Dr. S. Eichmann 21. Mai 2019
Sommersemester 2019

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen
Blatt 4

4.1 Aufgabe

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x''(t) = x(t) - \frac{1}{2}(x(t))^3 \\ x(0) = 2,\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Hinweis: Energiemethode 4.8.

4.2 Aufgabe

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) + \frac{x(t)}{1+t} - (1+t)(x(t))^4 = 0 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

4.3 Aufgabe

Man bestimme für folgende Anfangswertprobleme

(a) t_- und t_+ : $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)^3, \\ x(0) = 1. \end{cases}$

(b) t_+ : $\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t)\,z(t) - x(t)^3, \\ \dot{y}(t) = -x(t)\,z(t) - y(t)^3, \\ \dot{z}(t) = 2x(t)\,y(t) - z(t)^3, \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0. \end{cases}$

(c) t_- und t_+ : $\begin{cases} \dddot{x}(t) = t^3\left(x(t) + \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\right), \\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = \dfrac{1}{2}, \ddot{x}(0) = 0. \end{cases}$

4.4 Aufgabe

Für ein Vektorfeld $V : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ nennt man eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ globaler Fluss von V, falls

(i) $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x)$ existiert für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^k$,

(ii) $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = V(\Phi(t, x))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^k$,

(iii) $\Phi(0, x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^k$.

Zeigen Sie, dass falls $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, also glatt mit kompakten Träger ist, dass genau ein solcher globaler Fluss Φ von V existiert. Zeigen Sie weiter, dass in diesem Falle für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^k$ gilt

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x)).$$

Abgabe der Lösungen: Dienstag, den 04.06.2019, 12.15 Uhr in der Vorlesung.

Die Aufgabenblätter und weitere Hinweise finden Sie unter
http://www.math.uni-tuebingen.de/user/eichmann/Lehre/Gew_Diff_Gleich_2019/.