1 Geometrische Grundlagen

Hier werden einige für diese Vorlesung wichtige Resultate, Formeln und Definitionen aus der Differentialgeometrie gesammelt. Die Resultate stammen dabei aus [B].

1.1 Extrinsische Geometrie von Flächen

Definition 1.1 (metrischer Tensor, siehe [B] Seite 111)**.** Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^3$. Sei weiterhin $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$ und F eine Parametrisierung bezüglich S in p. Dann heißt

$$g_{ij} := \langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j} \rangle$$

metrischer Tensor oder erste Fundamentalform in lokalen Koordinaten.
Mit g^{ij} wird hier das Inverse von g_{ij} bezüglich Matrixmultiplikation bezeichnet.

Definition 1.2 (siehe [B] Definition 3.2.6)**.** Seien $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen, sowie $f : S \to S'$ glatt. Dann wird das Differential $df(p) : T_pS \to T_{f(p)}S'$ von f in $p \in S$ durch folgende Konstruktion definiert: Sei $V \in T_pS$ und $c(-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = V$. Dann setzt man

$$df(p)(V) := \frac{d}{dt} f(c(t)) \Big|_{t=0}.$$

Definition 1.3 (siehe [B] Definition 3.4.1)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Falls eine glatte Abbildung $\nu : S \to \mathbb{S}^2$ mit $\nu(p) \perp T_pS$ für alle $p \in S$ existiert, nennt man S orientierbar und die Abbildung ν Gauß-Abbildung oder Normale von S.

Definition 1.4 (siehe [B] Definition 3.5.1)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Gauß-Abbildung ν. Dann heißt für $p \in S$

$$\begin{aligned} W_p : T_pS &\to T_{\nu(p)}\mathbb{S}^2 \\ V &\mapsto -d\nu(p)(V) \end{aligned}$$

Weingarten-Abbildung von S.

Definition 1.5 (siehe [B] Formel 3.4)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Gauß-Abbildung ν sowie Karte F und sei $p \in S$. Dann heißt

$$h_{ij} := \langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \circ F \rangle = \langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, W_p(\frac{\partial F}{\partial x^j}) \rangle$$

zweite Fundamentalform von S in lokalen Koordinaten. Hierbei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^3$.

Definition 1.6 (mittlere Krümmung, siehe [B] Definition 3.6.9)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Parametrisierung F bezüglich $p \in S$ mit erster und zweiter Fundamentalform. Dann heißt

$$H(p) := \frac{g_{11}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{22}}{2(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)} = \frac{1}{2} \operatorname{Spur}\left(((g^{ik}) \circ (h_{ik}))_{i,k=1,2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Spur}(W_p)$$

mittlere Krümmung von S. $(g^{ik})_{i,k=1,2}$ ist dabei der inverse metrische Tensor.

Definition 1.7 (Gauß-Krümmung, siehe [B] Definition 3.6.9)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit erster und zweiter Fundamentalform, gegeben durch eine Parametrisierung F bezüglich $p \in S$. Dann heißt

$$G(p) := \frac{h_{11}h_{22} - (h_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \det(W_p)$$

Gauß-Krümmung von S.

1.2 Intrinsische Geometrie von Flächen

Definition 1.8 (siehe [B], Definition 4.4.1)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Dann heißt die Abbildung, die allen $p \in M$ ein Skalarprodukt $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ auf dem Tangentialraum von M zuordnet, Riemannsche Metrik, falls für alle Parametrisierungen $F : U \to M$ von M gilt, dass die Abbildungen

$$g_{ij}(x) := g_{F(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j}\right), x \in U \subset \mathbb{R}^2, \quad i, j = 1, 2$$

glatt in x sind. $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ heißt metrischer Tensor. Das Paar (M, g) nennt man dabei Riemannsche Fläche.

Definition 1.9 (Christoffelsymbol, siehe [B] Definition 4.2.13)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche. Dann definiert man in lokalen Koordinaten das Christoffelsymbol

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{2} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}\right),$$

wobei $(g^{k\ell})_{k,\ell=1,2}$ das Inverse des metrischen Tensors $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ ist.

Definition 1.10 (kovariante Ableitung, siehe [B] Seite 185)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche und sei V ein glattes Tangentialvektorfeld auf M, d.h. $\forall p \in M$ gilt $V(p) \in T_pM$. Sei nun $p \in M$ fixiert und F eine Parametrisierung von M in p. Sei weiterhin $W \in T_pM$ und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine glatte Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = W$ und $\varepsilon > 0$. Sei weiterhin $\tilde{c} := F^{-1} \circ c$ die Kurve in lokalen Koordinaten. Dann wird die kovariante Ableitung von V nach W in p durch

$$\nabla_W V := \sum_{k=1}^{2} \left((V \dot{\circ} \tilde{c})^k + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(0)) V^i \dot{\tilde{c}}(0)^j \right) \frac{\partial F}{\partial x^k}$$

definiert.

Bemerkung 1.11. Die Definition der kovarianten Ableitung, siehe 1.10, liegt zwar in lokalen Koordinaten vor, allerdings kann gezeigt werden, dass diese wohldefiniert ist (siehe [J] Seite 105).

Hilfssatz 1.12 (siehe [B] Seite 185)**.** *In lokalen Koordinaten kann die kovariante Ableitung auch ohne eine Hilfskurve angegeben werden. Dafür gelten hier die gleichen Bezeichnungen wie in 1.10. Dann gilt*

$$(\nabla_W V)^i = \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{kj}^i V^k \right) W^j.$$

Hilfssatz 1.13 (siehe [B] Lemma 4.2.12)**.** *Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $c : I \to M$ eine glatte Kurve auf M mit $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, J ein weiteres Intervall in $\mathbb{R}$ mit $\varphi : J \to I$ eine Umparametrisierung von c, V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf M und $f, h : M \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen auf M. Seien weiterhin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p \in M$ und $\tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine glatte Kurve mit $\tilde{c}(0) = p$ sowie $\dot{\tilde{c}}(0) = Z(p)$. Dann gelten folgende Formeln für die kovariante Ableitung:*

- *Linearität erster Teil:*

$$\nabla_Z(\alpha V + \beta W) = \alpha \nabla_Z V + \beta \nabla_Z W$$

- *Produktregel erster Teil in $p \in M$:*

$$\nabla_{Z(p)} f V = \frac{d}{dt} f(\tilde{c}(t)) \bigg|_{t=0} V + f \nabla_Z V$$

- *Produktregel zweiter Teil:*

$$\frac{d}{dt} g_{c(t)}(V, W) = g_{c(t)} \left(\nabla_{\dot{c}(t)} V, W \right) + g_{c(t)} \left(V, \nabla_{\dot{c}(t)} W \right)$$

- *Kettenregel:*
$$\nabla_{c\dot{\circ}\varphi} V(c \circ \varphi) = \dot{\varphi}\,(\nabla_{\dot{c}} V) \circ \varphi$$

- *Linearität zweiter Teil:*
$$\nabla_{fV+hW} Z = f \nabla_V Z + h \nabla_W Z$$

Definition 1.14 (siehe [B] Definition 4.3.1)**.** Seien V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf einer Riemannsche Fläche (M, g). Dann wird die zweifache kovariante Ableitung durch

$$\nabla^2_{V,W} Z := \nabla_V(\nabla_W Z) - \nabla_{\nabla_V W} Z$$

definiert.

Definition 1.15 (siehe [B] Definition 4.3.4)**.** Seien V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf einer Riemannschen Fläche (M, g). Dann wird der Riemannsche Krümmungstensor durch

$$R(V, W)Z := \nabla^2_{V,W} Z - \nabla^2_{W,V} Z$$

definiert.

Hilfssatz 1.16 (siehe [B] Tabelle 1)**.** *Der Riemannsche Krümmungstensor besitzt folgende Darstellung in lokalen Koordinaten:*

$$R^\ell_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^\ell_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{ki}}{\partial x^j} + \sum_m \left(\Gamma^\ell_{mi} \Gamma^m_{kj} - \Gamma^\ell_{mj} \Gamma^m_{ki} \right).$$

Definition 1.17 (siehe [B] Tabelle 1)**.** Die Gauß-Krümmung G auf einer Riemannschen Fläche (M, g) wird in Koordinaten durch

$$G = \frac{1}{2} \sum_{j,k} g^{jk} \left(\sum_\ell R^\ell_{\ell jk} \right)$$

erklärt.

Bemerkung 1.18. Das Theorema Egregium (siehe [B] Satz 4.3.8 und Tabelle 1, Seite 183) zeigt, dass die extrinsische Definition 1.7 der Gauß-Krümmung mit 1.17 für den Fall übereinstimmt, dass die Metrik durch den ambienten Raum $\mathbb{R}^3$ induziert wird.

Folgendes Resultat ist nur für 2-dimensionale Flächen korrekt und besitzt keine entsprechende Verallgemeinerung in höheren Dimensionen.

Satz 1.19 (siehe [B] Lemma 4.3.11). *Sei (M,g) eine 2-dimensionale Riemannsche Fläche und $G : M \to \mathbb{R}$ die Gauß-Krümmung auf M. Seien weiterhin V, W, Z glatte Tangentialvektorfelder auf (M,g). Dann gilt für den Riemannschen Krümmungstensor*

$$\begin{aligned} R^k_{ij\ell} &= G\left(g_{j\ell}\delta^k_i - g_{i\ell}\delta^k_j\right) \\ R(V,W)Z &= G\left(g(Z,W)V - g(Z,V)W\right) \end{aligned}$$

Satz 1.20 (Riemannsche Normalkoordinaten, siehe [B] Satz 4.6.7). *Sei (M,g) eine Riemannsche Fläche und $p \in M$. Dann existiert eine Parametrisierung von M um p, sodass für den metrischen Tensor in p gilt:*

- $g_{ij}(p) = \delta_{ij},\ i,j = 1,2$
- $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0,\ i,j,k = 1,2.$

1.3 Kurven auf Riemannschen Flächen

Definition 1.21 (siehe [B] Definition 2.1.1). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, (M,g) eine Riemannsche Fläche und $c : I \to M$ eine glatte Kurve. Diese wird als regulär bezeichnet genau dann, wenn $\forall t \in I\ \dot{c}(t) \neq 0$.

Definition 1.22 (geodätische Krümmung, siehe [B] Definition 4.5.14). Sei (M,g) eine Riemannsche Fläche, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \to M$ eine glatte, reguläre Kurve. Sei weiterhin N ein glattes Vektorfeld an c mit $N(t) \in T_{c(t)}M$, $g_{c(t)}(N(t),N(t)) = 1$, $\forall t \in I$ und $g_{c(t)}(\dot{c}(t),N(t)) = 0$. Dann wird die geodätische Krümmung κ von c durch

$$\kappa(t) := \frac{g_{c(t)}(\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t), N(t))}{g_{c(t)}(\dot{c}(t),\dot{c}(t))}$$

definiert.

Bemerkung 1.23. Die Definition der geodätischen Krümmung in 1.22 ist gegenüber richtungserhaltenden Umparametrisierungen invariant. Wird die Laufrichtung der Kurve jedoch umgekehrt, ändert dies lediglich das Vorzeichen der geodätischen Krümmung (vergleiche 1.13).
Außerdem ändert ein umgekehrtes Vorzeichen für die Normale ebenfalls nur das Vorzeichen der geodätischen Krümmung.

Definition 1.24 (siehe [B] Proposition 2.1.13). Sei (M,g) eine Riemannsche Fläche und $c : (0,L) \to M$ eine glatte, reguläre Kurve. Diese ist nach der Bogenlänge parametrisiert genau dann, wenn für das Längenfunktional folgende Bedingung gilt

$$\forall t \in (0, L): \quad L_{(0,t)}(c) := \int_0^t \sqrt{g_{c(s)}\left(\dot{c}(s), \dot{c}(s)\right)}\, ds = t.$$

Hilfssatz 1.25 (siehe [B] Definition 2.1.11)**.** *Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \to M$ eine glatte, reguläre Kurve. Dann gilt, dass c nach der Bogenlänge parametristert ist genau dann, wenn*

$$\forall t \in I: \quad g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 1.$$

Satz 1.26 (siehe [B] Proposition 2.1.13)**.** *Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \to M$ eine glatte, reguläre Kurve. Dann existiert eine richtungserhaltende Umparametrisierung $\varphi : J \to I$ von c, sodass $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Satz 1.27 (Frenet-Gleichungen, siehe [B] Aufgabe 4.24)**.** *Sei (M, g) eine Riemannsche Fläche, $t_0, t_1 > 0$, $c : [t_0, t_1] \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Einheitsnormalenvektorfeld N bezüglich g entlang c wie in Definition 1.22 und $\kappa : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ die dazugehörige geodätische Krümmung von c. Dann gelten für diese Kurve die Frenet Gleichungen:*

$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = \kappa \cdot N \text{ und } \nabla_{\dot{c}}N = -\kappa \cdot \dot{c}.$$

Sei umgekehrt eine glatte Funktion $\kappa : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann existiert zu jedem Punkt $p \in M$ und Einheitsvektor $V \in T_pM$ bezüglich g eine eindeutige Kurve $c : [t_0, t_1] \to M$, welche die Frenet Gleichungen mit geodätischer Krümmung κ erfüllt, nach der Bogenlänge parametrisiert ist und die Anfangsbedingung $c(t_0) = p$ und $\dot{c}(t_0) = V$ erfüllt.

Literatur

[B] C. Bär; *Elementare Differentialgeometrie*, 2. Auflage, De Gruyter Verlag Berlin 2010.

[J] J. Jost; *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, 1. Auflage, Springer Verlag Berlin 1995