Dr. S. Eichmann 23. April 2019
Sommersemester 2019

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen
Blatt 2

2.1 Aufgabe

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{1}{2}x'(t) - \sin(x(t)) \\ x(0) = 1, x'(0) = 0. \end{cases}$$

Lösen Sie diese Gleichung numerisch mit einem bei Octave/Matlab vorinstallierten Löser für den Zeithorizont $t \in [0, 10]$. Fertigen Sie außerdem einen Plot der Lösung an.

Hinweis: Methode 2.1 und informieren Sie sich über den Octave/Matlab Befehl *ode45*.

2.2 Aufgabe

Sei $\xi \in \mathbb{R}$, $b > 0$ gegeben. Sei weiter $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, d.h. es existiert ein $C > 0$, sodass für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt $|f(t, x)| \leq C$. Weiter sei $b > 0$ und $\varphi : [\xi - b, \xi] \to \mathbb{R}$ stetig gegeben. Zeigen Sie es existiert ein $a > 0$ und ein $y : [\xi - b, \xi + a] \to \mathbb{R}$ stetig, welches stetig differenzierbar auf $[\xi, \xi + a]$ ist und die folgende Differentialgleichung mit nacheilendem Argument erfüllt:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t - b)) \text{ für alle } t \in [\xi, \xi + a] \\ y(t) = \varphi(t) \text{ für alle } t \in [\xi - b, \xi]. \end{cases}$$

Hinweis: Adaptieren Sie den Beweis vom Satz von Peano.

2.3 Aufgabe

Zeigen Sie, dass das folgende Anfangswertproblem für alle $\alpha \in (0, 1)$ unendlich viele Lösungen besitzt:

$$\begin{aligned} x'(t) &= |x(t)|^\alpha \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

2.4 Aufgabe

1. $u \in C^2([0, \pi])$ löse das Randwertproblem

   $$\begin{cases} u''(t) = u(t) \text{ für alle } t \in [0, \pi] \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass $u \equiv 0$ gilt.

2. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem für $u \in C^2([0, \pi])$

   $$\begin{cases} u''(t) = -u(t) \text{ für alle } t \in [0, \pi] \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

   unendlich viele nichttriviale Lösungen besitzt.

Hinweis: Zu (1): Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit u, integrieren Sie nach der Zeit und verwenden dann partielle Integration.
Zu (2): Machen Sie einen Ansatz mit trigonometrischen Funktionen.

Abgabe der Lösungen: Dienstag, den 07.05.2019, 12.15 Uhr in der Vorlesung.

Die Aufgabenblätter und weitere Hinweise finden Sie unter
http://www.math.uni-tuebingen.de/user/eichmann/Lehre/Gew_Diff_Gleich_2019/.