendete Hilfskurve in Def. 0.5 der Kurve $w \mapsto \gamma(t, w)$ entspricht:

$$\begin{aligned}
(\nabla_W T)^k &= \frac{\partial T^k}{\partial w} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k T^i W^j \\
&= \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\dot{\gamma}^k}{v} \right) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k T^i W^j \\
&= -\frac{\dot{\gamma}^k}{v^2} \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \gamma^k}{\partial s \partial w} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\dot{\gamma}^i}{v} W^j \\
&= \frac{1}{v} (\nabla_{\dot{\gamma}} W)^k - \frac{1}{v^2} g(\nabla_T W, T) v \dot{\gamma}^k \\
&= (\nabla_T W)^k - g(\nabla_T W, T) T^k.
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die eigentliche Aussage. Wir nutzen dafür, dass wir mithilfe der Frenet-Gleichungen 0.21 schreiben können $\kappa^2 = g(\nabla_T T, \nabla_T T)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa^2}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} (g(\nabla_T T, \nabla_T T)) \stackrel{0.8}{=} 2g(\nabla_W \nabla_T T, \nabla_T T) \\
&\stackrel{0.9,0.10}{=} 2g(R(W, T)T + \nabla_T \nabla_W T + \nabla_{\nabla_W T} T - \nabla_{\nabla_T W} T, \nabla_T T) \\
&= 2g(R(W, T)T + \nabla_T \nabla_W T + \nabla_{-Tg(\nabla_T W, T) + \nabla_T W} T - \nabla_{\nabla_T W} T, \nabla_T T) \\
&= 2g(R(W, T)T + \nabla_T(-Tg(\nabla_T W, T) + \nabla_T W) - g(\nabla_T W, T)\nabla_T T, \nabla_T T) \\
&= 2g(R(W, T)T, \nabla_T T) - 2\kappa^2 g(\nabla_T W, T) \\
&\quad + 2g\left(-g(\nabla_T W, T)\nabla_T T - Tg(\nabla_T \nabla_T W, T) \right. \\
&\quad \left. - Tg(\nabla_T W, \nabla_T T) + \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T\right) \\
&\stackrel{0.21}{=} 2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) - 4\kappa^2 g(\nabla_T W, T) + 2g(R(W, T)T, \nabla_T T)
\end{aligned}$$

□

Nun können wir F 'ableiten' und die Euler-Lagrange Gleichung herausrechnen:

Theorem 1.3. *Sei $\gamma : I = [0, L] \rightarrow M$ eine reguläre, glatte nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei γ außerdem kritisch für F , d.h. alle für alle kompakten, glatten Scharen von regulären Kurven $\gamma(s, w)$, sodass $\gamma(s, 0) = \gamma(s)$ und $\gamma(s, w) = \gamma(s, 0)$ für $s \in I \setminus K$ und $K \subset\subset I$ gilt*

$$\frac{d}{dw} F(\gamma(\cdot, w))|_{w=0} = 0.$$

Dann gilt für die geodätische Krümmung $K(\cdot)$ von $\gamma(\cdot)$

$$\frac{d^2}{ds^2} K(s) = -K(s)G(\gamma(s)) - \frac{1}{2}(K(s))^3.$$

Hier ist G die Gaußkrümmung von M .

Beweis. Da M von Dimension 2 ist, können wir den Riemannschen Krümmungstensor auch durch die Gaußkrümmung ausdrücken, siehe Thm. 0.14:

$$R(W, T)T = G(g(T, T)W - g(T, W)T) = G(W - g(W, T)T)$$

Nun benötigen wir partielle Integration. Diese stammt hier aus der Produktregel 0.8:

$$[g(A, B)]_0^L = \int_0^L \frac{d}{ds} g(A, B) ds = \int_0^L g(\nabla_T A, B) + g(A, \nabla_T B) ds,$$

wobei A, B zwei Vektorfelder auf der Kurve γ sind. Daraus folgt

$$\int_0^L g(\nabla_T A, B) ds = [g(A, B)]_0^L - \int_0^L g(A, \nabla_T B) ds$$

Da $\gamma(\cdot, 0)$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, ist damit $v(\cdot, 0) = 1$, damit vereinfacht sich die folgende Rechnung. Damit und mit Lemma 1.2 können wir nun mithilfe partieller Integration rechnen. Ableitung und Integral vertauscht, da alle beteiligten Größen als glatt auf kompakten Mengen angenommen werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} F(\gamma(\cdot, w))|_{w=0} &= \frac{d}{dw} \int_I K^2 v ds|_{w=0} \\ &= \int_0^L v (2g(\nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T) + 2g(R(W, T)T, \nabla_T T) - 4g(\nabla_T W, T) K^2) \\ &\quad + g(\nabla_T W, T) v K^2 ds \\ &= \int_0^L 2g(W, (\nabla_T)^3 T) + 2Gg(W, \nabla_T T) + 3K^2 g(W, \nabla_T T) + 6g(W, T) K' K ds \\ &\quad + [2g(\nabla_T W, \nabla_T T) + g(W, -2(\nabla_T)^2 T - 3K^2 T)]_0^L \\ &= \int_0^L 2g(W, (\nabla_T)^3 T) + 2Gg(W, \nabla_T T) + 3K^2 g(W, \nabla_T T) + 6g(W, T) K' K ds, \end{aligned}$$

denn die Variation ist kompakt, d.h. $W = \nabla_T W = 0$ am Rand. Sei N die Einheitsnormale von γ , sodass die Frenet-Gleichungen

$$\nabla_T T = KN, \quad \nabla_T N = -KT$$

gelten. Wählen wir $W(s) := \varphi(s)N(s)$, mit $\varphi \in C_0^\infty(I)$, d.h. W zeigt in Richtung N , so erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} F(\gamma(\cdot, w))|_{w=0} &= \int_0^L \varphi (2g(N, (\nabla_T)^2(NK)) + 2Gg(N, NK) + 3K^2 g(N, NK)) ds \\ &= \int_0^L \varphi (2g(N, (\nabla_T)(K\nabla_T N + K'N)) + 2GK + 3K^3) ds \\ &= \int_0^L \varphi (2g(N, K'\nabla_T N + K\nabla_T(-KT) + K''N + K'\nabla_T N) + 2GK + 3K^3) ds \\ &= \int_0^L \varphi (2g(N, -2K'KT + K(-K'T - K\nabla_T T) + K''N) + 2GK + 3K^3) ds \\ &= \int_0^L \varphi (-2K^3 + 2K'' + 2GK + 3K^3) ds. \end{aligned}$$

Mit dem Fundamentallema der Variationsrechnung erhalten wir dann die Aussage. \square

Ähnlich wie bei Minimalflächen nennen wir Kurven die gerade mal kritisch für die elastische Energie sind, bereits elastisch:

Definition 1.4. Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine glatte, reguläre, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Wir nennen γ elastisch, falls ihre geodätische Krümmung K die folgende Differentialgleichung erfüllt

$$\frac{d^2}{(ds)^2} K(s) = -K(s)G(\gamma(s)) - \frac{1}{2}(K(s))^3.$$

Für die weitere Theorie setzen wir die Gaußkrümmung G als konstant voraus und können dann obige Gleichung sogar explizit lösen, siehe Abschnitt 2.

Bemerkung 1.5. Im Beweis zu Thm. 1.3 haben wir einen Punkt offen gelassen. Bevor wir hier darauf eingehen, schauen Sie sich den Beweis bitte noch einmal an, und versuchen diesen zu finden.

Dieser Punkt liegt in der Wahl von W . Warum finden wir für jede beliebige glatte reguläre Kurve eine glatte (!) Schar von Kurven, dessen Variationsvektorfeld ein von uns a-priori(!) gewähltes W ist?

Die Idee ist dabei Folgende: Da bei dem Lemma der Variationsrechnung nur 'kleine' Träger von φ nötig sind, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass für ganz γ eine Parametrisierung $P : U \rightarrow M$ von M existiert, d.h. $\gamma(I) \subset\subset P(U)$. Dann schreiben wir $\gamma_{lok} = P^{-1}(\gamma)$ und W in lokalen Koordinaten bzgl P , d.h. $W_{lok} = (W^1, W^2)$. Dann setzen wir als Scharfamilie

$$\gamma(s, w) := P(\gamma_{lok}(s) + wW_{lok}(s)).$$

Da $\gamma(I)$ kompakt in $P(U)$ liegt, existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $w \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Familie $\gamma(s, w)$ wohldefiniert und glatt ist. Die nötigen Eigenschaften folgen aus der Kettenregel.

2 Analyse der Krümmungsgleichung

2.1 Qualitatives Verhalten

In diesem Kapitel wird die Euler-Lagrange Gleichung aus Abschnitt 1 untersucht:

$$K''(s) = -GK(s) - \frac{1}{2}K^3(s). \quad (2.1)$$

Hier sehen wir $G \in \mathbb{R}$ als einen festen Parameter, d.h. wir betrachten nur elastische Kurven auf Mannigfaltigkeiten mit konstanter Gaußkrümmung, z.B. \mathbb{R}^2 , \mathbb{S}^2 oder \mathbb{H}^2 . Wir lösen uns in diesem Abschnitt also von der Geometrie und bearbeiten (2.1) nur als gewöhnliche Differentialgleichung.

Zuerst wenden wir die Energiemethode auf (2.1) an und ziehen erste wichtige Schlussfolgerungen über das Verhalten der Lösungen.

Lemma 2.1 (siehe [4] Gleichung (2.1)). *Alle Lösungen von (2.1) mit den Anfangsdaten $K(0) = K_0$ und $K'(0) = K'_0$ erfüllen folgende Gleichung*

$$(K'(s))^2 = -GK^2(s) - \frac{1}{4}K^4(s) + GK_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K'_0)^2$$

Beweis. Die Gleichung wird mithilfe der Energiemethode hergeleitet. Dafür wird (2.1) mit $K'(s)$ durchmultipliziert und von 0 bis s integriert.

$$\begin{aligned}
K''(s) &= -GK(s) - \frac{1}{2}K^3 \\
\Rightarrow K''(s)K'(s) &= -GK(s)K'(s) - \frac{1}{2}K^3(s)K'(s) \\
\Rightarrow \int_0^s K''(t)K'(t) dt &= \int_0^s -GK(t)K'(t) - \frac{1}{2}K^3(t)K'(t) dt \\
\Rightarrow \frac{1}{2}(K'(s))^2 - \frac{1}{2}(K'_0)^2 &= -G\frac{1}{2}K^2(s) - \frac{1}{8}K^4(s) + G\frac{1}{2}K_0^2 + \frac{1}{8}K_0^4 \\
\Rightarrow (K'(s))^2 &= -GK^2(s) - \frac{1}{4}K^4(s) + GK_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K'_0)^2
\end{aligned}$$

□ *Bemerkung:* Da die Differentialgleichung (2.1) autonom ist, also nicht explizit von s abhängt, können wir per Verschiebung im Argument o.E. annehmen, dass die Anfangsdaten bei $s = 0$ liegen.

Korollar 2.2. *Jede Lösung von (2.1) ist stets beschränkt.*

Beweis. Angenommen es existiert eine Folge s_n aus dem Existenzbereich von (2.1) mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |K(s_n)| = \infty.$$

Da die rechte Seite von Lemma 2.1 ein Polynom vierten Grades in K mit negativem Vorzeichen vor dem höchsten Monom ist, geht diese Seite gegen $-\infty$. Damit existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $(K'(s_n))^2 < 0$, ein Widerspruch. □

Bemerkung 2.3. Die Beschränktheit von K liefert mithilfe von Lemma 2.1 die Beschränktheit von K' und außerdem auch von K'' . Dies impliziert, dass das maximale Existenzintervall einer Lösung ganz \mathbb{R} ist.

Wir werden später alle Lösungen hinschreiben, benötigen für die Rechnung aber, dass wir o.E. annehmen können, dass $K'_0 = 0$. Dafür beweisen wir folgendes Theorem:

Theorem 2.4. *Sei K eine beliebige Lösung von (2.1). Dann existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $K'(s) = 0$.*

Beweis. Zuerst definiert man $K(0) = K_0$ und $K'(0) = K'_0$ als Anfangsdaten der Lösung K .

Der Beweis wird nun per Widerspruch geführt. Man nehme an, es existiere kein $s \in \mathbb{R}$ mit $K'(s) = 0$, dann ist $K'(s) \neq 0, \forall s \in \mathbb{R}$. Also ist K streng monoton wachsend/fallend und außerdem nach Korollar 2.2 beschränkt, damit gilt

$$\exists K_\infty \in \mathbb{R} : \lim_{s \rightarrow \infty} K(s) = K_\infty. \quad (2.2)$$

Nun betrachtet man die Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sie ist divergent gegen ∞ und damit gilt wegen (2.2) $|K(n) - K(n+1)| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, denn konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen. Mithilfe des Mittelwertsatzes bekommt man eine weitere gegen ∞ divergente Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie folgt:

$$0 \leftarrow |K(n) - K(n+1)| = |K'(\xi_n)| |n+1 - n|, \quad \xi_n \in [n, n+1].$$

Also gilt $K'(\xi_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Nun kann wieder mithilfe des Mittelwertsatzes und obiger Divergenz von ξ_n eine weitere gegen ∞ divergente Folge $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruiert werden:

$$0 \leftarrow |K'(\xi_n) - K'(\xi_{n+2})| = |K''(\eta_n)| \underbrace{|\xi_n - \xi_{n+2}|}_{\geq 1}, \quad \eta_n \in [\xi_n, \xi_{n+2}].$$

Also gilt $K''(\eta_n) \rightarrow 0$.

Nun können die Ergebnisse mithilfe von (2.2) zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} K(\xi_n) &= K_\infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} K(\eta_n) &= K_\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} K'(\xi_n) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} K''(\eta_n) &= 0. \end{aligned}$$

Als nächstes müssen diese Konvergenzen in die stetigen Zusammenhänge (2.1) und Lemma 2.1 eingesetzt werden und man erhält

$$0 = -GK_\infty - \frac{1}{2}K_\infty^3 \quad (2.3)$$

$$0 = -GK_\infty^2 - \frac{1}{4}K_\infty^4 + GK_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K_0')^2. \quad (2.4)$$

Analog erhält man mit der Asymptotik gegen $-\infty$ und der Bezeichnung $\lim_{s \rightarrow -\infty} K(s) = K_{-\infty}$ folgende Gleichungen:

$$0 = -GK_{-\infty} - \frac{1}{2}K_{-\infty}^3 \quad (2.5)$$

$$0 = -GK_{-\infty}^2 - \frac{1}{4}K_{-\infty}^4 + GK_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K_0')^2. \quad (2.6)$$

Die einzigen Lösungen für (2.3) sind $K_\infty = 0$ und $K_\infty = \pm\sqrt{-2G}$. Diese werden im Nachfolgenden durch eine Fallunterscheidung bearbeitet.

(a) $K_\infty = \pm\sqrt{-2G}$:

Setzt man K_∞ in (2.4) ein, erhält man eine Bedingung an K_0 und K_0' :

$$0 = 2G^2 - \frac{1}{4}4G^2 + GK_0^2 + \frac{1}{4}K_0^4 + (K_0')^2 = \left(G + \frac{K_0^2}{2}\right)^2 + (K_0')^2. \quad (2.7)$$

Die einzige Möglichkeit (2.7) zu lösen, besteht darin, dass $K_0' = 0$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme.

(b) $K_\infty = 0$:

Wegen der strengen Monotonie von K muss $K_{-\infty} = \pm\sqrt{-2G}$ sein. Dies kann völlig analog zum Fall (a) zum Widerspruch geführt werden, indem $K_{-\infty}$ in (2.6) eingesetzt wird.

□

2.2 Jacobisch elliptischen Funktionen

Um nun alle Lösungen bestimmen zu können, benötigen wir die sogenannten Jacobisch elliptischen Funktionen. Einen Überblick über solche speziellen Funktionen liefert z.B. [1].

Definition 2.5 (siehe [1] 16.1.3). Für einen Parameter $k \in (0, 1)$ wird folgende Funktion definiert:

$$F_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_k(\varphi) := \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} d\psi$$

F'_k ist offensichtlich positiv, da $k \in (0, 1)$, also existiert F_k^{-1} . Setze nun noch

$$\text{AM}(s, k) := F_k^{-1}(s).$$

Definition 2.6 (siehe [1] 16.1.5). Für einen Parameter $k \in (0, 1)$ werden folgende Funktionen definiert:

$$\begin{aligned} \text{sn} : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], & \text{sn}(s, k) &:= \sin \varphi \Big|_{\varphi=F_k^{-1}(s)} = \sin \circ \text{AM}(s, k) \\ \text{cn} : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], & \text{cn}(s, k) &:= \cos \varphi \Big|_{\varphi=F_k^{-1}(s)} = \cos \circ \text{AM}(s, k) \\ \text{dn} : \mathbb{R} &\rightarrow \left[\sqrt{1 - k^2}, 1 \right], & \text{dn}(s, k) &:= \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \Big|_{\varphi=F_k^{-1}(s)} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(s, k)} \end{aligned}$$

Lemma 2.7. Sei $k \in (0, 1)$ fixiert, dann gilt

$$\text{AM}'(s, k) = \text{dn}(s, k)$$

Beweis. Der Hilfssatz folgt aus der Formel zur Berechnung der Ableitung der inversen Funktion. Dafür muss die Ableitung von F_k berechnet werden.

$$F'_k(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \text{AM}'(s, k) &= (F_k(s)^{-1})' = \frac{1}{F'_k(F_k^{-1}(s))} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))}}} \\ &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))} = \text{dn}(s, k). \end{aligned}$$

□

Damit können nun die Ableitungen der Jacobischen elliptischen Funktionen berechnet werden. Die nachfolgenden Ableitungsoperationen beziehen sich immer auf die s -Komponente der Variable in der Definition der Funktionen, siehe Definition 2.6.

Theorem 2.8 (siehe [1] Tabelle 16.16). Sei $k \in (0, 1)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{sn}'(s, k) &= \text{dn}(s, k) \text{cn}(s, k) \\ \text{cn}'(s, k) &= -\text{dn}(s, k) \text{sn}(s, k) \\ \text{dn}'(s, k) &= -k^2 \text{cn}(s, k) \text{sn}(s, k) \end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Gleichungen folgen direkt aus der Kettenregel, der Ableitungen des \sin bzw. des \cos und Lemma 2.7.

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}'(s, k) &= \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))} \right)' \\ &= \operatorname{dn}(s, k) (-2k^2 \sin(F_k^{-1}(s)) \cos(F_k^{-1}(s))) \frac{1}{2\sqrt{1 - k^2 \sin^2(F_k^{-1}(s))}} \\ &= -k^2 \operatorname{cn}(s, k) \operatorname{sn}(s, k). \end{aligned}$$

□

- 3 Einschub: Isometrien und Killing-Vektorfelder**
- 4 Ordnungsreduktion nach Langer&Singer**

5 Einschub: Die direkte Methode der Variationsrechnung

6 Ein Randwertproblem für elastische Kurven

7 Symmetrie minimierender Lösungen

Literatur

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, U.S. Government Printing Office Washington, D.C. 20402, 10th edition, 1972.
- [2] C. Bär. *Elementare Differentialgeometrie*. De Gruyter Berlin, 2nd edition, 2010.
- [3] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer Verlag Berlin, 1. auflage edition, 1995.
- [4] J. Langer and D. Singer. The total squared curvature of closed curves. *J. Differ. Geom.*, 20:1–22, 1984.