

Vorlesung Einführung in die gewöhnlichen  
Differentialgleichungen  
Sommersemester 2019, Tübingen

Sascha Eichmann

4. Juli 2019

**Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Existenz, der Satz von Peano</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Eindeutigkeit, das Lemma von Gronwall</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Lösungsmethoden</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Das maximale Existenzintervall, stetige Abhängigkeiten</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>Differenzierbare Abhängigkeit von Anfangsdaten</b>	<b>25</b>
<b>7</b>	<b>Lineare Gleichungen</b>	<b>28</b>
<b>8</b>	<b>Stabilität von dynamischen Systemen</b>	<b>34</b>
<b>A</b>	<b>Variationsrechnung</b>	<b>46</b>
	<b>Literatur</b>	<b>49</b>

# 1 Einführung

Dieses Vorlesungsskript beruht auf Skripten von H.-Chr. Grunau, [5], [4], sowie in erster Linie auf den Büchern von H. Amann [1] und W. Walter [7].

Definieren wir zuerst die allgemeine Problemstellung, welche wir in dieser Vorlesung untersuchen werden. Diese soll das Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung sein, d.h. wir suchen einfach gesagt eine (möglicherweise mehrfach) differenzierbare Funktion, die eine Gleichung erfüllt und zu einem vorgegebenem Variablenwert einen bestimmten Wert annimmt. Dies wollen wir nun präzisieren:

**Problemstellung 1.1.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n \cdot k}$  offen mit  $n, k \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  gegeben. Sei weiter  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega$  und  $t_0 \in I$ .

Wir sagen nun, dass eine Abbildung  $x$  folgendes Anfangswertproblem löst,

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \\ x(t_0) = x_0, x^{(1)}(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (1.1)$$

falls ein offenes  $J \subset I$  mit  $t_0 \in J$  und ein  $x \in C^n(J, \mathbb{R}^k)$  existiert mit

$$\left( x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)} \right) : J \rightarrow \Omega, \quad (1.2)$$

welches (1.1) für alle  $t \in J$  erfüllt.

Eines der einfachsten Beispiele für ein Anfangswertproblem ist Folgendes.

**Beispiel 1.2.** Sei  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}$  gegeben.

$$\begin{cases} x'(t) = cx(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Nachdem wir einige grundlegende Sprechweise festgelegt haben, werden wir eine Lösungsmethode erarbeiten, mit der wir Beispiel 1.2 bearbeiten können.

**Notation 1.3.**

1. Wir nennen eine Gleichung der Form aus (1.1) eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung. D.h. wir bemerken damit die höchste auftretende Ableitungsordnung.
2. Angelegt an die Physik nennen wir die Variable einer Lösung, also das  $t$ , gerne auch Zeit. Entsprechend notieren wir für die erste Ableitung auch gerne  $\dot{x}$  und für die zweite Ableitung  $\ddot{x}$  usw.
3. Falls die Gleichung (1.1) unabhängig von der Zeit, also das auftretende  $f$  nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängt (d.h. z.B.  $f(t, y) = f(y)$ ), nennen wir die Gleichung autonom.
4. Die  $x$ -Variable von  $f$  nennen wir ebenfalls angelehnt an die Physik Raumvariable.
5. Wir werden öfter von Abbildungen  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  sprechen, welche stetig differenzierbar sein sollen. Damit ist hier gemeint, dass  $x \in C^0([a, b]) \cap C^1((a, b))$  und  $\lim_{t \in (a, b), t \rightarrow a} x'(t)$ ,  $\lim_{t \in (a, b), t \rightarrow b} x'(t)$  existieren. Dann setzen wir

$$x'(a) := \lim_{t \in (a, b), t \rightarrow a} x'(t) \text{ und } x'(b) := \lim_{t \in (a, b), t \rightarrow b} x'(t)$$

**Methode 1.4** (Trennung der Variablen). Nehmen wir an  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}$  habe folgende Gestalt

$$f(t, x) = g(t)h(x)$$

für ein  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und ein  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Nehmen wir weiter an, wir hätten eine Lösung zu (1.1) zu diesem  $f$  mit Anfangsdatum  $x(t_0) = x_0 \in \Omega$  gefunden mit  $h(x(t)) \neq 0$  für eine Umgebung von  $t_0$ . Dann können wir mithilfe der Substitutionsformel folgende Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(t)h(x(t)) \\ \Rightarrow \frac{x'(t)}{h(x(t))} &= g(t) \\ \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{h(x(s))} ds &= \int_{t_0}^t g(s) ds \\ \Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{h(y)} dy &= \int_{t_0}^t g(s) ds. \end{aligned}$$

Sei nun  $H$  eine Stammfunktion zu  $\frac{1}{h}$ . Falls dazu eine Umkehrabbildung existiert, erhalten wir

$$\begin{aligned} H(x(t)) - H(x_0) &= \int_{t_0}^t g(s) ds \\ \Rightarrow x(t) &= H^{-1} \left( \int_{t_0}^t g(s) ds + H(x_0) \right). \end{aligned}$$

Da wir normalerweise nicht wissen ob die gemachten Annahmen korrekt sind und wir uns bei einer solchen Herleitung etwas Spielraum in der Genauigkeit lassen wollen, muss dieser Ansatz durch Einsetzen in die Gleichung, also mit der Durchführung einer Probe, noch überprüft werden.

Falls  $h$  und  $g$  stetig sind, und  $h(x_0) \neq 0$  kann man mit dem inversen Funktionsatz alle gemachten Rechnungen und Annahmen (lokal) verifizieren.

Wenden wir nun diese Methode auf das Beispiel 1.2 an:

$$\begin{aligned} x'(t) &= cx(t) \\ \Rightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} &= c \\ \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x(s)} ds &= \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{y} dy = \int_{t_0}^t c dt = c(t - t_0) \\ \Rightarrow \log(x(t)) - \log(x_0) &= c(t - t_0) \\ \Rightarrow x(t) &= \exp(c(t - t_0) + \log(x_0)) = x_0 \exp(c(t - t_0)). \end{aligned}$$

Den so gewonnen Ansatz müssen wir noch durch eine Probe überprüfen:

$$x(t_0) = x_0 \exp(c(t_0 - t_0)) = x_0 \exp(0) = x_0$$

sowie

$$x'(t) = cx_0 \exp(c(t - t_0)) = cx(t).$$

Damit erfüllt  $x$  das Anfangswertproblem aus Beispiel 1.2.

Kommen wir nun noch zu einem Hilfsmittel, um sich einen Überblick über die Gestalt einer möglichen Lösung zu erarbeiten, dem Phasendiagramm:

**Definition 1.5.** Falls die Gleichung aus Problem 1.1 autonom und von erster Ordnung ist, nennt man das Vektorfeld auf  $\Omega$

$$x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$$

Richtungsfeld. Eine Skizze zu einem solchen Richtungsfeld wird Phasendiagramm genannt.

**Bemerkung 1.6.** Falls  $f$  erster Ordnung und nicht autonom ist, kann man eine neue Funktion  $y(t) := (t, x(t))$  definieren, welche  $y'(t) = (1, f(y(t))) =: g(y(t))$  erfüllt. D.h. wir könnten hier immer zu einer autonomen Gleichung übergehen und entsprechend Phasendiagramme anlegen.

**Beispiel 1.7.** Wir skizzieren das Phasendiagramm der Gleichung

$$x'(t) = tx(t)$$

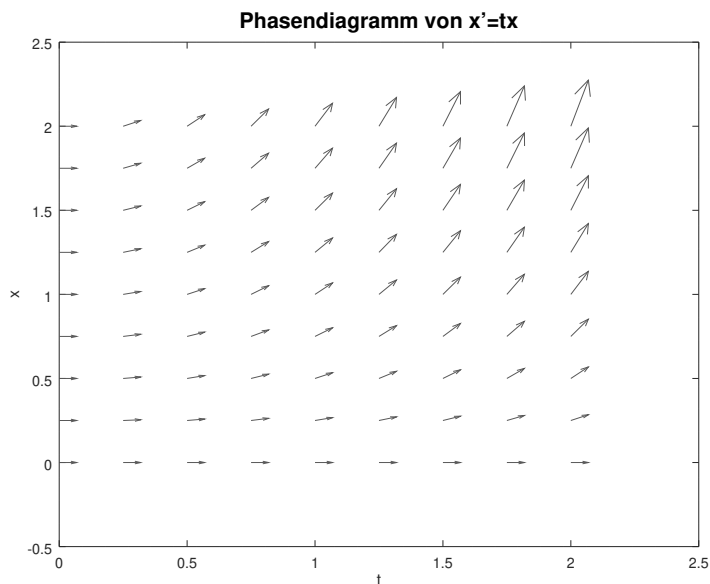


Abbildung 1: Beispiel für ein Phasendiagramm.

## 2 Existenz, der Satz von Peano

Dieser Abschnitt orientiert sich an [7, §7]:

Für den Aufbau der Theorie ist es hinderlich Gleichungen  $n$ -ter Ordnung zu betrachten. Deswegen werden wir mit folgendem Trick die Ordnung der Gleichung auf 1 reduzieren:

**Methode 2.1** (Ordnungsreduktion). Sei das Anfangswertproblem wie in Problem 1.1 gegeben und sei  $x$  eine Lösung. Dann setzen wir

$$y(t) := \begin{pmatrix} x^{(0)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$y'(t) = \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ f(t, y(t)) \end{pmatrix}$$

und für den Anfangswert haben wir

$$y(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} =: y_0.$$

Deswegen können wir für theoretische Aspekte o.B.d.A. davon ausgehen, dass wir nur Gleichungen erster Ordnung haben. D.h. das Anfangswertproblem ist von folgender Gestalt:

**Problemstellung 2.2.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen. Sei weiter  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ , ein  $x_0 \in \Omega$  und ein  $t_0 \in I$  gegeben. Dann nennen wir die Abbildung  $x$  Lösung von

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

falls dieses (2.1) im Sinne von Problem 1.1 erfüllt.

Typischerweise benötigt man für Existenzaussagen bei Differentialgleichungen einen Kompaktheitssatz in einem  $\infty$ -dimensionalen Raum. Wir werden hier den Satz von Arzelà-Ascoli nutzen. Um diesen zu formulieren, führen wir folgende Definition ein:

**Definition 2.3** (Gleichgradige Stetigkeit). Sei  $J \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $k \in \mathbb{N}$ . Wir nennen die Menge  $M \subset C^0(J, \mathbb{R}^k)$  gleichgradig stetig, falls  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , sodass für alle  $g \in M$  und für alle  $t, s \in J$  mit  $|t - s| < \delta$  gilt

$$|g(t) - g(s)| < \varepsilon.$$

*Bemerkung:* Wesentlich bei dieser Definition ist, dass das  $\delta$  nur in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  gewählt wird, also unabhängig von  $g$  ist.

Kommen wir nun zum angekündigten Kompaktheitssatz:

**Theorem 2.4** (Arzelà-Ascoli). Sei  $J = [a, b]$  ein kompaktes Intervall. Sei weiter eine Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0(J, \mathbb{R}^k)$  gegeben mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\exists C > 0$ , sodass für alle  $t \in J$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $|g_n(t)| \leq C$ .
2. Die Menge  $M := \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist gleichgradig stetig.

Dann existiert in  $J$  eine gleichmäßig konvergente Teilfolge von  $g_n$ .

*Beweis.* Der Beweis wird in 2 Schritten geführt. Zuerst werden wir eine auf einer dichten Teilmenge von  $J$  punktweise konvergente Teilfolge konstruieren. Danach werden wir zeigen, dass diese Teilfolge auf ganz  $J$  gleichmäßig konvergiert.

Zum ersten Schritt: Sei  $A := \mathbb{Q} \cap J = \{t_1, t_2, \dots\}$  eine abzählbare dichte Teilmenge von  $J$ . Dann ist die Zahlenfolge  $(g_n(t_1))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$  beschränkt und besitzt somit eine konvergente Teilfolge

$$g_{(n_1)_1}(t_1), g_{(n_1)_2}(t_1), g_{(n_1)_3}(t_1), \dots$$

Weiter ist die Zahlenfolge  $(g_{(n_1)_j}(t_2))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$  ebenfalls beschränkt und man kann wieder eine konvergente Teilfolge extrahieren

$$g_{(n_2)_1}(t_2), g_{(n_2)_2}(t_2), g_{(n_2)_3}(t_2), \dots$$

Diesen Prozess können wir nun beliebig fortführen und erhalten

$$\begin{array}{lll} g_{(n_1)_1}, g_{(n_1)_2}, g_{(n_1)_3} & \text{konvergiert für} & t = t_1 \\ g_{(n_2)_1}, g_{(n_2)_2}, g_{(n_2)_3} & \text{konvergiert für} & t = t_1, t_2 \\ g_{(n_3)_1}, g_{(n_3)_2}, g_{(n_3)_3} & \text{konvergiert für} & t = t_1, t_2, t_3 \\ & & \vdots \end{array}$$

Betrachten wir die Diagonalfolge  $(g_{(n_j)_j})_{j \in \mathbb{N}}$  und benennen um, so erhalten wir eine Teilfolge  $(g_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ , welche auf  $A$  punktweise konvergiert.

Kommen wir nun zum zweiten Schritt: Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig und  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  gegeben aus der gleichgradigen Stetigkeit. Sei weiter o.E. nach Umordnung  $t_1, \dots, t_K \in A$  gegeben mit  $\bigcup_{i=1}^K B_{\frac{\delta}{2}}(t_i) \supset J$ . Dann liefert die punktweise Konvergenz ein  $j_0 \in \mathbb{N}$  nur abhängig von  $\varepsilon$ , sodass für alle  $j, \ell \geq j_0$  gilt

$$|g_{n_j}(t_i) - g_{n_\ell}(t_i)| \leq \varepsilon \text{ für alle } i = 1, \dots, K.$$

Sei nun  $t \in J$  beliebig. Dann finden wir ein  $i \in \{1, \dots, K\}$  mit  $|t - t_i| < \delta$ . Also erhalten wir für  $j, \ell \geq j_0$  beliebig

$$\begin{aligned} |g_{n_j}(t) - g_{n_\ell}(t)| &\leq |g_{n_j}(t) - g_{n_j}(t_i)| \\ &\quad + |g_{n_j}(t_i) - g_{n_\ell}(t_i)| + |g_{n_\ell}(t_i) - g_{n_\ell}(t)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist die Folge  $(g_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge bezüglich der Maximumnorm, also wegen der Vollständigkeit von  $C^0(J, \mathbb{R}^k)$  konvergent.  $\square$

Nun können wir Existenz unter milden Regularitätsbedingungen an  $f$  zeigen:

**Theorem 2.5** (Satz von Peano). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen. Seien weiter die Anfangsdaten  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \Omega$  gegeben. Sei nun

$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig. Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $t_0$  und ein  $x \in C^1(U, \Omega)$  welches

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)), \forall t \in U \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

erfüllt. Also löst dieses  $x$  Problem 2.2.

*Beweis.*

Wir werden das Problem zuerst für  $t \geq t_0$  lösen, indem wir die Existenz von einem  $\varepsilon > 0$  zeigen und einem stetigen  $x : [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \Omega$ , für welches gilt

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (2.2)$$

Mit dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung ist  $x$  dann stetig differenzierbar und löst die Differentialgleichung für alle  $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$  und erfüllt  $x(t_0) = x_0$ . Dann wird sich das Argument für  $t < t_0$  wiederholen lassen und durch zusammenkleben der beiden gewonnen Funktionen, erhalten wir eine Lösung von Problem 2.2

Sei nun  $T > 0$  und  $R > 0$ , so gegeben, dass  $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B_R(x_0)} \subset I \times \Omega$ . Sei außerdem  $\varphi \in C_0^\infty(B_R(x_0))$ , sodass  $\forall y \in B_{\frac{R}{2}}(x_0)$  gilt  $\varphi(y) = 1$ . Wir definieren nun eine neue 'rechte' Seite der Differentialgleichung  $\tilde{f}(t, y) = f(t, y) \cdot \varphi(y)$ . Ohne Einschränkung können wir  $\tilde{f}$  bzgl. der Raumvariablen mit 0 fortsetzen, d.h. falls  $y \notin B_R(x_0)$ , so gilt für alle  $t \in I$ , dass  $\tilde{f}(t, y) = 0$ .

Wir setzen  $M := \sup\{|\tilde{f}(t, y)| : (t, y) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times \mathbb{R}^k\} < \infty$ . Wir können o.E. annehmen, dass  $M > 0$  ist, sonst würden wir die Gleichung  $x'(t) \equiv 0$  lösen müssen. Sei weiter  $\gamma < \min(T, \frac{R}{M})$ .

Für jedes  $\alpha > 0$  geben wir nun eine Näherungslösung  $x_\alpha : [t_0 - \alpha, t_0 + \gamma] \rightarrow B_R(x_0)$  des Problems für  $\tilde{f}$  an. Danach werden wir mit dem Satz von Arzelà-Ascoli 2.4 einen Grenzwert für  $\alpha \rightarrow 0$  bekommen.

$$x_\alpha(t) := \begin{cases} x_0, & t \in [t_0 - \alpha, t_0] \\ x_0 + \int_{t_0}^t \tilde{f}(s, x_\alpha(s - \alpha)) ds, & t \in [t_0, t_0 + \gamma] \end{cases}$$

Diese Definition ist dabei induktiv zu verstehen, d.h. man erhält zuerst eine Abbildung auf  $[t_0, t_0 + \alpha]$ , welche es einem erlaubt  $x_\alpha$  auf  $[t_0, t_0 + 2\alpha]$  zu berechnen. Dies führt man fort bis  $t_0 + \gamma$  erreicht ist. Um Satz 2.4 anzuwenden, werden wir nun zeigen, dass  $\{x_\alpha|_{[t_0, \gamma]}, \alpha > 0\}$  gleichgradig stetig und beschränkt in der Maximumnorm ist. Dazu werden wir zeigen, dass diese  $x_\alpha$  alle Lipschitz stetig mit derselben Lipschitzzahl sind: Sei dafür  $t, \tilde{t} \in [t_0 - \alpha, t_0 + \gamma]$  beliebig und o.B.d.A.  $t < \tilde{t}$ . Eine Fallunterscheidung liefert

$$|x_\alpha(t) - x_\alpha(\tilde{t})| \leq \int_t^{\tilde{t}} |\tilde{f}(s, x_\alpha(s - \alpha))| ds \leq |\tilde{t} - t|M \leq \gamma M < R.$$

Für  $t = t_0$  zeigt diese Abschätzung, dass  $x_\alpha \in B_R(x_0)$ , womit  $x_\alpha$  wohldefiniert und in der Maximumnorm unabhängig von  $\alpha$  beschränkt ist. Weiter ist damit  $\{x_\alpha|_{[t_0, t_0 + \gamma]} : \alpha > 0\}$  gleichgradig stetig und somit ist der Satz von Arzelà-Ascoli anwendbar für  $\left(x_{\frac{1}{n}}|_{[t_0, t_0 + \gamma]}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Wir wählen eine gleichmäßig

konvergente Teilfolge aus und nennen diese  $(x_{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Den Grenzwert nennen wir  $x \in C^0([t_0, t_0 + \gamma], \overline{B_R(x_0)})$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} |x_{\alpha_n}(t - \alpha_n) - x(t)| &\leq |x_{\alpha_n}(t - \alpha_n) - x_{\alpha_n}(t)| + |x_{\alpha_n}(t) - x(t)| \\ &\leq M\alpha_n + |x_{\alpha_n}(t) - x(t)|, \end{aligned}$$

womit  $x_{\alpha_n}(\cdot - \alpha_n)$  ebenfalls gleichmäßig gegen  $x$  konvergiert. Da  $\tilde{f}$  auf  $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B_R(x_0)}$  gleichmäßig stetig ist, konvergiert somit  $\tilde{f}(\cdot, x_{\alpha_n}(\cdot - \alpha_n))$  gleichmäßig gegen  $\tilde{f}(\cdot, x(\cdot))$ . Damit kann Grenzwert und Integral in der Definition von  $x_{\alpha_n}$  vertauscht werden und wir erhalten für  $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$

$$\begin{aligned} x(t) - x_{\alpha_n}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t \tilde{f}(s, x_{\alpha_n}(s - \alpha_n)) ds \\ &\rightarrow x_0 + \int_{t_0}^t \tilde{f}(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

Damit haben wir (2.2) für  $\tilde{f}$  bewiesen. Da  $x$  stetig ist und  $x(t_0) = x_0$ , existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass für alle  $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$  gilt  $x(t) \in B_{\frac{R}{2}}(x_0)$ . Nach der Definition von  $\tilde{f} = f \cdot \varphi$  haben wir damit für alle  $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

□

Falls die rechte Seite der Differentialgleichung  $f$  nicht stetig ist, kann nicht mehr erwartet werden, dass eine Lösung existiert. Dazu das folgende Beispiel, dass sogar die Existenz von nur differenzierbaren (nicht unbedingt stetig differenzierbaren) Lösungen ausschließt:

**Beispiel 2.6.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Dann existiert kein  $\varepsilon > 0$  und kein differenzierbares  $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

*Beweis.* Wir nehmen an, ein solches  $x$  würde existieren. Da

$$x'(0) = f(x(0)) = f(0) = 1$$

und  $x$  differenzierbar ist, finden wir ein  $\delta > 0$ , sodass  $x(-\delta) < 0$ . Mit der Differentialgleichung bedeutet dies aber

$$x'(-\delta) = f(x(-\delta)) = -1.$$

Mit folgender im Allgemeinen geltenden Aussage würden wir ein  $\xi \in (-\delta, 0)$  finden mit  $\frac{1}{2} = x'(\xi) = f(x(\xi)) \in \{-1, 1\}$ , also ein Widerspruch. Die Aussage ist ein Zwischenwertsatz für die Ableitung und lautet wie folgt:

Sei  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und sei  $[t_0, t_1] \subset (a, b)$ . Dann existiert für alle



$\eta \in \mathbb{R}$  zwischen  $g'(t_0)$  und  $g'(t_1)$  ein  $\xi \in [t_0, t_1]$  mit  $g'(\xi) = \eta$ .

Der Beweis dazu funktioniert wie folgt: Wir nehmen o.E. an, dass  $g'(t_0) < g'(t_1)$  und dass  $\eta \in (g'(t_0), g'(t_1))$  liegt. Wir definieren  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $h(t) = g(t) - \eta t$ . Da  $h$  differenzierbar und insbesondere stetig ist, existiert das Minimum auf  $[t_0, t_1]$ , also wir finden ein  $\xi \in [t_0, t_1]$  mit

$$\inf_{t \in [t_0, t_1]} h(t) = h(\xi).$$

Da  $h'(t_0) = g'(t_0) - \eta < 0$ , findet man ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$  gilt  $h(t) < h(t_0)$ . Da  $h'(t_1) = g'(t_1) - \eta > 0$  schließt man analog, dass  $\xi \neq t_0, t_1$ . Also gilt  $\xi \in (t_0, t_1)$ . Damit

$$0 = h'(\xi) = g'(\xi) - \eta$$

und die Aussage ist gezeigt. □

### 3 Eindeutigkeit, das Lemma von Gronwall

Dieses Kapitel ist angelehnt an [1, §6] bzw. [4, §34].

Im Allgemeinen reichen die Voraussetzungen des Satzes von Peano 2.5 nicht aus um Eindeutigkeit des Problems 2.2 zu zeigen, wie folgendes Beispiel zeigt:

**Beispiel 3.1.**

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Eine Lösung zu diesem Problem ist  $x \equiv 0$ . Eine andere ist

$$x(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{2}\right)^2, & t \geq 0 \\ -\left(\frac{t}{2}\right)^2, & t < 0 \end{cases}$$

Fordern wir allerdings etwas mehr Regularität, werden wir Eindeutigkeit zeigen können. Diese formulieren wir nun:

**Definition 3.2.** Wir sagen das Problem 2.2 genüge einer lokalen Lipschitzbedingung, falls das auftretende  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  ( $I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen) folgende Eigenschaften erfüllt:

1.  $f$  ist bezüglich der Zeitvariablen stetig, d.h. für alle  $x \in \Omega$  ist  $t \mapsto f(t, x)$  stetig.
2.  $f$  genügt bzgl. der  $x$ -Variablen einer lokalen Lipschitzbedingung, d.h. für alle  $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$  existiert ein  $\delta = \delta(t_0, y_0) > 0$  und eine lokale Lipschitzzahl  $L = L(t_0, y_0, \delta) > 0$ , sodass für alle  $(t, y), (t, \tilde{y}) \in I \times \Omega$  gilt

$$|t - t_0| < \delta \text{ und } y, \tilde{y} \in B_\delta(y_0) \Rightarrow |f(t, y) - f(t, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$$

Zum Sprachgebrauch: Wir sagen in diesem Fall auch, dass  $f$  eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.

**Bemerkung 3.3.** Falls  $f$  stetig bzgl. der Zeitvariablen und stetig differenzierbar bzgl. der Raumvariablen ist (d.h. hier  $\forall i = 1, \dots, k$  existiert  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  und die Abbildungen  $I \times \Omega \ni (t, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, y)$  sind stetig), folgt mit dem Mittelwertsatz, dass  $f$  eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.

*Beweis.* Sei  $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$  beliebig. Sei weiter  $\delta > 0$ , so gewählt, dass  $K := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset I \times \Omega$ . Sei nun  $(t, x), (t, y) \in K$  beliebig. Da  $K$  konvex ist, können wir auf die einzelnen Komponenten von  $f$  den Mittelwertsatz anwenden und erhalten so  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \overline{B_\delta(x_0)}$  mit

$$f(t, x) - f(t, y) = \begin{pmatrix} \langle \nabla_x f_1(t, \xi_1), x - y \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla_x f_k(t, \xi_k), x - y \rangle \end{pmatrix}.$$

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung liefert uns dann

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq C \sup_{z \in \overline{B_\delta(x_0)}} \|D_x f(t, z)\| |x - y| \leq C \|D_x f\|_{C^0(K)} |x - y|.$$

Hier ist  $C$  eine Konstante welche lediglich von der Dimension abhängt. Setzt man nun  $L := C \|D_x f\|_{C^0(K)}$ , so ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

Unter der oben genannten Bedingung werden wir Eindeutigkeit zeigen können. Dafür benötigen wir allerdings zuerst ein technisches Hilfsmittel:

**Lemma 3.4** (Lemma von Gronwall). Sei  $t_0 < t_1$  und  $\varphi : [t_0, t_1) \rightarrow [0, \infty)$  stetig. Weiter gebe es  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \geq 0$  sodass

$$\varphi(t) \leq a + b \int_{t_0}^t \varphi(s) ds.$$

Dann gilt

$$\varphi(t) \leq a \exp(b(t - t_0)), \quad \forall t \in [t_0, t_1).$$

*Beweis.* Sei o.B.d.A.  $b > 0$ . Wir zeigen stattdessen folgende hinreichende Aussage: Für alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\varphi(t) < (a + \varepsilon) \exp(b(t - t_0)), \quad \forall t \in [t_0, t_1).$$

Wir gehen per Widerspruch vor. D.h wir nehmen an, es existiert ein  $\varepsilon > 0$  und ein  $\tilde{t} \in [t_0, t_1)$  mit

$$\varphi(\tilde{t}) \geq (a + \varepsilon) \exp(b(\tilde{t} - t_0)).$$

Die Voraussetzung sichert nun, dass  $\tilde{t} > t_0$ . Da  $\varphi$  stetig ist, können wir mit dem Zwischenwertsatz annehmen, dass  $\tilde{t}$  minimal ist, d.h.

$$\forall t \in [t_0, \tilde{t}) \quad \varphi(t) < (a + \varepsilon) \exp(b(t - t_0))$$

$$\varphi(\tilde{t}) = (a + \varepsilon) \exp(b(\tilde{t} - t_0)).$$

Da wir dann eine strikte Ungleichung in den folgenden Integranden haben und diese stetig sind, erhalten wir außerdem eine strikte Ungleichung für die Integrale:

$$\begin{aligned} (a + \varepsilon) \exp(b(\tilde{t} - t_0)) = \varphi(\tilde{t}) &\leq a + b \int_{t_0}^{\tilde{t}} \varphi(s) ds \\ &< a + b \int_{t_0}^{\tilde{t}} (a + \varepsilon) \exp(b(s - t_0)) ds \\ &= a + (a + \varepsilon) [\exp(b(s - t_0))]_{t_0}^{\tilde{t}} \\ &= a + (a + \varepsilon)(\exp(b(\tilde{t} - t_0)) - 1) \\ &= (a + \varepsilon) \exp(b(\tilde{t} - t_0)) + a - (a + \varepsilon). \end{aligned}$$

Damit gilt  $0 < -\varepsilon$ , also ein Widerspruch. □

Kommen wir nun zur Eindeutigkeit:

**Theorem 3.5** (Eindeutigkeit). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen. Seien weiter  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \Omega$  die gegebenen Anfangsdaten. Weiter erfülle  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine lokale Lipschitzbedingung. Sei nun  $\delta > 0$  gegeben, sodass zwei stetig differenzierbare Funktionen  $x_1, x_2 : [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \Omega$  mit

$$\begin{cases} x_i'(t) = f(t, x_i(t)), & \forall t \in [t_0, t_0 + \delta] \\ x_i(t_0) = x_0 \end{cases}$$

für  $i = 1, 2$  gegeben sind. Dann gilt  $x_1 \equiv x_2$ .

*Beweis.* Da  $x_1, x_2$  stetig sind, ist

$$K := x_1([t_0, t_0 + \delta]) \cup x_2([t_0, t_0 + \delta]) \subset \Omega$$

kompakt. Insbesondere ist  $f|_{[t_0, t_0 + \delta] \times K}$  dann sogar global Lipschitzstetig bzgl. der Raumvariable (Übungsaufgabe!). D.h. es existiert ein  $L > 0$ , sodass für alle  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$  und alle  $y, z \in K$  gilt

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|.$$

Integration der Differentialgleichung liefert für alle  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$  mithilfe des Hauptsatzes der Differential und Integralrechnung:

$$x_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_i(s)) ds, \quad i = 1, 2.$$

Damit können wir für  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$  rechnen:

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_2(s)| ds. \end{aligned}$$

Nun können wir das Lemma von Gronwall 3.4 mit  $\varphi(t) := |x_1(t) - x_2(t)|$ ,  $a := 0$  und  $b := L$  anwenden und erhalten

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq 0 \cdot \exp(L|t - t_0|) = 0$$

für alle  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ . □

In der Literatur wird das folgende Theorem der Satz von Picard-Lindelöf genannt. Dieser wird üblicherweise mithilfe der sogenannten Picard-Iteration geführt (siehe Methode 4.1). Hier folgt er direkt aus den vorherigen Sätzen.

**Theorem 3.6** (Picard-Lindelöf). *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen. Seien weiter  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \Omega$  die gegebenen Anfangsdaten. Weiter erfülle  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine lokale Lipschitzbedingung. Dann existiert ein  $\delta > 0$ , sodass genau eine stetig differenzierbare Funktion  $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \Omega$  existiert mit*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*Beweis.* Da  $f$  insbesondere stetig ist, finden wir mithilfe des Satzes von Peano 2.5 ein  $\delta > 0$  und ein stetig differenzierbare Funktion  $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \Omega$ , welche die Differentialgleichung und die Anfangsdaten erfüllt. Satz 3.5 liefert dann die Eindeutigkeit für  $t \geq t_0$  sofort. Für  $t \leq t_0$  wende man ihn auf die Gleichung

$$(x(t_0 - t))' = -f(t_0 - t, x(t_0 - t)), \quad t \in [0, \delta]$$

bzw. die Abbildung  $t \mapsto x(t_0 - t)$  an und erhält so Eindeutigkeit. □

## 4 Lösungsmethoden

In diesem Abschnitt sammeln wir einige Methoden um bestimmte Differentialgleichungen explizit zu lösen bzw. einen Ansatz zu gewinnen, der die Gleichung dann löst. Dieser Abschnitt ist dabei inspiriert durch [4, § 35] bzw. [7, § 11] und [7, § 2].

**Methode 4.1** (Picard-Iteration). Die Picard-Iteration ist eigentlich eine numerische Methode um zu einer Lösung zu kommen. Unter Umständen kann man allerdings eine Regelmäßigkeit in der Iteration feststellen und man erhält so einen Ansatz. Diese Iteration funktioniert nun wie folgt: Sei  $x_1 \equiv x_0$  die stetige Abbildung, die alles auf den Anfangswert  $x_0$  abbildet. Falls  $f$  eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt, kann man zeigen, dass für ein kleines  $\delta > 0$  die Funktionenfolge auf  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  definiert durch

$$x_n(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s)) ds$$

gegen eine Lösung des Problems 2.2 gleichmäßig konvergiert. Dieser Beweis zeigt den bereits erwähnten Satz von Picard-Lindelöf 3.4.

**Beispiel 4.2.** Um die Idee hinter der Picard-Iteration zu verdeutlichen, betrachten wir folgendes Beispiel:

$$\begin{cases} x'(t) = 2tx(t), \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Als Startfunktion wählen wir  $x_1 \equiv 1$ . Dann erhalten wir

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t 2sx_1(s) ds = 1 + \int_0^t 2s ds = 1 + t^2$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t 2sx_2(s) ds = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2) ds = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4$$

$$x_4(t) = 1 + \int_0^t 2sx_3(s) ds = 1 + \int_0^t 2s \left( 1 + s^2 + \frac{1}{2}s^4 \right) ds = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{6}t^6.$$

Mit Induktion bedeutet dies für  $n \rightarrow \infty$

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^{2i}}{i!} \rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t^2)^i}{i!} = \exp(t^2).$$

D.h. der gewonnen Ansatz lautet  $x(t) = \exp(t^2)$ .

**Methode 4.3** (Transformation zu Gleichung mit getrennten Variablen). Unter Umständen ist es möglich eine Gleichung der Form  $x'(t) = f(t, x(t))$  so umzuschreiben, dass man mithilfe eines Separationsansatzes (siehe Methode 1.4) weiterrechnen kann. Wir untersuchen hier beispielhaft Gleichungen der Form

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right), \quad t \neq 0,$$

wobei  $f$  stetig sein soll. Hat man nun eine Lösung  $x$  gefunden mit Anfangsdaten  $x(t_0) = x_0$  und  $t_0 \neq 0$ , können wir eine neue Abbildung definieren:

$$u(t) := \frac{x(t)}{t}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = f\left(\frac{x(t)}{t}\right) \frac{1}{t} - \frac{x(t)}{t^2} \\ &= \frac{f(u(t))}{t} - \frac{u(t)}{t} = \frac{f(u(t)) - u(t)}{t} = \frac{g(u(t))}{t}, \end{aligned}$$

wobei  $g(u) := f(u) - u$ . Ab hier kann mit dem Separationsansatz 1.4 weitergerechnet werden.

**Beispiel 4.4.**

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)}{t} - \frac{t^2}{(x(t))^2} \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

Wir gehen vor wie in Methode 4.3 und erhalten so eine neue Differentialgleichung für  $u(t) := \frac{x(t)}{t}$

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{u(t) - \frac{1}{(u(t))^2} - u(t)}{t} = -\frac{1}{(u(t))^2 t} \\ u(1) = \frac{x(1)}{1} = 1 \end{cases}$$

Methode 1.4 liefert nun

$$\begin{aligned} \int_1^{u(t)} y^2 dy &= - \int_1^t \frac{1}{s} ds \\ \Rightarrow \frac{1}{3} ((u(t))^3 - 1) &= -\log(t) \\ \Rightarrow u(t) &= (-3 \log(t) + 1)^{\frac{1}{3}} \\ \Rightarrow x(t) &= t (1 - 3 \log(t))^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Fehlt noch die Probe um unseren gewonnenen Ansatz zu überprüfen:

$$x(1) = 1 (1 - 3 \log(1))^{\frac{1}{3}} = 1$$

Weiter gilt

$$x'(t) = (1 - 3 \log(t))^{\frac{1}{3}} - t \frac{3}{t^3} (1 - 3 \log(t))^{-\frac{2}{3}} = \frac{x(t)}{t} - \frac{t^2}{(x(t))^2}.$$

Nun wollen wir uns lineare inhomogene Gleichungen erster Ordnung zuwenden, d.h. reelle Gleichungen von der Gestalt  $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ . Zuerst lösen wir aber das homogene Problem:

**Lemma 4.5.** *Sei  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann ist die eindeutige Lösung des Problems*

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

gegeben durch

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

*Beweis.* Da  $a$  stetig ist und die rechte Seite der Gleichung glatt von  $x$  abhängt, ist die Lösung mit Satz 3.5 eindeutig auf allen Kompakta. Da die Lösungsformel für alle  $t \in \mathbb{R}$  auswertbar ist, müssen wir nur nachrechnen, dass diese das Problem löst:

$$x(t_0) = x_0 \exp(0) = x_0.$$

Mit Kettenregel gilt

$$x'(t) = a(t)x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) = a(t)x(t).$$

□

*Bemerkung:* Den Ansatz erhält man durch Trennung der Variablen 1.4.

**Methode 4.6** (Variation der Konstanten). Nun untersuchen wir Gleichungen vom Typ

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

wobei  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind. Die Idee ist nun die Lösung der homogenen Gleichung von Lemma 4.5 so zu verändern, dass wir eine Lösung unseres Problems bekommen. Dabei werden wir die auftretende Konstante  $x_0$  in Lemma 4.5 als differenzierbare Funktion  $t \mapsto C(t)$  auffassen und dies in unsere Gleichung einsetzen:

$$x(t) := C(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

Damit muss gelten  $C(t_0) = x_0$  und weiter

$$\begin{aligned} x'(t) - a(t)x(t) &= C'(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + C(t)a(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \\ &\quad - a(t)C(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \\ &= C'(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \stackrel{!}{=} b(t). \end{aligned}$$

Also soll gelten

$$C'(t) = b(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

Integrieren liefert

$$C(t) = \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau\right) ds + C(t_0).$$

Insgesamt lautet der gewonnene Ansatz also

$$\begin{aligned} x(t) &:= \left(\int_{t_0}^t b(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau\right) ds + x_0\right) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \\ &= x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right) ds \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nun muss dieser Ansatz noch überprüft werden:

$$x(t_0) = x_0$$

Mit 2-dimensionaler Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} x'(t) &= x_0 a(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + b(t) \exp\left(\int_t^t a(\tau) ds\right) \\ &\quad + \int_{t_0}^t b(s) a(t) \exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right) ds \\ &= a(t)x(t) + b(t). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass (4.1) das oben genannte Anfangswertproblem eindeutig löst.

**Methode 4.7** (Bernoulli-Differentialgleichung). Hier betrachten wir Gleichungen vom Typ

$$x'(t) + g(t)x(t) + h(t)(x(t))^\alpha = 0,$$

wobei  $\alpha \neq 1$ , und  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind. Multipliziert man diese Gleichung nun mit  $(1 - \alpha)(x(t))^{-\alpha}$ , so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= x'(t)(1 - \alpha)(x(t))^{-\alpha} + g(t)x(t)(1 - \alpha)(x(t))^{-\alpha} + h(t)x(t)^\alpha(1 - \alpha)(x(t))^{-\alpha} \\ &= ((x(t))^{1-\alpha})' + g(t)(1 - \alpha)(x(t))^{1-\alpha} + h(t)(1 - \alpha). \end{aligned}$$

Setzen wir also  $u(t) := (x(t))^{1-\alpha}$ , so erhalten wir folgende Gleichung

$$u'(t) + g(t)(1 - \alpha)u(t) + h(t)(1 - \alpha) = 0,$$

welche wir mit der Variation der Konstanten 4.6 lösen können.

Nun kommen wir noch zu einer Methode um Gleichungen zweiter Ordnung zu bearbeiten:

**Methode 4.8** (Energimethode). Hier betrachten wir ein reelles Problem der Form

$$\begin{cases} x''(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0 \end{cases},$$

wobei  $t_0, x_0, x'_0 \in \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sein soll. Falls  $f$  lokal Lipschitz sein sollte, ist das Problem mit Methode 2.1 und Satz 3.6 eindeutig lösbar. Sei nun  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$ . Multiplizieren wir die Gleichung mit  $x'$ , so erhalten wir

$$x''(t)x'(t) = f(x(t))x'(t).$$

Nun können wir nach  $t$  integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}((x'(t))^2 - (x'(t_0))^2) &= \int_{t_0}^t x''(s)x'(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t f(x(s))x'(s) ds = F(x(t)) - F(x(t_0)). \end{aligned}$$



Also haben wir insgesamt

$$(x'(t))^2 = 2F(x(t)) - 2F(x_0) + (x'_0)^2, \quad x(t_0) = x_0.$$

Dieses Anfangswertproblem kann nun nach Wurzelziehen z.B. wieder mit Trennung der Variablen 1.4 weiter bearbeitet werden. Falls  $x_0 = 0$  ist, kann es bei der resultierenden Gleichung zu Nichteindeutigkeiten kommen, obwohl die Ausgangsgleichung eindeutig lösbar ist. Hier ist also Vorsicht geboten.

**Beispiel 4.9.** Betrachten wir folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x''(t) = -x(t) \\ x'(0) = 1, x(0) = 1 \end{cases}$$

Nutzen wir die Energiemethode 4.8, so erhalten wir folgende neue Gleichung:

$$\frac{1}{2}((x'(t))^2 - (x'(0))^2) = \frac{1}{2}(-(x(t))^2 + (x(0))^2),$$

also haben wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \sqrt{2 - (x(t))^2}, \quad x(0) = 1$$

zu lösen. Mithilfe der Trennung der Variablen 1.4 erhalten wir

$$t = \int_1^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{2 - y^2}} dy.$$

Wir substituieren  $y = \sqrt{2} \sin(u)$  und erhalten

$$t = \int_{\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}})}^{\arcsin(\frac{x(t)}{\sqrt{2}})} \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \sin^2(u)}} \sqrt{2} \cos(u) du = \arcsin\left(\frac{x(t)}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Auflösen nach  $x(t)$  liefert

$$x(t) = \sqrt{2} \sin\left(t + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Nun müssen wir noch eine Probe durchführen:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sqrt{2} \cos\left(t + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right), \\ x''(t) &= -\sqrt{2} \sin\left(t + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = -x(t). \end{aligned}$$

Einerseits ist  $x(0) = 1$  und mithilfe  $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  gilt  $x'(0) = 1$ . Also wird das Problem gelöst.

## 5 Das maximale Existenzintervall, stetige Abhängigkeiten

Dieser Abschnitt orientiert sich an [1, §7], [4, §34, §36] und [6].

Als Anwendung des Eindeutigkeitsatzes wollen wir nun untersuchen ob es möglich ist, dass eine Lösung ihr Leben 'aushaucht' und wie dies genau von statten geht. Für unsere Untersuchungen gehen wir in diesem Abschnitt davon aus, dass das Problem 2.2 einer lokale Lipschitzbedingung genügt. Zuerst ein Beispiel, welches das prinzipielle Verhalten verdeutlicht.

**Beispiel 5.1.** Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) = (x(t))^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

kann mit Trennung der Variablen 1.4 gewonnen werden und lautet

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Diese Lösung existiert nicht für alle Zeiten  $t > 0$ , denn

$$\lim_{t \nearrow 1} x(t) = \infty$$

bedingt, dass die Lösung nur auf dem Intervall  $(-\infty, 1)$  existiert und nicht darüber hinaus fortgesetzt werden kann.

Zur Entwicklung der Theorie bringen wir nun dieses zentrale Resultat:

**Theorem 5.2.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  erfülle eine lokale Lipschitzbedingung. Dann existieren für alle  $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$  ein  $t_+ \in \bar{I} \cap (t_0, \infty]$  und  $t_- \in \bar{I} \cap [-\infty, t_0)$  ( $t_+ = \infty$  oder  $t_- = -\infty$  möglich), sodass genau eine stetig differenzierbare Lösung  $x : (t_-, t_+) \rightarrow \Omega$  mit

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \forall t \in (t_-, t_+) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

existiert. Weiter kann  $x$  nicht über  $(t_-, t_+)$  hinaus als Lösung fortgesetzt werden. Falls  $t_+ < \infty$  so existiert eine Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (t_-, t_+)$  mit  $t_n \nearrow t_+$ , sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(t_n)| = \infty$$

oder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, x(t_n)) \in \partial(I \times \Omega).$$

Eine analoge Aussage gilt für  $t_-$ .

*Beweis.* Wir definieren:

$$\begin{aligned} t_+ &:= \sup\{t \in I : \text{Problem 2.2 besitzt eine Lösung auf } [t_0, t]\} \\ t_- &:= \inf\{t \in I : \text{Problem 2.2 besitzt eine Lösung auf } [t, t_0]\} \end{aligned}$$

Gehen wir die Eigenschaften an  $t_+$  durch. Für  $t_-$  folgen diese Analog: Für alle  $T \in (t_0, t_+)$  ist das Problem auf  $[t_0, T]$  mit Satz 3.5 eindeutig lösbar. Also existiert genau eine stetig differenzierbare Funktion  $x : [t_0, t_+) \rightarrow \Omega$ , welche

$$\forall t \in [t_0, t_+) : x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.1)$$

erfüllt.

Nehmen wir nun an, dass  $x$  auf das Intervall  $[t_0, t_+]$  fortgesetzt werden könnte und  $t_+ \in I$  liegt, d.h. insbesondere  $\lim_{t \nearrow t_+} x(t) =: z \in \Omega$  existiert. Dann existiert ein  $\delta > 0$  und ein stetig differenzierbares  $u : [t_+ - \delta, t_+ + \delta] \rightarrow \Omega$  mit

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [t_+ - \delta, t_+ + \delta] \\ u(t_+) = z \end{cases}$$

Dann ist

$$u_1(t) := \begin{cases} x(t), & t \in [t_0, t_+] \\ u(t), & t \in [t_+, t_+ + \delta] \end{cases}$$

stetig differenzierbar, denn

$$\lim_{t \nearrow t_+} u_1'(t) = \lim_{t \nearrow t_+} f(t, x(t)) = f(t_+, z) = u'(t_+).$$

Damit löst  $u_1$  Problem 2.2 auf  $[t_0, t_+ + \delta]$ . Insbesondere widerspricht dies der Definition von  $t_+$ . D.h. außerdem, dass das Intervall auf dem  $x$  maximal existiert, offen sein muss und nicht darüber hinaus fortgesetzt werden kann.

Kommen wir nun zur Existenz der Folge  $t_n$  im Falle  $t_+ < \infty$ : Wir gehen wieder per Widerspruch vor und nehmen an ein solche Folge existiert nicht. Dies impliziert aber, dass  $t_+ \in I$  liegt und dass ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass

$$\forall t \in [t_0, t_+) \text{ gilt } \text{dist}(x(t), \partial\Omega) \geq \varepsilon.$$

und

$$\forall t \in [t_0, t_+) \text{ gilt } |x(t)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Insbesondere bedeutet dies

$$K := \overline{\{x(t) \mid t \in [t_0, t_+)\}} \subset \Omega$$

und ist kompakt. Damit existiert ein  $M > 0$ , sodass für alle  $(t, y) \in [t_0, t_+] \times K$  gilt  $|f(t, y)| \leq M$ . Also gilt für alle  $t, s \in [t_0, t_+)$

$$|x(t) - x(s)| = \left| \int_s^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq M|t - s|.$$

Also ist  $x$  auf  $[t_0, t_+)$  global Lipschitz und kann somit stetig auf  $[t_0, t_+]$  fortgesetzt werden, ein Widerspruch zu der oben gezeigten Aussage.  $\square$

*Bemerkung:* Falls  $|x(t_n)| \rightarrow \infty$  eintritt, spricht man auch von einem 'blow-up'.

**Definition 5.3.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen. Weiter erfülle  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine lokale Lipschitzbedingung. Dann definiert Theorem 5.2 zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} t_+ : I \times \Omega &\rightarrow \bar{I} \\ t_- : I \times \Omega &\rightarrow \bar{I}. \end{aligned}$$

Für gegebene Anfangsdaten  $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$  heißt das Intervall

$$(t_-(t_0, x_0), t_+(t_0, x_0)) \subset \mathbb{R}$$

maximales Existenzintervall zum Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Falls  $f$  überall definiert ist, können wir nun ein Kriterium angeben, sodass das maximale Existenzintervall einer Lösung ganz  $\mathbb{R}$  ist:

**Theorem 5.4** (Methode der a-priori Schranken).  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  erfülle eine lokale Lipschitzbedingung. Sei  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$  und  $x : (t_-(t_0, x_0), t_+(t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}^k$  Lösung von

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Falls für alle  $T > t_0$  eine Konstante  $C(T) \geq 0$  existiert, sodass

$$\forall t \in [t_0, \min(T, t_+(t_0, x_0))] \text{ gilt } |x(t)| \leq C(T).$$

Dann ist  $t_+(t_0, x_0) = \infty$ . Analog gilt:

Falls für alle  $T < t_0$  eine Konstante  $C(T) \geq 0$  existiert, sodass

$$\forall t \in (\max(T, t_-(t_0, x_0)), t_0] \text{ gilt } |x(t)| \leq C(T).$$

Dann ist  $t_-(t_0, x_0) = -\infty$ .

*Beweis.* Angenommen  $t_+ < \infty$ . Dann gibt es laut Theorem 5.2 eine Folge  $t_n \in [t_0, t_+)$ , für die gilt  $|x(t_n)| \rightarrow \infty$ . Ein Widerspruch.  $\square$

Die Methode in folgendem Beispiel werden wir bei der Stabilitätstheorie als Lyapunovfunktion verallgemeinern.

**Beispiel 5.5.** Für

$$\begin{aligned} x' &= -y - xy^2, & x(0) &= x_0 \\ y' &= x - yx^2, & y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

gilt  $t_+ = \infty$ , denn wir haben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (|(x(t), y(t))|^2) &= 2x'x + 2yy' \\ &= 2x(-y - xy^2) + 2y(x - yx^2) \\ &= -2xy - 2x^2y^2 + 2xy - 2y^2x^2 \\ &= -4x^2y^2 \leq 0, \end{aligned}$$

also ist  $t \mapsto |(x(t), y(t))|$  monoton fallend und mit den Anfangsdaten gilt

$$|(x(t), y(t))| \leq |(x_0, y_0)| < \infty$$

für alle  $t \in [0, t_+)$ . Nach Theorem 5.4 gilt  $t_+ = \infty$ .

Im linearen Fall können wir mit Satz 5.2 und dem Lemma von Gronwall 3.4 Langzeitexistenz zeigen:

**Theorem 5.6.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ( $I$  unbeschränkt möglich!),  $A \in C(I, \mathbb{R}^{k \times k})$  und  $b \in C(I, \mathbb{R}^k)$ . Sei weiter  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ . Dann existiert genau ein  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^k)$ , welches

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t), & \forall t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

erfüllt.

*Beweis.* Kurzzeitexistenz und Eindeutigkeit werden durch die Sätze 2.5 und 3.5 geklärt. Nun müssen wir Langzeitexistenz zeigen, d.h.  $(t_-(t_0, x_0), t_+(t_0, x_0)) = I$ . Sei dafür  $t_+ > T_+ > t_0$  und  $t_- < T_- < t_0$  und  $T_-, T_+ \in I$  fixiert, aber beliebig. Da  $A$  und  $b$  stetig sind, existiert eine Konstante  $C > 0$ , sodass

$$\forall t \in [T_-, T_+] \text{ gilt } \|A(t)\|, |b(t)| \leq C.$$

Hier ist  $\|\cdot\|$  die durch die euklidische Norm induzierte Matrixnorm:

$$\|M\| := \sup_{|\xi|=1} |M\xi|,$$

für die gilt  $|M\xi| \leq \|M\|\|\xi\|$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^k$ . Dann können wir für  $t \in [T_-, T_+]$  rechnen:

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s) + b(s) ds| \\ &\leq |x_0| + \int_{t_0}^t \|A(s)\||x(s)| + |b(s)| ds \\ &\leq |x_0| + C \max(|T_+ - t_0|, |T_- - t_0|) + C \int_{t_0}^t |x(s)| ds. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall 3.4 gilt nun für alle  $t \in [T_-, T_+]$

$$|x(t)| \leq (|x_0| + C \max(|T_+ - t_0|, |T_- - t_0|)) \exp(C(t - t_0)).$$

Mit Satz 5.2 folgt die Aussage, da es in endlicher Zeit nicht zu einem 'blow-up' kommen kann.  $\square$

Kommen wir nun zu Stetigkeitsaussagen der Lösung in Abhängigkeit von Anfangsdaten:

**Theorem 5.7.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen. Weiter erfülle  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine lokale Lipschitzbedingung. Sei  $t_0 \in I$  fixiert. Dann ist

$$D := \{(t, x_0) \in I \times \Omega \mid t_-(t_0, x_0) < t < t_+(t_0, x_0)\}$$

der Definitionsbereich der Abbildung  $x : D \rightarrow \Omega$ , welche durch folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} x(t, x_0) = f(t, x(t, x_0)), & t \in t_-(t_0, x_0) < t < t_+(t_0, x_0) \\ x(t_0, x_0) = x_0 \end{cases}$$

gegeben ist. Dann ist  $D$  offen und  $x : D \rightarrow \Omega$  ist stetig.

*Beweis.* Wir zeigen zuerst die Offenheit von  $D$ :

Sei  $(t^*, x_0) \in D$ . Zu zeigen ist nun die Existenz eines  $\delta > 0$ , sodass  $(t^* - \delta, t^* + \delta) \times B_\delta(x_0) \subset D$ . O.E. beschränken wir uns auf den Fall  $t^* \geq t_0$ . Mit Satz 5.2 existiert nun ein  $\eta > 0$ , sodass  $[t_0 - \eta, t^* + \eta] \subset (t_-(t_0, x_0), t_+(t_0, x_0))$ , insbesondere ist das Intervall kompakt. Weiter ist  $t \mapsto \text{dist}(\partial\Omega, x(t, x_0))$  stetig und damit können wir ein  $\delta_0 > 0$  wählen, sodass

$$\forall t \in [t_0 - \eta, t^* + \eta] \text{ gilt } \overline{B_{\delta_0}(x(t, x_0))} \subset \Omega.$$

Insbesondere ist

$$K := \bigcup_{t \in [t_0 - \eta, t^* + \eta]} \overline{\{t\} \times B_{\delta_0}(x(t, x_0))} \subset I \times \Omega$$

beschränkt. Außerdem ist  $K$  abgeschlossen, denn für  $(t_\ell, x_\ell) \in K$  mit  $(t_\ell, x_\ell) \rightarrow (t_\infty, x_\infty)$  werden wir zeigen, dass  $(t_\infty, x_\infty) \in K$ : Da  $t_\ell \in [t_0 - \eta, t^* + \eta]$  gilt zuerst  $t_\infty \in [t_0 - \eta, t^* + \eta]$ . Weiter gilt  $|x(t_\ell, x_0) - x_\ell| \leq \delta_0$  und da  $t \mapsto x(t, x_0)$  stetig ist erhalten wir

$$\delta_0 \geq \lim_{\ell \rightarrow \infty} |x(t_\ell, x_0) - x_\ell| = |x_\infty - x(t_\infty, x_0)|.$$

Damit ist  $x_\infty \in \overline{B_{\delta_0}(x(t_\infty, x_0))}$  womit gilt

$$(t_\infty, x_\infty) \in K.$$

Da  $K$  nun kompakt ist, ist  $f$  auf  $K$  Lipschitz bzgl. der Raumvariablen (Übungsaufgabe!), d.h. es existiert ein  $L > 0$ , sodass für alle  $(t, y), (t, w) \in K$  gilt

$$|f(t, y) - f(t, w)| \leq L|y - w|.$$

Sei nun  $0 < \delta < \delta_0$  zu wählen. Sei nun  $y_0 \in \overline{B_\delta(x_0)}$ . Solange die Lösung  $x(t, y_0)$  existiert und  $x(t, y_0) \in \overline{B_{\delta_0}(x(t, x_0))}$  erfüllt, können wir rechnen:

$$\begin{aligned} |x(t, x_0) - x(t, y_0)| &= \left| x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau, x_0)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau, y_0)) d\tau \right| \\ &\leq |x_0 - y_0| + L \int_{t_0}^t |x(\tau, x_0) - x(\tau, y_0)| d\tau. \end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall 3.4 liefert nun

$$|x(t, x_0) - x(t, y_0)| \leq |x_0 - y_0| \exp(L(t^* + \eta - t_0)). \quad (5.2)$$

Sei  $\delta > 0$  klein genug, sodass  $\delta < \frac{1}{2} \delta_0 \exp(-L(t^* + \eta - t_0))$  ( $\delta$  wurde unabhängig von  $y_0$  gewählt!). Dann haben wir

$$|x(t, x_0) - x(t, y_0)| \leq \frac{1}{2} \delta_0.$$

Nehmen wir nun an, es würde ein  $t_1 \in [t_0 - \eta, t^* + \eta]$  existieren, sodass  $\delta_0 > |x(t_1, x_0) - x(t_1, y_0)| > \frac{\delta_0}{2}$ . Da  $t \mapsto x(t, y_0)$  aber stetig ist, zeigt die vorherige Rechnung einen Widerspruch.

Der Satz vom maximalen Existenzintervall 5.2 zeigt, nun, dass  $x(t, y_0)$  für alle  $t \in [t_0 - \eta, t^* + \eta]$  existiert, da  $x(t, y_0)$  nicht zum Rand läuft und beschränkt bleibt. Es gilt sogar

$$[t_0 - \eta, t^* + \eta] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset D,$$

und damit ist  $D$  offen.

Nun können wir die Stetigkeitseigenschaften zeigen: Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig,  $x_0$ ,  $\delta$ ,  $t^*$ ,  $\eta$  und  $\delta_0$  so gewählt wie oben. Weiter können wir  $\delta$  so klein wählen, dass

$$\forall t \in [t^* - \delta, t^* + \delta] \text{ gilt } |x(t, x_0) - x(t^*, x_0)| \leq \varepsilon.$$

Für die folgende Rechnung beachte man, dass wir weiter (5.2) nutzen können: Sei nun  $t \in [t^* - \delta, t^* + \delta]$  und  $y_0 \in B_\delta(x_0)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |x(t^*, x_0) - x(t, y_0)| &\leq |x(t^*, x_0) - x(t, x_0)| + |x(t, x_0) - x(t, y_0)| \\ &\leq \varepsilon + |x_0 - y_0| \exp(L(t^* + \eta - t_0)) \\ &\leq \varepsilon + \delta \exp(L(t^* + \eta - t_0)). \end{aligned}$$

Wählen wir also  $\delta < \exp(-L(t^* + \eta - t_0))\varepsilon$ , so erhalten wir

$$|x(t^*, x_0) - x(t, y_0)| \leq 2\varepsilon,$$

woraus die Stetigkeitsaussage folgt.  $\square$

Falls  $f$  zusätzlich lokal Lipschitz von einem Parameter abhängt, ist die Lösung ebenfalls stetig abhängig von diesem Parameter. Die genaue Aussage ist wie folgt:

**Theorem 5.8.** *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $\Lambda \subset \mathbb{R}^\ell$  offen. Sei weiter  $f : I \times \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig und sei für alle  $t \in I$  die Abbildung  $\Omega \times \Lambda \ni (y, \lambda) \rightarrow f(t, y, \lambda)$  lokal Lipschitz nach Definition 3.2 ii). Sei  $t_0 \in I$  fixiert. Dann ist*

$$D := \{(t, x_0, \lambda) \in I \times \Omega \times \Lambda \mid t_-(t_0, x_0, \lambda) < t < t_+(t_0, x_0, \lambda)\}$$

der Definitionsbereich der Abbildung  $x : D \rightarrow \Omega$ , welche durch folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} x(t, x_0, \lambda) &= f(t, x(t, x_0, \lambda), \lambda), & t \in t_-(t_0, x_0, \lambda), t_+(t_0, x_0, \lambda) \\ x(t_0, x_0, \lambda) &= x_0 \end{cases}$$

gegeben ist. Dann ist  $D$  offen und  $x : D \rightarrow \Omega$  stetig.

*Beweis.* Wir führen die Situation auf Theorem 5.7 zurück, indem wir folgendes Anfangswertproblem betrachten, bei der der Parameter  $\lambda_0 \in \Lambda$  zum Anfangswert wird:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \lambda(t)), & x(t_0) = x_0 \\ \lambda'(t) = 0, & \lambda(t_0) = \lambda_0. \end{cases}$$

Nach Theorem 5.7 ist damit  $D$  offen und  $x : D \rightarrow \Omega$  stetig.  $\square$

**Bemerkung 5.9.** In den Sätzen 5.7 und 5.8 wird der Startzeitpunkt  $t_0$  festgehalten und es wird keine Aussage über die stetige Abhängigkeit von  $t_0$  selber gemacht. Eine solche Aussage gilt, wenn  $f$  zusätzlich lokal Lipschitz von den Zeitvariablen abhängt. Mit Bemerkung 1.6, kann man nämlich zu einem autonomen System übergehen, indem die Zeitvariable zur Raumvariablen wird.

Nun wenden wir uns noch Stetigkeitseigenschaften von  $t_+$  und  $t_-$  zu. Diese Größen werden sich nur als unter/oberhalb-stetig herausstellen. In den Übungen werden wir außerdem zeigen, dass kein besseres Resultat zu erwarten ist. Wiederholen wir die Definition dieser Stetigkeitsbegriffe:

**Definition 5.10.** Sei  $g : G \rightarrow [-\infty, \infty]$  mit  $G \subset \mathbb{R}^k$ . Wir sagen  $g$  ist Unterhalbstetig, falls für alle Folgen  $(y_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset G$  mit  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} y_\ell = y \in G$  gilt

$$g(y) \leq \liminf_{\ell \rightarrow \infty} g(y_\ell).$$

Wir nennen  $g$  oberhalbstetig, falls für alle diese Folgen  $y_\ell$  gilt

$$g(y) \geq \limsup_{\ell \rightarrow \infty} g(y_\ell).$$

**Theorem 5.11.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\Lambda \subset \mathbb{R}^j$  jeweils offen. Sei weiter  $f : I \times \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig und lokal Lipschitz bzgl. der Variablen aus  $\Omega \times \Lambda$  (siehe Definition 3.2 ii)). Sei nun  $(t_+(x_0, \lambda), t_-(x_0, \lambda))$  das maximale Existenzintervall des Parameterabhängigen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \lambda), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

mit  $(t_0, x_0, \lambda) \in I \times \Omega \times \Lambda$ . Dann ist die Abbildung

$$(x_0, \lambda) \mapsto t_+(x_0, \lambda)$$

unterhalbstetig und die Abbildung

$$(x_0, \lambda) \mapsto t_-(x_0, \lambda)$$

oberhalbstetig.

*Beweis.* Sei  $(y_\ell, \lambda_\ell) \in \Omega \times \Lambda$  mit  $(y_\ell, \lambda_\ell) \rightarrow (y, \lambda) \in \Omega \times \Lambda$  gegeben. Theorem 5.8 liefert, dass

$$D := \{(s, w, \alpha) \in I \times \Omega \times \Lambda \mid t_-(w, \alpha) < s < t_+(w, \alpha)\}$$

offen ist. Sei nun  $t \in (t_-(y, \lambda), t_+(y, \lambda))$  fixiert aber beliebig. Dann existiert ein  $\delta = \delta(t) > 0$ , sodass

$$[t - \delta, t + \delta] \times B_\delta((y, \lambda)) \subset D.$$

Da  $(y_\ell, \lambda_\ell) \rightarrow (y, \lambda)$  existiert ein  $\ell_0 = \ell_0(\delta) \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $\ell \geq \ell_0$  gilt

$$(t, y_\ell, \lambda_\ell) \in [t - \delta, t + \delta] \times B_\delta((y, \lambda)) \subset D.$$

Insbesondere bedeutet dies

$$t_-(y_\ell, \lambda_\ell) < t < t_+(y_\ell, \lambda_\ell).$$

Da  $t \in (t_-(y, \lambda), t_+(y, \lambda))$  beliebig, folgt

$$\begin{aligned} t_+(y, \lambda) &\leq \liminf_{\ell \rightarrow \infty} (t_+(y_\ell, \lambda_\ell)) \\ t_-(y, \lambda) &\geq \limsup_{\ell \rightarrow \infty} (t_-(y_\ell, \lambda_\ell)) \end{aligned}$$

□



## 6 Differenzierbare Abhängigkeit von Anfangsdaten

(Quelle [4, Thm. 36.6, Thm. 36.7])

Nach Theorem 5.7 stellt sich nun die Frage, ob die Abhängigkeit von Lösungen an den Anfangsdaten auch differenzierbar ist. Wir wollen diese Frage mit folgendem Theorem beantworten. Ein Beweis kann allerdings aus Zeitgründen hier nicht vollständig gemacht werden. Man kann ihn aber z.B. in [7, §13, Abschnitte V-XI] nachlesen.

**Theorem 6.1.** *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Nun sei  $f : I \times \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig. Weiter gelte, dass die partiellen Ableitungen nach den Ortsvariablen  $\frac{\partial}{\partial y_n} f$  und der Parametervariablen  $\frac{\partial}{\partial \lambda} f$  für alle  $n = 1, \dots, k$  existieren. Weiter seien diese stetig, d.h.*

$$I \times \Omega \times \Lambda \ni (t, y, \lambda) \mapsto \frac{\partial}{\partial y_n} f(t, y, \lambda), \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, y, \lambda)$$

sind stetig. Sei  $t_0 \in I$  und

$$D := \{(t, x_0, \lambda) \in I \times \Omega \times \Lambda \mid t_-(x_0, \lambda) < t < t_+(x_0, \lambda)\}$$

der maximale Definitionsbereich der Schar von Lösungen  $x : D \rightarrow \Omega$  des Anfangswertproblem definiert durch

$$\begin{cases} x'(t, x_0, \lambda) = f(t, x(t, x_0, \lambda), \lambda) \\ x(t_0, x_0, \lambda) = x_0. \end{cases}$$

Dann ist  $x$  stetig differenzierbar. Weiter gilt für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial (x_0)_i} x(t, x_0, \lambda) =: x_{(x_0)_i}(t), \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} x(t, x_0, \lambda) =: x_\lambda(t),$$

dass  $(t_-(x_0, \lambda), t_+(x_0, \lambda)) \ni t \mapsto x_{(x_0)_i}(t), x_\lambda(t)$  stetig differenzierbar sind für alle  $(x_0, \lambda) \in \Omega \times \Lambda$ . Außerdem erfüllen sie folgende Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} x'_{(x_0)_i}(t) &= \sum_{n=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_n}(t, x(t, x_0, \lambda), \lambda) \cdot (x_{(x_0)_i})_n(t), \\ x_{(x_0)_i}(t_0) &= e_i \in \mathbb{R}^k \\ x'_\lambda(t) &= \sum_{n=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_n}(t, x(t, x_0, \lambda), \lambda) \cdot (x_\lambda)_n(t) + \frac{\partial f}{\partial \lambda} f(t, x(t, x_0, \lambda), \lambda), \\ x_\lambda(t_0) &= 0 \in \mathbb{R}^k \end{aligned} \tag{6.1}$$

Wir werden stattdessen das folgende einfachere Resultat zeigen, welches die wichtige Idee der Linearisierung verdeutlicht. Insbesondere verzichten wir auf die Konstruktion von Tubenumgebungen um Trajektorien (siehe Definition von  $K$  in Beweis von Theorem 5.7).

**Theorem 6.2.** *Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall mit  $0 \in I$ ,  $\varepsilon, r > 0$  fest,  $B_{r+\varepsilon}(0) \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\Lambda := (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_1 + \varepsilon)$  offen und  $f : I \times B_{r+\varepsilon}(0) \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig und bzgl. der Ortsvariablen und Parametervariablen stetig differenzierbar. D.h.*

$$(t, y, \lambda) \mapsto \frac{\partial}{\partial y_n} f(t, y, \lambda), \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, y, \lambda)$$

existieren und sind stetig für alle  $n = 1, \dots, k$ .

Dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$ , sodass für alle  $x_0 \in \overline{B_r(0)}$  und alle  $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$  eine Lösung  $x(t, x_0, \lambda)$  auf  $t \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  von

$$x'(t, x_0, \lambda) = f(t, x(t, x_0, \lambda), \lambda) \quad x(0, x_0, \lambda) = x_0$$

existiert. Weiter gilt, dass die Abbildung

$$(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times B_r(0) \times (\lambda_0, \lambda_1) \ni (t, x_0, \lambda) \mapsto x(t, x_0, \lambda)$$

stetig differenzierbar ist und die Abbildungen

$$x_{(x_0)_i}(t) := \frac{\partial}{\partial (x_0)_i} x(t, x_0, \lambda) \quad x_\lambda(t) := \frac{\partial}{\partial \lambda} x(t, x_0, \lambda)$$

erfüllen jeweils die Anfangswertprobleme (6.1).

*Beweis.* Die Existenz von  $\varepsilon_0 > 0$  folgt aus Theorem 5.11 auf folgende Weise: Man gehe per Widerspruch vor und nehme an, so ein  $\varepsilon_0 > 0$  existiere nicht. Dann muss es eine Folge von Anfangs- und Parameterdaten  $(x_n, \lambda_n) \in \overline{B_r(0)} \times [\lambda_0, \lambda_1]$ , für die o.E. (für  $t_-$  ist der Beweis analog) gilt

$$t_+(x_n, \lambda_n) \rightarrow 0.$$

Nach Auswahl einer Teilfolge können wir o.E. nach Umbenennen annehmen, dass  $(x_n, \lambda_n) \rightarrow (x_\infty, \lambda_\infty) \in \overline{B_r(0)} \times [\lambda_0, \lambda_1]$ . Dann liefert die Unterhalbstetigkeit von  $t_+$  (Theorem 5.11) und die Kurzzeitexistenz (siehe z.B. Theorem 3.6) bei den Anfangsdaten  $(x_\infty, \lambda_\infty)$ , dass

$$0 < t_+(x_\infty, \lambda_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} t_+(x_n, \lambda_n) = 0,$$

also ein Widerspruch.

Ab hier arbeiten wir nur noch auf der offenen Menge  $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times B_r(0) \times (\lambda_0, \lambda_1)$ , d.h. ab hier ist  $(t, x_0, \lambda) \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times B_r(0) \times (\lambda_0, \lambda_1)$ . Sei  $\sigma \neq 0$  im Betrag klein, sodass die folgende Ausdrücke für alle  $j = 1, \dots, k$  sinnvoll sind:

$$\begin{aligned} w_\sigma(t) &:= \frac{1}{\sigma} (x(t, x_0 + e_j \sigma, \lambda) - x(t, x_0, \lambda)) \\ z_\sigma(t) &:= \frac{1}{\sigma} (x(t, x_0, \lambda + \sigma) - x(t, x_0, \lambda)). \end{aligned}$$

Seien weiter  $w, z$  Lösungen der linearen Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} w'(t) &= A(t)w(t), \quad w(0) = e_j, \quad A(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, x(t, x_0, \lambda), \lambda) \\ z'(t) &= A(t)z(t) + b(t), \quad z(0) = 0, \quad b(t) := \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x(t, x_0, \lambda), \lambda). \end{aligned}$$

Da  $x(\cdot)$  Lösung des Anfangswertproblems ist, haben wir

$$\begin{aligned}
w_\sigma(0) &= \frac{1}{\sigma} (x(0, x_0 + e_j \sigma, \lambda) - x(0, x_0, \lambda)) = e_j \\
w'_\sigma(t) &= \frac{1}{\sigma} (f(t, x(t, x_0 + e_j \sigma, \lambda), \lambda) - f(t, x(t, x_0, \lambda), \lambda)) \\
&= \frac{1}{\sigma} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( f(t, (1-\tau)x(t, x_0, \lambda) + \tau x(t, x_0 + e_j \sigma, \lambda), \lambda) \right) d\tau \\
&= \int_0^1 \sum_{n=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_n} (t, (1-\tau)x(t, x_0, \lambda) + \tau x(t, x_0 + e_j \sigma, \lambda), \lambda) d\tau \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sigma} (x_n(t, x_0 + e_j \sigma, \lambda) - x_n(t, x_0, \lambda)) \\
&=: A_\sigma(t) \cdot w_\sigma(t).
\end{aligned}$$

Dabei ist  $(t, \sigma) \mapsto A_\sigma(t)$  nach Theorem 5.8 stetig und  $A_0(t) = A(t)$ . Analog rechnen wir

$$\begin{aligned}
z_\sigma(0) &= \frac{1}{\sigma} (x(0, x_0, \lambda + \sigma) - x(0, x_0, \lambda)) = 0 \\
z'_\sigma(t) &= \frac{1}{\sigma} (f(t, x(t, x_0, \lambda + \sigma), \lambda + \sigma) - f(t, x(t, x_0, \lambda), \lambda)) \\
&= \frac{1}{\sigma} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( f(t, x(t, x_0, \lambda) + \tau(x(t, x_0, \lambda + \sigma) - x(t, x_0, \lambda)), \lambda + \tau\sigma) \right) d\tau \\
&= \int_0^1 \sum_{n=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_n} (t, x(t, x_0, \lambda) + \tau(x(t, x_0, \lambda + \sigma) - x(t, x_0, \lambda)), \lambda + \tau\sigma) d\tau \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sigma} (x_n(t, x_0, \lambda + \sigma) - x_n(t, x_0, \lambda)) \\
&\quad + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \lambda} (t, x(t, x_0, \lambda) + \tau(x(t, x_0, \lambda + \sigma) - x(t, x_0, \lambda)), \lambda + \tau\sigma) d\tau \\
&=: \tilde{A}_\sigma(t) z_\sigma(t) + b_\sigma(t).
\end{aligned}$$

Wieder wegen der Stetigkeitssätze sind  $(\sigma, t) \mapsto \tilde{A}_\sigma(t), b_\sigma(t)$  stetig. Wie oben gilt außerdem  $\tilde{A}_0(t) = A(t)$  und  $b_0(t) = b(t)$ . Bei einer linearen Gleichungen benötigt man nur Stetigkeit bzgl. der Zeit und der Parameter um stetige Abhängigkeit der Lösung von diesen Daten zu zeigen. Dieser Beweisschritt werden wir weglassen, denn die dazu nötigen Techniken wurden allesamt bereits in den Beweisen zu den Theoremen 5.7 und 5.6 demonstriert. Dies jedoch zeigt, dass die Abbildungen

$$(\sigma, t) \mapsto w_\sigma(t), \quad (\sigma, t) \mapsto z_\sigma(t)$$

stetig sind mit

$$w_0(t) = w(t) \quad z_0(t) = z(t).$$

Die Stetigkeit von  $w_\sigma(t)$  und  $z_\sigma(t)$  bzgl.  $\sigma$  zeigt, dass die Differenzenquotienten für  $\sigma \rightarrow 0$  konvergieren. Daraus folgt die Differenzierbarkeit der Lösung bzgl. des Anfangsdatums  $x_0$  und des Parameters  $\lambda$ .  $\square$

## 7 Lineare Gleichungen

Quelle [2, §2.1], [4, §37], [5, §3] und [7, §14-§17]. In diesem Abschnitt werden wir uns ausschließlich mit linearen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen beschäftigen. Diese sind von der Form

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

wobei  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Langzeitexistenz, d.h. Existenz einer Lösung für alle  $t \in I$  wurde bereits in Theorem 5.6 positiv beantwortet.

Nun wollen wir uns die Struktur der Lösungsmenge anschauen. Diese entspricht einem verschobenem Unterraum. Dafür werden wir das homogene Problem betrachten:

**Theorem 7.1.** *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Sei weiter  $A \in C(I, \mathbb{R}^{k \times k})$ . Dann ist die Menge*

$$L_H := \{x \in C^1(I, \mathbb{R}^k) \mid x'(t) = A(t)x(t)\} \subset C^1(I, \mathbb{R}^k)$$

ein  $k$ -dimensionaler Unterraum. Weiter ist für  $x_1, \dots, x_r \in L_H$  äquivalent

1.  $x_1, \dots, x_r \in L_H$  sind linear unabhängig.
2. Es gibt ein  $t_0 \in I$ , sodass  $x_1(t_0), \dots, x_r(t_0) \in \mathbb{R}^k$  linear unabhängig sind.
3. Für jedes  $t \in I$  sind  $x_1(t), \dots, x_r(t) \in \mathbb{R}^k$  linear unabhängig.

*Beweis.*  $L_H$  ist ein Unterraum, da Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind. Die Dimensionalität klärt sich mit (2) und der Eindeutigkeit des Anfangswertproblems. D.h. wir müssen nur die Äquivalenz der drei Punkte zeigen:

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei  $t_0 \in I$  fest gewählt. Seien weiter  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  gegeben mit

$$\sum_{n=1}^r \lambda_n x_n(t_0) = 0.$$

Sei  $x = \sum_{n=1}^r \lambda_n x_n$ .  $x$  ist damit Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

und mit der Eindeutigkeit gilt  $0 = x = \sum_{n=1}^r \lambda_n x_n$ , woraus nach Voraussetzung folgt  $\lambda_1, \dots, \lambda_r = 0$  und damit die Aussage.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei  $t \in I$  beliebig aber fest und  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  erfüllen

$$0 = \sum_{n=1}^r \lambda_n x_n(t).$$

Sei  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^k)$ , welche die Differentialgleichung  $A(s)x(s) = x'(s)$  mit  $x(t_0) = \sum_{n=1}^r \lambda_n x_n(t_0)$  als Anfangsdatum erfüllt. Dann gilt wegen der Eindeutigkeit des Anfangswertproblems, dass

$$x(t) = \sum_{n=1}^r \lambda_n x_n(t) = 0.$$

Wieder mithilfe der Eindeutigkeit ist dann  $x \equiv 0$ . Also ist

$$0 = \sum_{n=1}^r \lambda_n x_n(t_0),$$

und damit  $\lambda_1, \dots, \lambda_r = 0$ .

Die Aussage (3)  $\Rightarrow$  (1) folgt direkt.  $\square$

**Definition 7.2.** Sei  $A \in C(I, \mathbb{R}^{k \times k})$  und  $L_H$  wie in Theorem 7.1. Sei  $x_1, \dots, x_k \in L_H$  eine Basis von  $L_H$ . Dann nennen wir die Abbildung  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$  definiert durch

$$\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$$

eine fundamentale Matrixlösung für das homogene System  $x' = Ax$ .

Insbesondere können wir  $\Phi$  als Matrix invertieren (Wir schreiben dafür  $(\Phi(t))^{-1}$ ) und somit folgende Lösungsformel für das inhomogene System beweisen. Die Herleitung dieser Formel ist analog zur Variation der Konstanten im eindimensionalen 4.6.

**Theorem 7.3** (Variation der Konstanten in  $\mathbb{R}^k$ ). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Sei weiter  $A \in C(I, \mathbb{R}^{k \times k})$ ,  $b \in C(I, \mathbb{R}^k)$  und  $\Phi$  eine fundamentale Matrixlösung von  $x' = Ax$ . Anfangsdaten seien gegeben durch  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ . Weiter sei  $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^k)$  Lösung von

$$\begin{cases} \gamma'(t) = A(t)\gamma(t) + b(t) \\ \gamma(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\gamma(t) = \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1}b(s) ds$$

für alle  $t \in I$ .

*Beweis.* Mit Satz 5.6 müssen wir nur nachrechnen, dass das durch die Lösungsformel definierte  $\gamma$  das Anfangswertproblem löst:

$$\gamma(t_0) = \Phi(t_0)(\Phi(t_0))^{-1}x_0 + \Phi(t_0) \int_{t_0}^{t_0} (\Phi(s))^{-1}b(s) ds = x_0.$$

Nun zur Differentialgleichung. Hier nutzen wir  $\Phi' = A\Phi$ :

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \Phi'(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0 + \Phi'(t) \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1}b(s) ds + \Phi(t)(\Phi(t))^{-1}b(t) \\ &= A(t)\Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0 + A(t)\Phi(t) \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1}b(s) ds + b(t) \\ &= A(t) \left( \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1}b(s) ds \right) + b(t) \\ &= A(t)\gamma(t) + b(t). \end{aligned}$$

$\square$

Nun spezialisieren wir unser Problem zu einem autonomen homogenen linearem System. D.h. für den Rest des Kapitels betrachten wir für eine gegebene

(zeitunabhängige!) Matrix  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$  das folgende Anfangswertproblem für ein  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Satz 5.6 gibt uns die eindeutige Existenz einer Lösung auf ganz  $\mathbb{R}$ . Nun geht es darum, die genaue Lösungsgestalt herauszurechnen. Diese hängt eng mit den Eigenwerten der Matrix  $A$  zusammen, auch wenn diese komplexwertig sind, wie folgendes Theorem zeigt:

**Theorem 7.4.** *Sei  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$  eine reelle Matrix. Dann haben wir folgende Aussagen:*

1. *Die glatte Abbildung  $x(t) = \exp(\lambda t)v$  mit  $v \in \mathbb{C}^k$  ist eine reelle Lösung von  $x'(t) = Ax(t)$  genau dann, wenn  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{R}^k$  und  $Av = \lambda v$ .*
2. *Falls  $v \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda = \alpha + i\beta$  mit  $\beta \neq 0$  ist, dann ist der imaginäre Anteil von  $v$  ungleich 0. In diesem Fall können wir  $v = u + iw$  schreiben mit  $u, w \in \mathbb{R}^k$ . Dann lösen die folgenden Abbildungen die Gleichung  $x' = Ax$ :*

$$\begin{aligned} t &\mapsto \exp(\alpha t)(\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)w) \\ t &\mapsto \exp(\alpha t)(\sin(\beta t)u + \cos(\beta t)w). \end{aligned}$$

*Insbesondere sind diese Lösungen linear unabhängig.*

*Beweis.* Sei  $v \in \mathbb{C}^k$  Eigenvektor und  $\lambda \in \mathbb{C}$  der dazugehörige Eigenwert zu  $A$ . Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(\exp(\lambda t)v) = \exp(\lambda t)\lambda v = A((\exp(\lambda t)v)),$$

also erfüllt  $t \mapsto \exp(\lambda t)v$  die Differentialgleichung. Insbesondere müssen der Imaginär- und Realteil ebenfalls die Gleichung lösen, da  $A$  reellwertig ist. Wir gehen nun in den Punkt (2) um diese auszurechnen. D.h wir setzen voraus, dass  $\lambda = \alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) mit  $\beta \neq 0$ . Da  $A$  reell ist, darf der Imaginärteil von  $v$  nicht verschwinden, d.h.  $v = u + iw$  ( $u, w \in \mathbb{R}^k$ ) mit  $w \neq 0$ . Mit der Eulerschen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp(\lambda t)v &= \exp((\alpha + i\beta)t)(u + iw) \\ &= \exp(\alpha t)(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(u + iw) \\ &= \exp(\alpha t)((\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)w) + i(\cos(\beta t)w + \sin(\beta t)u)). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Die lineare Unabhängigkeit über  $\mathbb{R}$  des Imaginär- und Realteils erhalten wir mit Satz 7.1, indem wir die Funktionen bei  $t = 0$  und  $t = \frac{\pi}{2\beta}$  auswerten: Seien dafür  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  Linearfaktoren mit  $c_1(\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)w) + c_2(\cos(\beta t)w + \sin(\beta t)u) = 0$ . Einsetzen der oben genannten  $t$  liefert

$$\begin{aligned} c_1 u + c_2 w &= 0 \\ -c_1 w + c_2 u &= 0. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass  $c_1 \neq 0$ . Dann können wir die erste Gleichung mit  $-\frac{c_2}{c_1}$  durchmultiplizieren und auf die zweite Gleichung addieren. Wir erhalten

$$-\frac{(c_2)^2}{c_1}w - c_1 w = 0 \Rightarrow ((c_2)^2 + (c_1)^2)w = 0.$$

Da  $w \neq 0$  ist, folgt  $c_1 = c_2 = 0$ , also ein Widerspruch. Damit folgt die lineare Unabhängigkeit.

Kommen wir nun noch einmal zurück zu (1): Falls  $t \mapsto \exp(\lambda t)v$  eine reelle Abbildung ist, zeigt (7.1), dass

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ gilt } \cos(\beta t)w + \sin(\beta t)u = 0$$

und damit  $\beta, w = 0$ . Also sind  $\lambda$  und  $v$  reellwertig. □

Inspiziert von der exponentiellen Gestalt der eben berechneten Lösung, definieren wir nun die sogenannte Exponentialmatrix, welche sich als eine fundamentale Matrixlösung herausstellen wird. Wie in Theorem 7.4 bereits angekündigt, werden wir hier vorerst aber mit komplexwertigen  $A$  rechnen:

**Definition 7.5.** Sei  $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$ . Dann definieren wir

$$\exp(A) := I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Kümmern wir uns um die Wohldefiniert dieses Ausdrucks und zeigen den Zusammenhang zur Lösung unserer Differentialgleichung:

**Theorem 7.6.** Für alle  $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$  und alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\|\exp(At)\| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} \|A\|^n = \exp(\|A\||t|),$$

wobei  $\|A\| := \sup_{|\xi|=1} |A\xi|$  die induzierte Matrix Norm ist. Dies bedeutet insbesondere, dass die Potenzreihe  $\exp(At)$  komponentenweise absolut konvergiert und damit wohldefiniert ist. Insbesondere ist die Abbildung  $t \mapsto \exp(At)x_0$  für alle  $x_0 \in \mathbb{C}^k$  glatt und es gilt

$$\frac{d}{dt}(\exp(At)x_0) = A \exp(At)x_0, \quad \exp(A0)x_0 = x_0.$$

*Beweis.* Für die induzierte Matrix Norm und o.E.  $\mathbb{C}^k \ni v \neq 0$  gilt

$$|Av| = \left| A \frac{v}{|v|} \right| |v| \leq \sup_{|\xi|=1} |A\xi| |v| = \|A\| |v|.$$

Damit haben wir weiter

$$\|A^2\| = \sup_{|\xi|=1} |A(A\xi)| \leq \sup_{|\xi|=1} \|A\| |A\xi| = \|A\|^2$$

und mit Induktion folgt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt also die erste behauptete Ungleichung. Damit gilt insbesondere für alle  $x_0 \in \mathbb{C}^k$

$$\exp(At)x_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( I + \sum_{n=1}^m \frac{t^n A^n}{n!} \right) x_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( x_0 + \sum_{n=1}^m \frac{t^n A^n x_0}{n!} \right).$$

Diese Potenzreihe ist für alle  $t \in \mathbb{R}$  absolut konvergent, also ist der Konvergenzradius  $\infty$ . Damit ist die Abbildung  $t \mapsto \exp(At)x_0$  glatt und es kann gliedweise differenziert werden:

$$\frac{d}{dt}(\exp(At)x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n x_0}{(n-1)!} = A \left( Ix_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x_0 \right) = A \exp(At)x_0.$$

□

**Bemerkung 7.7.** Theorem 7.6 zusammen mit Theorem 7.1 zeigen, dass die Matrixabbildung  $t \mapsto \exp(At)$  eine fundamentale Matrixlösung des Systems  $x' = Ax$  ist. Insbesondere ist  $\exp(At)$  für alle  $t$  als Matrix invertierbar!

**Bemerkung 7.8.** Falls  $A, B \in \mathbb{C}^{k \times k}$  mit  $AB = BA$  hat man sogar

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

*Beweis.* Analog zum eindimensionalen, wird zur Übung übertragen. □

Nun wollen wir uns der effektiven Berechnung von  $\exp(At)$  widmen. Dazu benötigen wir die Jordansche Normalform von  $A$  (diese kann z.B. in [3, §4.2] nachgelesen werden). Dafür werden wir erst komplexwertig rechnen und dann mit Theorem 7.4 auf den reellen Fall zurückgehen. Sei also  $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$ . Dann existiert eine reguläre Matrix  $B \in \mathbb{C}^{k \times k}$  und eine Jordannormalform  $J \in \mathbb{C}^{k \times k}$ , welche sich aus Jordanblöcken

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{k_\lambda \times k_\lambda}$$

längs der Diagonalen zusammensetzt. Hier ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ . Diese Matrizen erfüllen folgende Gleichung

$$J = B^{-1}AB.$$

Zur Wiederholung: Die Dimension aller Blöcke zu einem festem Eigenwert summiert heißt dessen algebraische Vielfachheit (welche auch die Vielfachheit der zugehörige Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $A$  ist). Die Anzahl der Jordanblöcke zu einem festen Eigenwert heißt dagegen geometrische Vielfachheit. Für  $A$  bekommen wir damit für alle  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \exp(At) &= \exp(tBJB^{-1}) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tBJB^{-1})^n}{n!} \\ &= B \left( I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tJ)^n}{n!} \right) B^{-1} = B \exp(tJ) B^{-1}. \end{aligned}$$

D.h. wir müssen nur die Exponentialmatrix der Jordanmatrix berechnen

Nennen wir Jordanblöcke  $A_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, s$ . Dann gilt ganz im Allgemeinen für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A_1^n & & & 0 \\ & A_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s^n \end{pmatrix}$$



Im Endeffekt müssen wir also nur die Potenz eines einzelnen Jordanblocks zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  der Dimension  $k_\lambda \in \mathbb{N}$  berechnen. Wir können jeden Jordanblock schreiben als

$$A_\ell = \lambda I + N$$

wobei  $N \in \mathbb{R}^{k_\lambda \times k_\lambda}$  nilpotent ist mit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt  $N^{k_\lambda} = 0$ . Da  $I$  und  $N$  kommutieren, erhalten wir mit Bemerkung 7.8

$$\begin{aligned} \exp(t(\lambda I + N)) &= \exp(t\lambda I) \exp(tN) = \\ &= \exp(t\lambda) \left( I + \frac{tN}{1!} + \frac{(tN)^2}{2!} + \dots + \frac{(tN)^{k_\lambda-1}}{(k_\lambda-1)!} \right) \end{aligned}$$

Fassen wir das qualitativ Ergebnis zusammen:

**Theorem 7.9.** Sei  $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$  mit paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$  und zugehörigen algebraischen Vielfachheiten  $m_1, \dots, m_s$ . Dann gibt es für jedes  $j = 1, \dots, s$  genau  $m_j$  linear unabhängige Lösungen von  $x' = Ax$  in der Form

$$x_{j,\ell}(t) = \exp(\lambda_j t) p_{j,\ell}(t), \quad \ell = 1, \dots, m_j,$$

dabei sind  $p_{j,\ell} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^k$  vektorwertige Polynomfunktionen vom Grade  $\leq m_j$ . Der Maximalgrad der auftretenden Polynome ist die maximale Dimension der Jordan-Blöcke-1. Weiter gilt  $\sum_{j=1}^s m_j = k$ .

Nun übertragen wir dieses Ergebnis noch für  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ . Man beachte dabei, dass zu jedem Eigenwert auch der komplex konjugierte Eigenwert und dementsprechend auch die komplex konjugierte Lösung auftritt. (Man vergleiche mit Theorem 7.4). Man erhält nun die reellen Lösungen, indem man zu den Imaginär und Realteilen übergeht:

**Theorem 7.10.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ . Man erhält nun ein Erzeugendensystem des Lösungsraums von  $x' = Ax$ ,  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  durch Funktionen der Form

$$\begin{aligned} x_{j,\ell}(t) &= \exp(\alpha_j t) (\cos(\beta_j t) p_{j,\ell}(t) + \sin(\beta_j t) \hat{p}_{j,\ell}(t)) \\ y_{j,\ell}(t) &= \exp(\alpha_j t) (\sin(\beta_j t) q_{j,\ell}(t) + \cos(\beta_j t) \hat{q}_{j,\ell}(t)) \end{aligned}$$

mit  $\ell = 1, \dots, m_j$ . Hier durchläuft  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  mit  $\beta_j \geq 0$  alle Eigenwerte von  $A$ .  $m_j$  ist dabei die zugehörige algebraische Vielfachheit zum Eigenwert  $\lambda_j$ . Weiter sind  $p_{j,\ell}, \hat{p}_{j,\ell}, q_{j,\ell}, \hat{q}_{j,\ell} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  vektorwertige Polynomfunktionen vom Grade  $\leq m_j$ .

## 8 Stabilität von dynamischen Systemen

Quelle [2, §2.2, §2.3] und [1, §15]. Ab hier steigen wir in die Theorie der dynamischen Systeme ein. Diese sind autonome gewöhnliche Differentialgleichungen, d.h. wir betrachten ab hier nur noch Anfangswertprobleme der Form

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

mit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $x_0 \in \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $f$  lokal Lipschitz. Mit Bemerkung 1.6 können wir zu so einer Gestalt immer übergehen, sofern die rechte Seite der Differentialgleichung auch bzgl. der Zeit einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Wegen der Autonomie des Systems können wir die Startzeit frei wählen und gehen o.E. zu  $t_0 = 0$  über.

Es wird nun darum gehen, wie sich Lösungen in der Nähe von Ruhepunkten (d.h. Nullstellen von  $f$ ) verhalten. Es gibt mehrere mögliche Szenarien: Die Lösungen könnten zum Ruhepunkt laufen, in der Nähe bleiben oder z.B. abgestoßen werden. Dies wollen wir mit der folgenden Definition mathematisch präzisieren:

**Definition 8.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  sei lokal Lipschitz. Weiter bezeichnen wir mit  $x : D \rightarrow \Omega$  den (lokalen) Fluss zum zugehörigen dynamischen System  $x' = f(x)$ . Hier ist  $D := \{(t, x_0) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid t_-(x_0) < t < t_+(x_0)\}$  und  $x$  erfüllt

$$\frac{d}{dt}x(t, x_0) = f(x(t, x_0)), \quad x(0, x_0) = x_0.$$

Dann führen wir für das dynamische System  $x' = f(x)$  folgende Definitionen ein:

1. Falls  $\xi \in \Omega$  eine Nullstelle von  $f$  ist, d.h.  $f(\xi) = 0$  erfüllt, so nennen wir die Abbildung  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \xi$  und auch den Punkt  $\xi \in \Omega$  selber einen Ruhepunkt des dynamischen Systems  $x' = f(x)$ .
2. Ein Ruhepunkt  $\xi \in \Omega$  heißt stabil, falls zu jeder offenen Umgebung  $U \subset \Omega$  von  $\xi$  eine offene Umgebung  $V \subset \Omega$  von  $\xi$  existiert, sodass für alle  $x_0 \in V$  der Fluss

$$x(t, x_0) \in U \quad \forall t \in [0, t_+(x_0))$$

erfüllt.

3. Ein Ruhepunkt  $\xi \in \Omega$  heißt instabil, falls er nicht stabil ist.
4. Ein Ruhepunkt  $\xi \in \Omega$  heißt attraktiv, falls eine offene Umgebung  $W \subset \Omega$  von  $\xi$  existiert, sodass für alle  $x_0 \in W$  gilt

$$t_+(x_0) = \infty \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = \xi.$$

5. Ein Ruhepunkt heißt asymptotisch stabil, falls er stabil und attraktiv ist.

**Beispiel 8.2.** Eine fundamentale Matrixlösung von

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \exp(t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{pmatrix}.$$

Weiter ist 0 ein Ruhepunkt des Systems. Die Lösung  $(\exp(t), 0)^T$  zeigt, dass 0 instabil ist. Andererseits konvergiert die Lösung  $(0, \exp(-t))^T$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0. Dabei korrespondiert die erste Lösung zum Eigenwert 1 der Matrix und die zweite Lösung zum Eigenwert  $-1$ .

Beispiel 7.1 deutet daraufhin, dass Eigenwerte eine große Rolle für die Art eines Ruhepunkts spielen werden. In der Tat kann man sogar die Art von Ruhepunkten bei linearen autonomen homogenen Systemen vollständig klassifizieren (siehe z.B. [7, §29]).

Aus Zeitgründen werden wir darauf verzichten bzw. in den Übungen zum Teil darauf eingehen und stattdessen folgendes nichtlineares Resultat zeigen:

**Theorem 8.3.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ . Sei weiter  $\xi \in \Omega$  ein Ruhepunkt des dynamischen Systems  $x' = f(x)$ . Falls für alle komplexen Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  der reellen Jacobimatrix  $Df(\xi) \in \mathbb{R}^{k \times k}$  gilt*

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0,$$

*dann ist  $\xi$  asymptotisch stabil.*

Wir werden den Beweis über die direkte Methode von Lyapunov führen (Quelle [7, §30]). Allerdings erfordert dies Vorbereitung, sodass wir den Beweis auf das Ende des Kapitels verschieben müssen.

Nun geben wir erstmal ein Beispiel, welches verdeutlicht wie Theorem 8.3 angewandt wird:

**Beispiel 8.4.** Wir betrachten das dynamische System

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + (y(t))^2 \\ y'(t) &= -y(t) - (x(t))^3. \end{aligned}$$

D.h. das  $f$  aus Theorem 8.3 besitzt hier folgende Gestalt:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -x + y^2 \\ -y - x^3 \end{pmatrix}$$

Wir haben  $f(0, 0) = 0$ , also ist  $0 \in \mathbb{R}^2$  ein Ruhepunkt des dynamischen Systems. Rechnen wir die Jacobimatrix von  $f$  aus:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 2y \\ -3x^2 & -1 \end{pmatrix}$$

womit

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alle Eigenwerte von  $Df(0, 0)$  sind  $-1$ , also haben einen negativen Realteil. Dies impliziert mit Theorem 8.3, dass 0 ein asymptotisch stabiler Ruhepunkt des dynamischen Systems ist.

Für den Beweis von Theorem 8.3 benötigen wir etwas Notation:

**Definition 8.5.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Dann setzen wir für  $y \in \Omega$

$$\dot{V}(y) := \langle \text{grad } V(y), f(y) \rangle.$$

**Bemerkung 8.6.** Falls  $x$  eine Lösung von  $x' = f(x)$ , so gilt mit Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(V(x(t))) = \dot{V}(x(t)).$$

Wir beziehen uns für die theoretischen Überlegungen o.E. auf die 0 als Ruhepunkt, da wir diese Situation immer herstellen können, indem wir  $y \mapsto f(y + \xi)$  betrachten.

Nun definieren wir den Begriff der Lyapunovfunktion, dessen Existenz allein bereits Stabilitätsaussagen liefern wird:

**Definition 8.7** (Lyapunovfunktion). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $V \in C^1(\Omega)$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Wir nennen  $V$  Lyapunovfunktion zu  $f$ , falls  $V$  folgende Eigenschaften bzgl.  $f$  besitzt:

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \\ V(y) &> 0, \forall y \in \Omega \setminus \{0\} \\ \dot{V}(y) &\leq 0, \forall y \in \Omega. \end{aligned}$$

Damit können wir sofort folgendes Stabilitätskriterium beweisen.

**Theorem 8.8** (Stabilität nach Lyapunov). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $0 \in \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  lokal Lipschitz und  $f(0) = 0$ . Sei weiter  $V \in C^1(\Omega)$  eine Lyapunovfunktion zu  $f$ . Dann gilt:

1. Der Ruhepunkt 0 von  $x' = f(x)$  ist stabil.
2. Falls für alle  $y \in \Omega \setminus \{0\}$  gilt  $\dot{V}(y) < 0$ , so ist der Ruhepunkt 0 von  $x' = f(x)$  asymptotisch stabil.

*Beweis.* Zu (1):

Sei  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(0) \subset \Omega$ . Da  $V$  stetig ist, existiert ein  $\gamma > 0$ , sodass

$$\forall y \in \partial B_\varepsilon(0) \text{ gilt } V(y) \geq \gamma.$$

Da  $V$  stetig ist und  $V(0) = 0$  können wir ein  $\delta > 0$  wählen mit  $0 < \delta < \varepsilon$ , sodass

$$\forall y \in B_\delta(0) \text{ gilt } V(y) < \gamma.$$

Sei nun  $x$  eine Lösung von  $x' = f(x)$  mit Anfangsdatum  $x(0) = x_0 \in B_\delta(0)$ . Dann gilt für die Abbildung  $\varphi(t) := V(x(t)) \geq 0$ , dass

$$\varphi'(t) = \dot{V}(x(t)) \leq 0$$

für alle  $t \in (t_-(x_0), t_+(x_0))$ . Dies impliziert aber für alle  $t \in [0, t_+(x_0))$

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) = V(x_0) < \gamma.$$

Da weiter  $V$  auf  $\partial B_\varepsilon(0)$  nur Werte  $\geq \gamma$  annimmt, bleibt  $x(t) \in B_\varepsilon(0)$  für alle Zeiten. Insbesondere folgt mit Theorem 5.2, dass  $t_+(x_0) = \infty$  und es folgt die

Stabilität des Ruhepunktes 0.

Zu (2):

Wir nutzen weiter die Notationen und Ergebnisse des Beweises zu (1). Da  $\varphi$  monoton fallend und nach unten beschränkt ist, existiert ein  $\beta \in \mathbb{R}$  mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \beta < \gamma.$$

Mit  $\dot{V} < 0$  außerhalb des Nullpunktes gilt sogar, dass  $\varphi$  streng monoton fallend ist, d.h. insbesondere

$$\forall t > 0 \text{ gilt } \beta < \varphi(t) < \gamma$$

Wir zeigen zuerst, dass  $\beta = 0$ . Wir gehen per Widerspruch vor und nehmen an dass  $\beta > 0$  (Mit  $V \geq 0$  kann  $\beta < 0$  nicht eintreten). Dann gilt aber das die kompakte Menge

$$M := \{y \in \overline{B_\varepsilon(0)} \mid \beta \leq V(y) \leq \gamma\} \subset \overline{B_\varepsilon(0)} \setminus \{0\}$$

und da  $\dot{V}$  ebenfalls stetig ist, haben wir auch

$$\max\{\dot{V}(y) \mid y \in M\} =: -\alpha < 0.$$

Da aber  $x(t) \in M$  für alle  $t \geq 0$ , müsste also  $\varphi'(t) \leq -\alpha < 0$  gelten, ein Widerspruch zur Beschränktheit nach unten. Also gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ .

Angenommen  $x(t) \not\rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Wir haben bereits gezeigt, dass  $x(t)$  auf  $[0, \infty)$  beschränkt ist. Damit existiert eine Folge  $t_n \geq 0$  mit  $t_n \rightarrow \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) =: c \neq 0$ . Da  $V$  stetig ist, folgt

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = V(c) > 0,$$

ein Widerspruch. □

Falls man eine Funktion findet, die sich konträr zu einer Lyapunovfunktion verhält, kann man sogar Instabilität zeigen:

**Theorem 8.9** (Instabilität nach Lyapunov). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  offen,  $0 \in \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  lokal Lipschitz mit  $f(0) = 0$ . Weiter sei  $V \in C^1(\Omega)$  mit  $V(0) = 0$ . Außerdem existiere eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega \setminus \{0\}$  mit  $y_n \rightarrow 0$ , sodass  $V(y_n) > 0$ . Dann haben wir*

1. Falls  $\dot{V}(y) > 0$  für alle  $y \neq 0$ , so ist der Ruhepunkt 0 zu  $x' = f(x)$  instabil.
2. Falls ein  $\lambda > 0$  existiert, sodass  $\dot{V}(y) \geq \lambda V(y)$  für alle  $y \in \Omega$ , so ist der Ruhepunkt 0 zu  $x' = f(x)$  instabil.

Insbesondere ist 0 instabil zu  $x' = f(x)$ , falls  $V, \dot{V} > 0$  auf  $\Omega \setminus \{0\}$ .

*Beweis.* Sei  $x$  eine Lösung von  $x' = f(x)$  mit  $x(0) = y_n$ . Wie in Theorem 8.8 definieren wir wieder

$$\varphi(t) := V(x(t)).$$

Damit haben wir  $\varphi(0) = V(x(0)) = V(y_n) =: \alpha > 0$ .

Zu (1):

Sei wieder  $\varepsilon > 0$  derart, dass

$$\forall y \in \overline{B_\varepsilon(0)} \text{ gilt } V(y) < \alpha.$$

Nun haben wir allerdings

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \geq 0,$$

woraus

$$\alpha = \varphi(0) \leq \varphi(t) \text{ für alle } t \in [0, t_+(y_n))$$

folgt. Die Definition von  $\varepsilon$  allerdings impliziert

$$|x(t)| > \varepsilon \text{ für alle } t \in [0, t_+(y_n)).$$

Sei nun  $r > \varepsilon$  mit  $\overline{B_r(0)} \subset \Omega$ . Da  $\dot{V}$  stetig ist, finden wir ein  $\beta > 0$  mit

$$\inf\{|\dot{V}(y)| \mid \varepsilon \leq |y| \leq r\} \geq \beta > 0.$$

Solange also  $x(t) \in B_r(0)$  ist, gilt  $\varphi'(t) \geq \beta$ . Integrieren der beiden Seiten liefert

$$\varphi(t) - \alpha = \varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \varphi'(s) ds \geq \int_0^t \beta ds = \beta t.$$

solange für alle  $0 \leq s \leq t$  gilt, dass  $x(s) \in B_r(0)$ . Da  $V$  auf  $B_r(0)$  beschränkt ist und  $\beta > 0$ , muss die Lösung  $x(t)$  die Kugel  $B_r(0)$  in endlicher Zeit verlassen.

Zu (2):

Wir nutzen weiter die Notationen aus dem Beweis von (1). Hier haben wir allerdings

$$\varphi'(t) = \dot{V}(x(t)) \geq \lambda V(x(t)) = \lambda \varphi(t).$$

Da  $\varphi(0) = \alpha > 0$ , finden wir ein  $T > 0$ , sodass  $\varphi(t) > 0$  für alle  $t \in [0, T]$ . Damit gilt für diese  $t$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} &\geq \lambda \\ \Rightarrow \int_0^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds &\geq \int_0^t \lambda ds \\ \Rightarrow \ln(\varphi(t)) - \ln(\varphi(0)) &\geq t\lambda \\ \Rightarrow \varphi(t) &\geq \alpha \exp(\lambda t). \end{aligned}$$

Da die rechte Seite der letzten Ungleichung  $> 0$  ist, folgt  $T = t_+(y_n)$  wählbar und damit

$$\varphi(t) \geq \alpha \exp(\lambda t) \text{ für alle } t \in [0, t_+(y_n))$$

Also muss auch hier  $x(t)$  die Kugel  $B_r(0)$  in endlicher Zeit verlassen. Da  $y_n \rightarrow 0$ , gibt es also Anfangsdaten beliebig nahe der 0, dessen Lösungen die Kugel  $B_r(0)$  in endlicher Zeit verlassen. Damit ist 0 instabil.  $\square$

Leider gibt es kein 'Kochrezept' um eine Lyapunovfunktion zu konstruieren. Manchmal ist die euklidische Norm, also  $x \mapsto |x|^2$  ein geeigneter Kandidat, wie folgendes Beispiel zeigt (in Beispiel 5.5 haben wir ebenso bereits  $|x|^2$  als Lyapunovfunktion verwendet):

**Beispiel 8.10.** Wir betrachten die lineare autonome Differentialgleichung

$$x' = Ax$$

für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ . Die Abbildung  $V(y) := |y|^2$  erfüllt

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ V(y) &> 0 \text{ für alle } y \neq 0 \\ \dot{V}(y) &= 2\langle y, Ay \rangle. \end{aligned}$$

Demnach ist die 0 ein stabiler Ruhepunkt, falls für alle  $y \neq 0$  gilt  $\langle y, Ay \rangle \leq 0$ . Z.B. ist dies der Fall, wenn  $A$  symmetrisch ist und alle Eigenwerte nichtpositiv sind.

Falls man allerdings Lyapunovfunktionen generieren kann, kann man auch in nichtlinearen Fällen mit physikalischer Anwendung einige interessante Aussagen bzw. physikalisch zu erwartende Aussagen zeigen:

**Beispiel 8.11** (Nichtlineare Schwingung). Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung für Schwingungen ohne Reibungsverluste:

$$u'' + h(u) = 0.$$

Hier soll  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lokal Lipschitzstetig sein und folgende Bedingungen erfüllen:

$$h(0) = 0, \quad zh(z) > 0 \text{ für alle } z \neq 0.$$

Um unsere Theorie nutzen zu können, transformieren wir das Problem nach Methode 2.1 zu einem System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -h(x_1). \end{aligned}$$

Die physikalische Energie in der Schwingung kann mithilfe folgender Funktion modelliert werden:

$$E(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 + \int_0^{y_1} h(s) ds.$$

Wir wollen dieses  $E$  als Lyapunovfunktion heranziehen. Es gilt

$$\begin{aligned} E(0, 0) &= 0, \\ E(y_1, y_2) &> 0 \text{ für } (y_1, y_2) \neq 0, \\ \dot{E}(y_1, y_2) &= \left\langle \begin{pmatrix} h(y_1) \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ -h(y_1) \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Der zweite Punkt ist korrekt, da für  $y_1 < 0$  gilt  $\int_0^{y_1} h(s) ds = -\int_{y_1}^0 h(s) ds > 0$ . Damit sind die Bedingungen von Theorem 8.8 erfüllt und 0 ist ein stabiler Ruhepunkt des Systems. Ein Phasendiagramm des System deutet weiter an, dass man hier mit periodischen Lösungen zu rechnen hat, d.h. der Ruhepunkt ist nicht attraktiv, vgl. Bild 2. In der Skizze wird  $h(u) = \sin(u)$  gesetzt. Die Voraussetzung  $u \cdot \sin(u) \geq 0$  ist damit nur für  $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  korrekt, aber da Stabilität ein lokales Phänomen ist, ist diese Skizze dennoch instruktiv.

Aus der Energie lässt sich außerdem die ursprüngliche Gleichung herleiten, man vergleiche Anhang A, insbesondere Beispiel A.4.

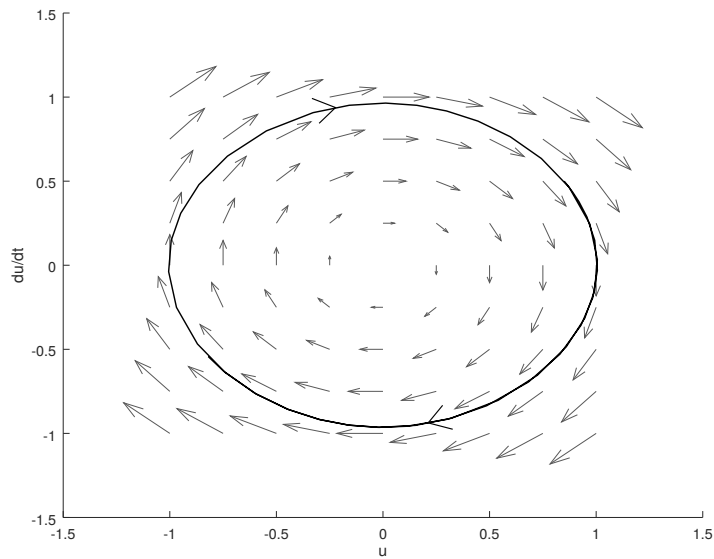


Abbildung 2: Phasendiagramm für  $u'' + \sin(u) = 0$ , inklusive einer numerischen Lösung.

In den Übungen werden wir uns außerdem beispielhaft mit gedämpfter Schwingung beschäftigen, d.h. wir setzen noch einen Reibungsterm in die Gleichung dazu. Also wäre die Differentialgleichung hier  $u'' + R \cdot u' + h(u) = 0$  mit  $R > 0$  einem Reibungsparameter. In diesem Fall kann man sich ebenfalls das Phasendiagramm ansehen und man stellt fest, dass der Ruhepunkt 0 sogar asymptotisch stabil wird, vgl. mit Bild 3.

Wählt man für  $R$  einen unphysikalischen Wert, d.h.  $R < 0$ , so wird immer mehr Energie in das System geleitet und zu vermuten ist, dass der Ruhepunkt 0 instabil wird. Bild 4 bestätigt diese Vermutung. Geht man durch die Rechnung für die ungedämpfte Schwingung durch, kann man dies sogar zeigen!



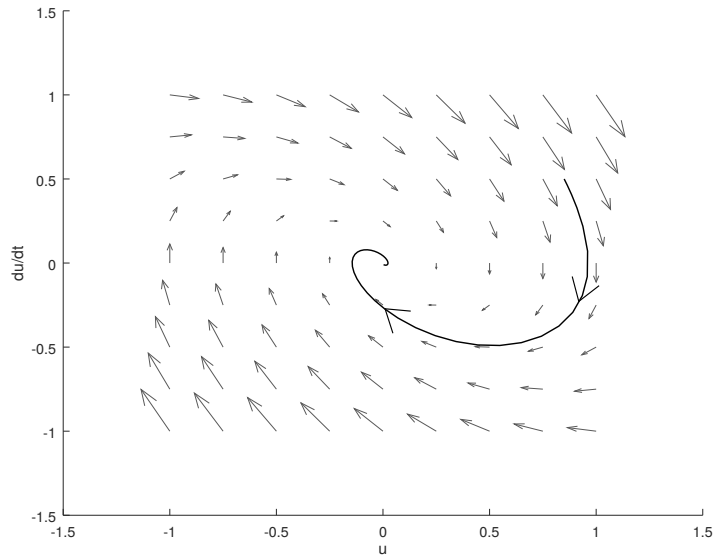


Abbildung 3: Phasendiagramm für  $u'' + u' + \sin(u) = 0$ , inklusive einer numerischen Lösung.

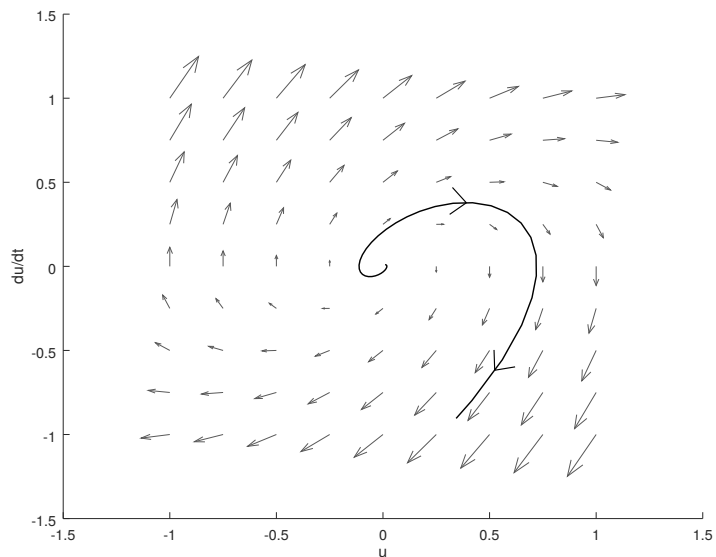


Abbildung 4: Phasendiagramm für  $u'' - u' + \sin(u) = 0$ , inklusive einer numerischen Lösung.

Indem wir die Idee aus Beispiel 8.10 etwas modifizieren und ein anderes Skalarprodukt nutzen, können wir den Beweis von Theorem 8.3 führen. Zur Vorbereitung werden wir zuerst folgendes Lemma beweisen, welches den linearen Fall behandelt.

**Lemma 8.12.** *Sei  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ , sodass für alle komplexen Eigenwerte  $\sigma$  von  $A$  gilt, dass  $\operatorname{Re}(\sigma) < 0$ . Dann existiert ein  $\lambda > 0$  und ein  $\tau \geq 0$ , sodass für alle  $t \geq \tau$  und alle  $v \in \mathbb{R}^k$  gilt*

$$|\exp(At)v| \leq \exp(-\lambda t)|v|.$$

*Beweis.* Sei  $t \geq 0$ . Seien weiter  $c_1(t), \dots, c_k(t)$  die Zeilenvektoren der fundamentalen Matrixlösung  $\exp(At)$ . Sei weiter  $v \in \mathbb{R}^k$ . Dann gilt bzgl. der üblichen euklidischen Norm wegen der Cauchy-Schwartz Ungleichung und der Äquivalenz von Normen (in diesem Fall mit der 1-Norm), dass eine Konstante  $K = K(k) > 0$  existiert mit

$$|\exp(At)v| = \sqrt{\sum_{j=1}^k (\langle c_j(t), v \rangle)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^k |v|^2 |c_j(t)|^2} = |v|K \sum_{j=1}^k |c_j(t)|$$

Seien nun  $\sigma_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \dots, \sigma_\ell = \alpha_\ell + i\beta_\ell$  die paarweise verschiedenen komplexen Eigenwerte von  $A$ . Sei  $\alpha := \max(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) < 0$ . Theorem 7.10 zeigt mit  $|\sin|, |\cos| \leq 1$ , dass eine Konstante  $M > 0$  existiert, sodass

$$|c_i(t)|^2 \leq \exp(2\alpha t)M^2 \sum_{n=1}^{2k-2} |t|^n.$$

Insgesamt existiert also eine Konstante  $C > 0$  unabhängig von  $v$ , sodass

$$|\exp(At)v| \leq |v|K \sum_{j=1}^k |c_j(t)| \leq \exp(\alpha t)C|v| \left( \sum_{j=1}^{2k-2} |t|^j \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sei nun  $\lambda > 0$  mit  $\alpha < -\lambda < 0$  fest. Dann gibt es ein  $\tau \geq 0$ , sodass für alle  $t \geq \tau$  gilt

$$\exp((\lambda + \alpha)t)C \left( \sum_{j=1}^{2k-2} |t|^j \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1,$$

oder äquivalent

$$\exp(\alpha t)C \left( \sum_{j=1}^{2k-2} |t|^j \right)^{\frac{1}{2}} \leq \exp(-\lambda t).$$

Insbesondere haben wir für  $t \geq \tau$

$$|\exp(At)v| \leq \exp(-\lambda t)|v|.$$

□

Kommen wir nun zur linearisierten Stabilität, welche den Beweis von Theorem 8.3 nachsichziehen wird.

**Lemma 8.13.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ ,  $0 \in \Omega$ ,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  erfülle eine lokale Lipschitzbedingung und  $g(0) = 0$ . Außerdem soll gelten  $g(y) = o(|y|)$  für  $|y| \rightarrow 0$ , d.h.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(y)}{|y|} = 0.$$

Weiter sei  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$  gegeben, sodass für alle Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt, dass

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

Dann ist der Ruhepunkt 0 für die Differentialgleichung  $x'(t) = Ax(t) + g(x(t))$  asymptotisch stabil.

*Beweis.* Wir führen folgendes Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^k$  ein. Sei dafür  $a, b \in \mathbb{R}^k$ :

$$\langle a, b \rangle_A := \int_0^\infty \langle \exp(At)a, \exp(At)b \rangle dt.$$

Nach Lemma 8.12 existiert eine Konstante  $\tau \geq 0$  und ein  $\mu > 0$ , sodass  $|\exp(At)y| \leq \exp(-\mu t)|y|$  für alle  $y \in \mathbb{R}^k$  und alle  $t \geq \tau$ . Damit erhalten wir die Wohldefiniertheit des neuen Skalarprodukts:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |\langle \exp(At)a, \exp(At)b \rangle| dt \leq \int_0^\infty |\exp(At)a| |\exp(At)b| dt \\ &= \int_0^\tau |\exp(At)a| |\exp(At)b| dt + \int_\tau^\infty |\exp(At)a| |\exp(At)b| dt \\ &\leq \int_0^\tau |\exp(At)a| |\exp(At)b| dt + \int_\tau^\infty \exp(-2\mu t) |a| |b| dt < \infty. \end{aligned}$$

Linearität von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  folgt aus der Linearität der Matrixmultiplikation und des Integrals. Falls  $\langle a, a \rangle_A = 0$ , so muss  $\exp(At)a = 0$  für alle  $t \geq 0$  sein. Da allerdings  $\exp(At)$  invertierbar als Matrix ist, folgt  $a = 0$ .

Nun definieren wir als Lyapunovfunktion

$$V(y) := \langle y, y \rangle_A.$$

Um  $\dot{V}$  zu berechnen, benötigen wir zuerst  $\operatorname{grad} V$ . Dafür leiten wir zuerst die Abbildung  $\mathbb{R}^k \ni y \mapsto \langle By, By \rangle$  für  $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$  nach  $y$  ab:

$$\begin{aligned} \partial_i \langle By, By \rangle &= \partial_i \left( \sum_{\ell=1}^k \left( \sum_{j=1}^k B_{\ell j} y_j \right)^2 \right) = \sum_{\ell=1}^k \partial_i \left( \sum_{j=1}^k B_{\ell j} y_j \right)^2 \\ &= \sum_{\ell=1}^k B_{\ell i} 2 \left( \sum_{j=1}^k B_{\ell j} y_j \right) = 2 \sum_{\ell=1}^k B_{\ell i} (By)_\ell \\ &= 2 \sum_{\ell=1}^k B_{\ell i}^T (By)_\ell = 2(B^T (By))_i. \end{aligned}$$

Also gilt i.A.

$$\operatorname{grad} (\langle By, By \rangle) = 2B^T By.$$

Angenommen wir könnten Ableitung und Integral in der Definition von  $V$  vertauschen, so würden wir folgendes erhalten:

$$\text{grad} \left( \int_0^\infty \langle \exp(At)y, \exp(At)y \rangle dt \right) = 2 \int_0^\infty (\exp(At))^T \exp(At)y dt$$

Da der Integrand  $(\exp(At))^T \exp(At)y$  mit Lemma 8.12 im Betrag exponentiell abfällt (siehe oben), lässt sich die Vertauschung von Integral und Ableitung mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue rechtfertigen. Damit erhalten wir mithilfe der Linearität des Integrals insgesamt

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= \langle \text{grad}(V)(y), Ay + g(y) \rangle = \left\langle \int_0^\infty 2(\exp(At))^T \exp(At)y dt, Ay + g(y) \right\rangle \\ &= 2 \int_0^\infty \langle (\exp(At))^T \exp(At)y, Ay + g(y) \rangle dt \\ &= 2 \int_0^\infty \langle \exp(At)y, \exp(At)(Ay + g(y)) \rangle dt \\ &= 2 \langle y, Ay + g(y) \rangle_A. \end{aligned}$$

Nun setzen wir für  $y \in \Omega$  die Lösung des linearisierten Problems  $x(t) := \exp(At)y$  und mit  $x'(t) = A \exp(At)y$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= 2 \langle y, Ay + g(y) \rangle_A \\ &= 2 \int_0^\infty \langle x(t), x'(t) \rangle dt + 2 \langle y, g(y) \rangle_A \\ &\leq \|x(t)\|_0^\infty + 2 \sqrt{\langle y, y \rangle_A \langle g(y), g(y) \rangle_A} \\ &\leq -|y|^2 + 2c^2 |y| |g(y)|. \end{aligned}$$

Letzte Ungleichung erhalten wir aus der Äquivalenz von Normen im  $\mathbb{R}^k$ , d.h.  $\sqrt{\langle y, y \rangle_A} \leq c|y|$ . Sei nun  $r > 0$ , derart, dass  $B_r(0) \subset \Omega$  und  $|g(y)| \leq \frac{1}{4c^2}|y|$  für alle  $y \in B_r(0)$ . Damit erhalten wir für diese  $y$ :

$$\dot{V}(y) \leq -|y|^2 + 2c^2 |y| |g(y)| \leq -\frac{1}{2}|y|^2 \leq -\frac{1}{2c^2} V(y) < 0.$$

Aus Theorem 8.8 folgt nun die Aussage.  $\square$

Kommen wir nun zum angekündigten Beweis von Theorem 8.3:

*Beweis.* Indem wir  $y \mapsto f(y + \xi)$  betrachten, können wir o.E. annehmen, dass  $\xi = 0$  ist.

Da  $f$  insbesondere total differenzierbar in 0 ist, können wir  $f$  lokal um die 0 ausdrücken als

$$f(y) = f(0) + Df(0)y + g(y),$$

wobei  $g(y) = o(|y|)$  für  $|y| \rightarrow 0$ . Mit  $f(0) = 0$  folgt die Aussage nun sofort aus Lemma 8.13, denn  $g(y) = f(y) - Df(0)y$  ist stetig differenzierbar und damit lokal Lipschitz.  $\square$

**Bemerkung 8.14.** Falls einer der Eigenwerte von  $Df(\xi)$  einen echt positiven Realteil besitzt, kann man zeigen, dass der Ruhepunkt instabil ist. Ein Beweis findet sich z.B. in [1, Thm. 15.6].

Das folgende Beispiel zeigt allerdings, dass im Falle eines rein imaginären Eigenwerts keine Aussagen zu erwarten sind, denn dann kann sich das Verhalten in den Termen höherer Ordnung verstecken:

**Beispiel 8.15.** (a) Wir betrachten das folgende System

$$\begin{aligned}x' &= -y + x^3 \\y' &= x + y^3.\end{aligned}$$

mit Ruhepunkt  $(0, 0)$ . Die Linearisierung in  $(0, 0)$  lautet

$$\frac{\partial}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} -y + x^3 \\ x + y^3 \end{pmatrix} \Big|_{(x, y)=(0, 0)} = \begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix} \Big|_{(x, y)=(0, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , besitzen also keinen Realteil. Nun setzen wir

$$V(x, y) := x^2 + y^2 = |(x, y)|^2$$

als mögliche Lyapunov-Funktion an. Dann gilt

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= \langle (2x, 2y), (-y + x^3, x + y^3) \rangle \\ &= -2xy + 2x^4 + 2xy + 2y^4 = 2(x^4 + y^4) > 0\end{aligned}$$

für  $(x, y) \neq 0$ . Dann gilt mit Theorem 8.9, dass  $(0, 0)$  ein instabiler Ruhepunkt ist.

(b) Nun betrachten wir ein ähnliches System:

$$\begin{aligned}x' &= -y - x^3 \\y' &= x - y^3.\end{aligned}$$

Die Linearisierung bei  $(0, 0)$  ergibt dieselbe Matrix wie in (a) und damit diesselben rein imaginären Eigenwerte. Wieder betrachten wir

$$V(x, y) := x^2 + y^2 = |(x, y)|^2$$

als mögliche Lyapunov-Funktion. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= \langle (2x, 2y), (-y - x^3, x - y^3) \rangle \\ &= -2xy - 2x^4 + 2xy - 2y^4 = -2(x^4 + y^4) < 0\end{aligned}$$

für  $(0, 0) \neq 0$ . Mit Theorem 8.8 ist  $(0, 0)$  asymptotisch stabil.

## A Variationsrechnung

In diesem Abschnitt wollen wir der Herkunft bestimmter Differentialgleichungen auf die Spur gehen. Wir stellen uns dabei auf einen 'physikalischen' Standpunkt und nehmen an, dass das zu modellierende Objekt sich bzgl. einer geeigneten Energie minimal verhält. Aus dieser Energie werden wir dann eine Differentialgleichung herleiten können, die sogenannte Euler-Lagrange Gleichung. Wir betrachten hier ausschließlich Energien, die durch ein Integral dargestellt werden können. Sei dafür  $t_0 \in \mathbb{R}$  die Startzeit und  $T > t_0$  der betrachtete Zeithorizont. Sei weiter die Abbildung  $(t, y, p) \mapsto h(t, y, p)$  mit  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  der glatte Integrand für unser Energiefunktional. Für eine glatte Abbildung  $x : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir dieses nun durch

$$F(x) := \int_{t_0}^T h(t, x(t), x'(t)) dt. \quad (\text{A.1})$$

Für die Herleitung der Euler-Lagrange Gleichung benötigen wir folgendes Lemma, welches sich im Rahmen der Maß- und Integrationstheorie sogar auf gerade mal Lebesgue-integrierbare Funktionen verallgemeinern lässt:

**Lemma A.1** (Fundamentallema der Variationsrechnung). *Sei  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Weiter gelte für alle  $\varphi \in C_0^\infty((a, b), \mathbb{R})$ , d.h. glatt mit kompakten Träger, dass*

$$\int_a^b f(t)\varphi(t) dt = 0.$$

Dann gilt  $f \equiv 0$ .

*Beweis.* Angenommen  $f \neq 0$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , ein  $t^* \in (a, b)$ , sodass o.E.  $f(t^*) \geq \varepsilon$ . Da  $f$  stetig ist, existiert ein  $R > 0$ , sodass für alle  $t \in (t^* - R, t^* + R) \subset (a, b)$  gilt  $f(t) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ . Sei nun  $\varphi \in C_0^\infty((t^* - R, t^* + R), \mathbb{R}) \subset C_0^\infty((a, b), \mathbb{R})$ , mit  $\varphi \geq 0$ , sodass für alle  $t \in (t^* - \frac{R}{2}, t^* + \frac{R}{2})$  gilt  $\varphi(t) \geq \varepsilon$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f(t)\varphi(t) dt = \int_{t^*-R}^{t^*+R} f(t)\varphi(t) dt \geq \int_{t^*-\frac{R}{2}}^{t^*+\frac{R}{2}} f(t)\varphi(t) dt \\ &\geq \int_{t^*-\frac{R}{2}}^{t^*+\frac{R}{2}} \frac{\varepsilon^2}{2} dt = R \frac{\varepsilon^2}{2} > 0, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Kommen wir nun zur Euler-Lagrange Gleichung für  $F$ , sofern wir einen geeigneten Minimierer haben. Die Beweisstrategie ist hier deutlich wichtiger als die Aussage selber, denn diese kann auch auf verwandte Probleme angewandt werden.

**Theorem A.2** (Euler-Lagrange Gleichung). *Sei  $F$  wie in (A.1) definiert. Sei weiter  $x_0, x'_0 \in \mathbb{R}$  die Anfangsdaten zu  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Die Funktionenmenge, in der wir minimieren wollen, lautet*

$$L := \{\omega \in C^2([t_0, T], \mathbb{R}) \text{ mit } \omega(t_0) = x_0, \omega'(t_0) = x'_0\}. \quad (\text{A.2})$$

Sei nun  $x \in L$  minimal für  $F$ , d.h. für alle  $\omega \in L$  gilt

$$F(x) \leq F(\omega).$$

Dann erfüllt  $x$  folgende gewöhnliche Differentialgleichung (genannt Euler-Lagrange Gleichung) für alle  $t \in (t_0, T)$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial h}{\partial p}(t, x(t), x'(t)) \right) - \frac{\partial h}{\partial y}(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad (\text{A.3})$$

und die folgenden Anfangsdaten

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0.$$

*Beweis.* Sei  $\varphi \in C_0^\infty((t_0, T), \mathbb{R})$  fest aber beliebig. Da  $\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = 0$  gilt für alle  $s \in \mathbb{R}$

$$(t \mapsto x(t) + s \cdot \varphi(t)) \in L.$$

Da  $[t_0, T]$  ein kompaktes Intervall und  $t \mapsto h(t, x(t), x'(t))$  stetig differenzierbar ist, ist die Abbildung

$$s \mapsto F(x + s\varphi)$$

stetig differenzierbar und Integral und Ableitung nach  $s$  kann vertauscht werden. Außerdem besitzt laut Voraussetzung  $F$  in  $s = 0$  ein lokales Minimum, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} F(x + s\varphi)|_{s=0} = \frac{d}{ds} \int_{t_0}^T h(t, x(t) + s\varphi(t), x'(t) + s\varphi'(t)) dt|_{s=0} \\ &= \int_{t_0}^T \frac{\partial}{\partial s} (h(t, x(t) + s\varphi(t), x'(t) + s\varphi'(t))) dt|_{s=0} \\ &= \int_{t_0}^T \frac{\partial h}{\partial y}(t, x(t) + s\varphi(t), x'(t) + s\varphi'(t)) \cdot \varphi(t) \\ &\quad + \frac{\partial h}{\partial p}(t, x(t) + s\varphi(t), x'(t) + s\varphi'(t)) \cdot \varphi'(t) dt|_{s=0} \\ &= \int_{t_0}^T \frac{\partial h}{\partial y}(t, x(t), x'(t)) \cdot \varphi(t) + \frac{\partial h}{\partial p}(t, x(t), x'(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_{t_0}^T \frac{\partial h}{\partial y}(t, x(t), x'(t)) \cdot \varphi(t) dt + \left[ \frac{\partial h}{\partial p}(t, x(t), x'(t)) \cdot \varphi(t) \right]_{t_0}^T \\ &\quad - \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial h}{\partial p}(t, x(t), x'(t)) \right) \cdot \varphi(t) dt \\ &= \int_{t_0}^T \left( \frac{\partial h}{\partial y}(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial h}{\partial p}(t, x(t), x'(t)) \right) \right) \cdot \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Da  $\varphi \in C_0^\infty((t_0, T), \mathbb{R})$  beliebig ist, gilt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung A.1

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial h}{\partial p}(t, x(t), x'(t)) \right) - \frac{\partial h}{\partial y}(t, x(t), x'(t)) = 0.$$

□

**Bemerkung A.3.** 1. Analysiert man den Beweis, stellt man fest, dass auch unter gegebenen Randdaten, d.h. z.B.  $x(T)$  vorschreiben statt  $x'(t_0)$ , dasselbe Ergebnis folgt.

2. Der vorherige Punkt eröffnet eine Beweisstrategie für die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen unter Randdaten. Dafür muss sichergestellt werden, dass ein solcher Minimierer existiert. Die nötigen technischen Hilfsmittel dafür einzuführen würde jedoch den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.
3. In der Physik wird gerne das Symbol  $\delta F$  für die Euler-Lagrange Gleichung genutzt. Dies soll darauf hindeuten, dass es sich um eine Ableitung handelt.
4. Physikalisch würde man das  $F$  eigentlich als Wirkung bezeichnen, in der Mathematik hat sich aber der Begriff Energie eingebürgert.
5. In der Mathematik nennt man  $\frac{d}{ds}F(x+s\varphi)|_{s=0}$  die Gâteaux-Ableitung von  $F$  im Punkt  $x$  in Richtung  $\varphi$ . Dies verallgemeinert die Richtungsableitung auf  $\infty$ -dimensionale Vektorräume.

**Beispiel A.4** (Mathematisches Fadenpendel). Wir leiten hier nun die Gleichung für die Schwingung eines Fadenpendels her. Sei dafür eine Masse  $m$  an einem dünnen Faden der Länge  $L$  aufgehängt. Hier sei weiter  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$  die Fallbeschleunigung der Erde.  $\theta$  sei der Winkel der Auslenkung und die Funktion die wir modellieren wollen (siehe Abbildung 5). Die Anfangsdaten seien  $\theta(0) = \theta_0$ , eine Startauslenkung,  $\theta'(0) = \theta'_0$ , eine Startbeschleunigung. Die kinetische Energie zum Zeitpunkt  $t$  ist  $W_{kin}(t) = \frac{1}{2}mv^2$  und die potentielle Energie  $W_{pot}(t) = mgh(t)$ .  $v$  entspricht hier der Bahngeschwindigkeit und die Verbindung zur Winkelgeschwindigkeit ist  $v = L\theta'$ . Für  $h$  können wir folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{L-h}{L} = \cos \theta \Rightarrow h = L(1 - \cos \theta).$$

Also gilt für die gesamte Energie zum Zeitpunkt  $t$

$$W_{ges}(t) = W_{kin}(t) + W_{pot}(t) = \frac{1}{2}L^2m(\theta'(t))^2 + L(1 - \cos(\theta(t)))mg.$$

Also beträgt die Wirkung  $F$  im Zeithorizont  $[0, T]$ :

$$F(\theta) = \int_0^T W_{kin}(t) + W_{pot}(t) dt = m \int_0^T \frac{1}{2}L^2(\theta'(t))^2 + L(1 - \cos(\theta(t)))g dt.$$

Die eingeschlagene Bahn soll möglichst wirkungsarm sein, d.h.  $\theta$  muss insbesondere die Euler-Lagrange Gleichung zu  $F$  erfüllen:

$$0 = \delta F = mL \left( L \frac{d}{dt}(\theta'(t)) + \sin(\theta(t))g \right),$$

also gilt

$$\theta''(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0.$$



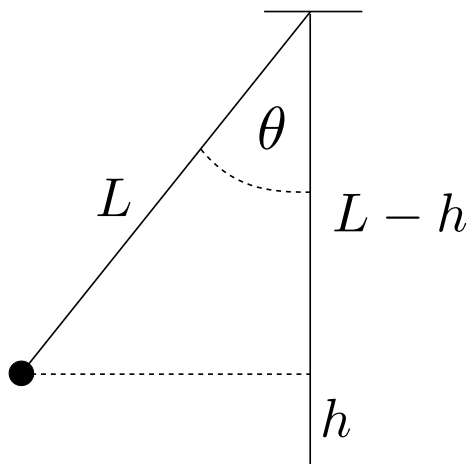


Abbildung 5: Mathematisches Pendel.

## Literatur

- [1] H. Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, 1983. 1. Auflage.
- [2] C. Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, 1999.
- [3] G. Fischer. *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Springer Spektrum, 2012. 2. Auflage.
- [4] H.-Chr. Grunau. *Analysis 3. Vorlesungsskript*, WiSe 2016/17 in Magdeburg.
- [5] H.-Chr. Grunau. *Dynamische Systeme. Vorlesungsskript*, SoSe 2004 in Magdeburg.
- [6] P. Hartman. *Ordinary differential equations*. Wiley, 1964.
- [7] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer Verlag, 1996. 6. Auflage.