Dr. S. Eichmann 7. Mai 2019
Sommersemester 2019

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen
Blatt 3

3.1 Aufgabe

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Weiter erfülle $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^k$ eine lokale Lipschitzbedingung nach Definition 3.2. Sei $K \subset I \times \Omega$ kompakt. Zeigen Sie es existiert ein $L > 0$, sodass für alle $(t, x), (t, y) \in K$ gilt

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Hinweis: Gehen Sie per Widerspruch vor und nehmen Sie an es existieren Folgen $(t_n, x_n), (t_n, y_n) \in K$, sodass $|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)| > n|x_n - y_n|$.

3.2 Aufgabe

Implementieren Sie in Octave/Matlab die Picard-Iteration (siehe Methode 4.1) für das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) =& x(t) \cdot \exp(-t) \\ x(0) =& 1 \end{aligned}$$

im Zeithorizont $t \in [0, 5]$ und fertigen Sie einen Plot Ihrer Lösung an.
Hinweis: Informieren Sie sich über den Octave/Matlab Befehl *cumtrapz*.

3.3 Aufgabe

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung (siehe Definition 3.2). Seien $t_0 \in I$, $K \subset \Omega$ kompakt und seien für $x_{0,1}, x_{0,2} \in K$

$$x_1, x_2 : [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_1] \to K$$

stetig differenzierbare Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} x_j'(t) = f(t, x_j(t)), \quad t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_1] \\ x_j(t_0) = x_{0,j}. \end{cases}$$

Man beweise, dass es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass für alle $t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_1]$ gilt:

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq |x_{0,2} - x_{0,1}| \, e^{L|t - t_0|}.$$

Hinweis: Man benutze das Gronwallsche Lemma mit $a = |x_{0,2} - x_{0,1}|$ in Lemma 3.4 und verwende Aufgabe 3.1.

3.4 Aufgabe

Es sei

$$\dot{x}(t) = -x(t)^2 + x(t) + 2x(t)\,t^2 + 2t - t^2 - t^4.$$

(a) Man zeige, dass $x(t) = 1 + t^2$ die Differentialgleichung löst.

(b) Sei $x_1(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert $x_1(0) < 1$. Man beweise, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $x_1(t) < 1 + t^2$.

Abgabe der Lösungen: Dienstag, den 21.05.2019, 12.15 Uhr in der Vorlesung.

Die Aufgabenblätter und weitere Hinweise finden Sie unter http://www.math.uni-tuebingen.de/user/eichmann/Lehre/Gew_Diff_Gleich_2019/.