Lösungen zu Blatt 1

1.1 Addition und Multiplikation

(a) $12 + 27 = 39$ (b) $512 + 307 = 819$ (c) $26 - 53 = -23$ (d) $-13 + 19 = 6$
(e) $1012 - 367 = 645$ (f) $-23 - 28 = -51$ (g) $3 \cdot 7 = 21$ (h) $(-4) \cdot 9 = -36$
(i) $(-5) \cdot (-12) = 60$ (j) $0 \cdot (-7) = 0$ (k) $(6 + 2) \cdot 7 = 8 \cdot 7 = 56$ (l) $6 + 2 \cdot 7 = 6 + 14 = 20.$

1.2 Bruchrechnen

(a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$
(b) $\frac{7}{3} - \frac{12}{5} = \frac{35}{15} - \frac{36}{15} = -\frac{1}{15}$
(c) $6 - \frac{3}{5} = \frac{30}{5} - \frac{3}{5} = \frac{27}{5}$
(d) $-\frac{13}{3} + \frac{1}{9} = \frac{-39}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{38}{9}$
(e) $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{2}$
(f) $\frac{-8}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$
(g) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{-9} = \frac{4}{15}$
(h) $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$
(i) $3 + \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} = 3 + \frac{7}{3} = \frac{9}{3} + \frac{7}{3} = \frac{16}{3}$
(j) $\frac{8}{2} + \frac{9}{3} = 4 + 3 = 7$
(k) $\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} = -\frac{64}{45}$
(l) $\frac{1}{5} + \frac{0}{3} \cdot 6 = \frac{1}{5}$
(m) $\frac{2}{\frac{5}{8}} = \frac{2 \cdot 8}{5} = \frac{16}{5}$
(n) $\frac{\frac{6}{2}}{\frac{3}{7}} = \frac{6 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 7$
(o) $\frac{5}{1+\frac{3}{\frac{2}{3}+\frac{1}{7}}} = \frac{5}{1+\frac{3}{\frac{14+3}{21}}} = \frac{5}{1+\frac{63}{17}} = \frac{5}{\frac{80}{17}} = \frac{17}{16}.$

1.3 Vereinfachen von Termen

(a) $x + 7 \cdot x = 8 \cdot x$

(b) $x - x \cdot 2 - y \cdot (3 + 2) = -x - 5 \cdot y$

(c) $x \cdot 3 \cdot y - y \cdot x - 2 = 2 \cdot x \cdot y - 2$

(d) $\dfrac{x}{5} - \dfrac{7 \cdot x}{2} = \dfrac{2 \cdot x}{10} - \dfrac{35 \cdot x}{10} = -\dfrac{33 \cdot x}{10}$

(e) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{y}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{x}\right) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2 \cdot y}{x} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{2 - 2 \cdot y}{x} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{6 - 6 \cdot y - x \cdot y}{3 \cdot x}$

(f) $\dfrac{3 \cdot x \cdot (x - 2) + 7 \cdot x \cdot x}{2 \cdot x - 3 \cdot x} = \dfrac{3 \cdot x \cdot (x - 2)}{-x} + \dfrac{7 \cdot x \cdot x}{-x} = -3 \cdot (x - 2) - 7 \cdot x = -10 \cdot x + 6$

(g) $\dfrac{x - y}{x \cdot y} + \dfrac{y - x}{y \cdot x} + 42 = 42 + \dfrac{x - y + y - x}{x \cdot y} = 42$

(h) $\dfrac{1}{3} \cdot x + \dfrac{4}{2} \cdot x - \dfrac{2 \cdot y}{(y - 3 \cdot y)} = \dfrac{x + 6 \cdot x}{3} - \dfrac{2 \cdot y}{-2 \cdot y} = \dfrac{7}{3} \cdot x + 1$

1.4 Lösen von Gleichungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

(a)

$$5 \cdot x + 1 = 7 \;\Leftrightarrow\; 5 \cdot x = 6 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{6}{5}$$

(b)

$$\frac{6}{x} + \frac{1}{2} = -7 \Leftrightarrow 6 = \frac{-15 \cdot x}{2} \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{6}{\frac{15}{2}} = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

(c)

$$\frac{x-8}{x+1}=9 \Leftrightarrow x-8=9\cdot(x+1)=9\cdot x+9 \;\Leftrightarrow\; -17=8\cdot x \;\Leftrightarrow\; x=-\frac{17}{8}$$

(d)

$$\frac{x}{y}+5=\frac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; 2\cdot x+10\cdot y=x\cdot y \;\Leftrightarrow\; x\cdot(2-y)=(-10)\cdot y \;\Leftrightarrow\; x=-\frac{10\cdot y}{2-y}$$

(e)

$$\begin{aligned} a\cdot y+\frac{5\cdot x}{x+b}=4\cdot a \;&\Leftrightarrow\; a\cdot y\cdot(x+b)+5\cdot x=4\cdot a\cdot(x+b)\\ \Leftrightarrow & a\cdot y\cdot x+a\cdot y\cdot b+5\cdot x=4\cdot a\cdot x+4\cdot a\cdot b\\ \Leftrightarrow & x\cdot(a\cdot y-4\cdot a+5)=4\cdot a\cdot b-a\cdot y\cdot b\\ \Leftrightarrow & x=\frac{4\cdot a\cdot b-a\cdot y\cdot b}{a\cdot y-4\cdot a+5}\end{aligned}$$

Dies ist aber für $a\cdot y-4\cdot a+5=0$ unzulässig. In dem Fall gilt

$$\frac{5\cdot x}{x+b}=4\cdot a-a\cdot y=5 \;\Leftrightarrow\; x=x+b$$

Dies kann also nur korrekt sein, falls $b=0$ ist. In dem Fall darf $x\neq 0$ dann beliebig sein.

(f)

$$2\cdot x-a=2 \;\Leftrightarrow\; a=2\cdot x-2$$

(g)

$$7-\frac{y}{a}-\frac{x}{2\cdot a}=1 \;\Leftrightarrow\; 7\cdot a-y-\frac{x}{2}=a \;\Leftrightarrow\; 6\cdot a=y+\frac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; a=\frac{y}{6}+\frac{x}{12}$$

(h)

$$\frac{2\cdot x-3}{x+a}=8 \;\Leftrightarrow\; 2\cdot x-3=8\cdot x+8\cdot a \;\Leftrightarrow\; 8\cdot a=-6\cdot x-3 \;\Leftrightarrow\; a=-\frac{3}{4}\cdot x-\frac{3}{8}$$

1.5 Knobelaufgaben

(a) Wandeln Sie die Dezimalzahlen $0,25$ und $0,123$ in Brüche um:
Die zentrale Beobachtung (die wir ähnlich so auch bei (b) nutzen werden) ist hier wie folgt:

$$\frac{1}{10}=0,1 \quad \frac{1}{100}=0,01 \quad \frac{1}{1000}=0,001\ldots$$

D.h. wir bekommen so Zugriff auf eine von uns gewünschte Nachkommastelle. Wir stellen nun $0,25$ dafür passend da:

$$0,25=2\cdot 0,1+5\cdot 0,01$$

Also erhalten wir mit obiger Beobachtung:

$$0,25=2\frac{1}{10}+5\frac{1}{100}=\frac{20}{100}+\frac{5}{100}=\frac{25}{100}=\frac{5}{20}.$$

Genauso gehen wir nun mit $0,123$ vor:

$$0,123=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{100}+3\frac{1}{1000}=\frac{100+20+3}{1000}=\frac{123}{1000}.$$

(b) Finden Sie einen Bruch, welcher die Dezimalzahl $0,535353...$ repräsentiert:
Wir versuchen zuerst Zugriff auf möglichst einfache periodische Zahlen zu bekommen. Z.B. $0,111111\ldots$ ist als Bruch

$$0,111\ldots = \frac{1}{9}.$$

Was passiert nun, wenn wir mehr 9 im Nenner spendieren?

$$\frac{1}{99} = 0,01010101\ldots.$$

Auf diese Weise erhalten wir schon einmal Zugriff auf die jeweils geraden Stellen der Nachkommazahl, d.h. hier der 3. Die andere Stelle bekommen wir in den Griff, indem wir $0,01010101\ldots$ mit 10 multiplizieren und so die Einsen um eine Stelle nach links shiften:

$$10 \cdot \frac{1}{99} = 0,10101010\ldots.$$

Also können wir schreiben

$$0,53535353\ldots = 5 \cdot 0,10101010\ldots + 3\ldots 0,01010101\ldots = \frac{5 \cdot 10}{99} + \frac{3}{99} = \frac{53}{99}$$

(c) Verallgemeinern Sie Ihr Verfahren aus Aufgabe (b) zu beliebigen Dezimalzahlen, dessen Nachkommastellen sich wiederholen: Sei die Zahl die wir darstellen wollen $0,a_1a_2\ldots a_na_1a_2\ldots a_n\ldots$ D.h. gegeben durch die natürlichen Zahlen $a_1,\ldots,a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, die sich periodisch in der Kommadarstellung wiederholen. Nennen wir $a = a_1a_2\ldots a_n$, die Zahl, welche entsteht wenn wir die Ziffern einfach hintereinanderweg schreiben (ist hier keine(!) Multiplikation). Schauen wir genauer auf die Idee aus (b), so ist das Verfahren wie folgt:

$$0,a_1a_2\ldots a_na_1a_2\ldots a_n\ldots = \frac{a}{99\ldots 9}$$

mit genau n Neunen im Nenner.