

## Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen Blatt 7

### 7.1 Aufgabe

Zeigen Sie, dass der Ruhepunkt 0 des folgenden dynamischen Systems asymptotisch stabil ist:

$$\begin{cases} x' &= z^3 - \sinh(x)(1 - y) \\ y' &= x^4 - 3 \sin(y) \cosh(z) \\ z' &= xy - 2(\exp(z) - 1). \end{cases}$$

### 7.2 Aufgabe

Wir betrachten für  $x_0, x'_0 \in \mathbb{R}$  folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + \sin(x(t)) = 0 \\ x(0) = x_0, x'(0) = x'_0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für alle  $x_0, x'_0$  mit  $|x_0|, |x'_0| \leq \delta$  gilt, dass  $t_+(x_0, x'_0) = \infty$  und die zugehörige Lösung erfüllt weiter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, x'_0) = 0.$$

### 7.3 Aufgabe

Zeigen Sie, dass der Ruhepunkt 0 des folgenden dynamischen Systems asymptotisch stabil ist:

$$\begin{cases} x'(t) &= -y(t) - \sinh(x(t)) \\ y'(t) &= x(t) - (y(t))^3 \cosh(y(t)). \end{cases}$$

*Hinweis:* Gehen Sie analog zu Beispiel 5.5 vor.

### 7.4 Aufgabe

Betrachten Sie das folgende Räuber-Beute Modell für Parameter  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$ :

$$\begin{cases} x' &= \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy \\ y' &= -\varepsilon_2 y + \gamma_2 xy \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

(a)  $(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1})$  ein Ruhepunkt ist.

(b)  $(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1})$  stabil ist.

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass  $V(x, y) = \gamma_2 x - \varepsilon_2 \ln(x) + \gamma_1 y - \varepsilon_1 \ln(y)$  im Ruhepunkt ein striktes lokales Minimum besitzt. Modifizieren Sie danach  $V$  so, dass sie als Lyapunov Funktion benutzt werden kann.

---

*Abgabe der Lösungen: Dienstag, den 16.07.2019, 12.15 Uhr in der Vorlesung.  
Das Blatt wird in der letzten Vorlesung am 23. Juli besprochen.*

---

Die Aufgabenblätter und weitere Hinweise finden Sie unter  
[http://www.math.uni-tuebingen.de/user/eichmann/Lehre/Gew.Diff-Gleich\\_2019/](http://www.math.uni-tuebingen.de/user/eichmann/Lehre/Gew.Diff-Gleich_2019/).