Dr. S. Eichmann 04. Juni 2019
Sommersemester 2019

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen
Blatt 5

5.1 Aufgabe

Gegeben sei das Anfangswertproblem mit Parameter $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{cases} x'(t,\lambda) = \begin{cases} e^{-\frac{\lambda^2}{x(t,\lambda)^2}} \sqrt{|x(t,\lambda)|} + \lambda, & \lambda \neq 0 \\ \sqrt{|x(t,\lambda)|}, & \lambda = 0 \end{cases}, \\ x(0,\lambda) = 0 \text{ für alle } \lambda \in [0,1]. \end{cases}$$

Wir setzen hier für $\alpha \neq 0$, dass $e^{-\frac{\alpha}{0}} := 0$. Man beweise:

(a) Für $\lambda \neq 0$ gibt es eine eindeutige globale Lösung $x(\,.\,,\lambda)$ des Anfangswertproblems.

(b) Für $\lambda \neq 0$ ist diese Lösung ungerade, d.h. $x(-t,\lambda) = -x(t,\lambda)$.

(c) Man gebe eine Lösung $x(\,.\,,0)$ an, so dass für $\lambda \to 0$ die Lösungen $x(\,.\,,\lambda)$ nicht punktweise gegen $x(\,.\,,0)$ konvergieren.

Hinweis für a): Zeigen Sie für die Langzeitexistenz, dass die rechte Seite der Differentialgleichung nur sublinear wächst, d.h. zeigen Sie es existieren Konstanten $M, C > 0$, sodass $e^{-\frac{\lambda^2}{y^2}} \sqrt{|y|} + \lambda \leq M(|y| + C)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt. Verwenden Sie dann das Lemma von Gronwall.

5.2 Aufgabe

Lösen Sie das folgende Randwertproblem numerisch mit Octave/Matlab mit der Schießmethode.

$$\begin{cases} u''(t) = -\sin(u(t)) \\ u(0) = 1,\ u(5) = -1. \end{cases}$$

Fertigen Sie einen Plot Ihrer Lösung an und berechnen Sie $u'(0)$.
Die Schießmethode funktioniert wie folgt: Das Anfangswertproblem in der Zeit t für einen Parameter $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,s) = -\sin(u(t,s)) \\ u(0,s) = 1, u'(0,s) = s \end{cases}$$

definiert eine Abbildung $g(s) := u(5,s) + 1$. Findet man nun eine Nullstelle von g, so hat man das ursprüngliche Randwertproblem gelöst.
Hinweis: Informieren Sie sich über den Octave/Matlab Befehl *fsolve* und lösen Sie die auftretenden Anfangswertprobleme analog zu Aufgabe 2.1.

5.3 Aufgabe

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = -2t\left(t^2 - 1\right) x(t)^2, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Man bestimme den maximalen Definitionsbereich in Abhängigkeit von x_0.

5.4 Aufgabe

Sei $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ ein glattes Vektorfeld mit kompakten Träger. Sei $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ der globale Fluss zu V aus Aufgabe 4.4. Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$x \mapsto \Phi(t, x)$$

ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^k$ ist.

Abgabe der Lösungen: Dienstag, den 18.06.2019, 12.15 Uhr in der Vorlesung.

Die Aufgabenblätter und weitere Hinweise finden Sie unter
http://www.math.uni-tuebingen.de/user/eichmann/Lehre/Gew_Diff_Gleich_2019/.