Dr. S. Eichmann 16. April 2019
Sommersemester 2019

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen
Blatt 1

Definition(Gleichgradige Stetigkeit)
Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $k \in \mathbb{N}$. Wir nennen die Menge $M \subset C^0(J, \mathbb{R}^k)$ gleichgradig stetig, falls $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $g \in M$ und für alle $x, y \in J$ mit $|x - y| < \delta$ gilt

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

1.1 Aufgabe

Sei $J = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Sei weiter eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(J, \mathbb{R}^k)$ gegeben mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\exists C > 0$, sodass für alle $x \in J$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|g_n(x)| \leq C$.
2. Die Menge $M := \{g_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichgradig stetig.

Zeigen Sie, dass eine in J gleichmäßig konvergente Teilfolge von g_n existiert.

1.2 Aufgabe

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\cos(t) \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

1.3 Aufgabe ⋆

Man löse folgende Differentialgleichung

$$x''(t) = \frac{1}{k}\sqrt{1 + (x'(t))^2}$$

für $k \neq 0$ und den Anfangsbedingungen $x(0) = k,\ x'(0) = 0$.

Hinweis: Man substituiere $u(t) = x'(t)$.

1.4 Aufgabe ⋆

Fertigen Sie einen Plot des Richtungsfeldes der Differentialgleichung

$$x'(t) = x(t)\sin(t)$$

für $t \in [0, 5]$ und $x \in [0, 5]$ mithilfe von Octave oder Matlab an.

Hinweis: Nutzen Sie die Octave/Matlab Befehle *quiver* und *meshgrid*.

1.5 Aufgabe $\star$

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall. Sei weiter $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Funktionen mit den Eigenschaften

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $g_n(a) = 0$.
2. Es existiert ein $L > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in [a,b]$ gilt
$$|g_n(x) - g_n(y)| \leq L|x - y|.$$

Zeigen Sie, dass eine gleichmäßig konvergente Teilfolge von g_n auf $[a,b]$ existiert.

Hinweis: Aufgabe 1.1.

1.6 Aufgabe $\star$

Man löse das Anfangswertproblem
$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 - t^2, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$
durch einen Potenzreihenansatz $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$. Das heißt, man setze die Potenzreihe in die Differentialgleichung ein und bestimme eine Rekursionsformel für die a_k durch Koeffizientenvergleich. Man zeige, dass die so gefundene Potenzreihe für $t \in (-1,1)$ absolut konvergiert.

Hinweis: Man zeige per Induktion: $|a_k| \leq 1$.

Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sind Hausaufgaben.

Abgabe der Lösungen: Dienstag, den 23.04.2019, 12.15 Uhr in der Vorlesung.

Die Aufgabenblätter und weitere Hinweise finden Sie unter
http://www.math.uni-tuebingen.de/user/eichmann/Lehre/Gew_Diff_Gleich_2019/.