Lösungen zu Blatt 2

2.1 Summenzeichen und Produktzeichen

(a) $1+2+3+\ldots+17=\sum_{i=1}^{17} i$

(b) $0+2+4+6+\ldots+24=\sum_{i=0}^{12} 2\cdot i$

(c) $6+7+9+10+12+13+\ldots+36+37=$
$\sum_{i=2}^{12} 3\cdot i+3\cdot i+1=\sum_{i=2}^{12} 6\cdot i+1$

(d) $1+3+5+\ldots+2k+1=\sum_{i=0}^{k} 2\cdot i+1$

(e) $2\cdot x+4\cdot x+6\cdot x+\ldots+42\cdot x=x\cdot\sum_{i=1}^{21} 2\cdot i$

(f) $1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot 45=\prod_{i=0}^{11}(4\cdot i+1)$

(g) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{27}}=\sum_{i=1}^{27}\frac{1}{3^i}$

(h) $2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot\ldots\cdot n=\prod_{i=0}^{\frac{n-2}{3}} 3\cdot i+2$

(i) $\sum_{j=1}^{4} 52^j=52+52^2+52^3+52^4$

(j) $\sum_{k=-10}^{0} k^2=(-10)^2+(-9)^2+\ldots+(-1)^2+0^2$

(k) $\prod_{k=2}^{n} k^2=2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot n^2$

(l) $\prod_{m=20}^{n}\frac{n}{m}=\frac{n^{n-20}}{20\cdot 21\cdot\ldots\cdot n}$

(m) $\sum_{i=1}^{j}\frac{j}{x\cdot i}=j\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2\cdot x}+\ldots+\frac{1}{j\cdot x}\right)$

(n) Verschieben Sie den Startindex der folgenden Summe auf 7: $\sum_{i=1}^{n} i^2=\sum_{i=7}^{n+6}(i-6)^2$

2.2 Ausmultiplizeren

(a) $(x-2)\cdot(x-1)=x^2-x-2\cdot x+2=x^2-3\cdot x-2$

(b) $(x-y)^2\cdot(x+1)=(x-y)^2\cdot x+(x-y)^2=x\cdot(x^2-2\cdot y\cdot x+y^2)+x^2-2\cdot x\cdot y+y^2$
$=x^3-2\cdot x^2\cdot y+x\cdot y^2+x^2-2\cdot x\cdot y+y^2$

(c) $(x-a)^2\cdot(x^2-x+1)=x^2\cdot(x^2-2\cdot x\cdot a+a^2)-x\cdot(x^2-2\cdot x\cdot a+a^2)+(x^2-2\cdot x\cdot a+a^2)$
$=x^4-2\cdot x^3\cdot a+x^2\cdot a^2-x^3+2\cdot x^2\cdot a+x\cdot a^2+x^2-2\cdot x\cdot a+a^2$

(d) $(f-j^2)^2=f^2-2\cdot f\cdot j^2+j^4$

(e) $\left(\frac{1}{2}\cdot y^2-\frac{3}{x}\right)\cdot\left(x^2+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2}y^2\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot y-3\cdot x-\frac{3}{x\cdot y}$

(f) $(x^3-a^1)\cdot\left(m^2-\frac{1}{42}\right)=x^3\cdot m^2-\frac{x^3}{42}-a\cdot m^2+\frac{a}{42}$

(g) $(a+b)^3=(a+b)\cdot(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2)=a^3+2\cdot a^2\cdot b+a\cdot b^2+b\cdot a^2+2\cdot a\cdot b^2+b^3$
$=a^3+3\cdot a\cdot b^2+3\cdot a^2\cdot b+b^3$

(h) $(a-b)^3=(a-b)\cdot(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2)=a^3-2\cdot a^2\cdot b+a\cdot b^2-b\cdot a^2+2\cdot a\cdot b^2-b^3$
$=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3$

(i) $(a+b)^4=(a+b)\cdot(a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3)$
$=a^4+3\cdot a^3\cdot b+3\cdot a^2\cdot b^2+a\cdot b^3+b\cdot a^3+3\cdot a^2\cdot b^2+3\cdot a\cdot b^3+b^4$
$=a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4$

2.3 Wurzeln und Potenzen

(a) $\sqrt{49}=7$ (b) $81^{\frac{1}{4}}=3$ (c) $196^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{14}$ (d) $(-27)^{\frac{1}{3}}=-3$ (e) $144^{\frac{3}{2}}=12^3=1728$

(f) $\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

(g) $\frac{\sqrt{8}}{2+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{8}(2-\sqrt{7})}{4-7}=\frac{\sqrt{56}-2\cdot\sqrt{8}}{3}$

(h) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x-1}}{x-1}$

(i) $\frac{x^2+2\cdot x+y}{3-\sqrt{42-y+x^2}}=\frac{(x^2+2\cdot x+y)(3+\sqrt{42-y+x^2})}{9-42+y-x^2}=\frac{(x^2+2\cdot x+y)(3+\sqrt{42-y+x^2})}{-x^2-31+y}$

(j) $x^2\cdot y^2=(x\cdot y)^2$

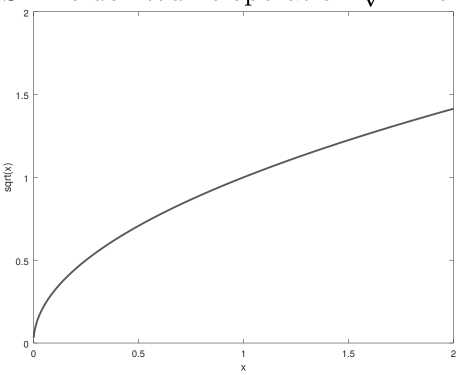
(k) $x^2\cdot x^{\frac{7}{2}}\cdot y=x^{2+\frac{7}{2}}\cdot y=x^{\frac{11}{2}}\cdot y$

(l) $a^{-\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot x^7=a^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}\cdot x^7=a^{-\frac{1}{4}}\cdot x^7$

(m) $(a\cdot x)^{27}\cdot a^2=a^{29}\cdot x^{27}$

(n) Fertigen Sie eine

Skizze der Wurzeloperation $\sqrt{\cdot}$ in einem kartesischen Koordinatensystem an:



2.4 Quadratische Gleichungen

Wir nutzen hier die *pq*-Formel:

(a) $x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = 1$

(b) $2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + \frac{1}{2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

(c) $x^2 - \frac{2}{5} \cdot x + 20 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} - 20} = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1-500}{25}} = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{-499}{25}}$

Wert in Wurzel negativ, also existiert keine Lösung

(d) $x^4 - x^2 - 6 = 0$ setze $z := x^2 \;\Rightarrow\; z^2 - z - 6 = 0 \;\Rightarrow\; z_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\Rightarrow\; z_1 = -\frac{4}{2} = -2,\; z_2 = 3 \;\Rightarrow\; x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -\sqrt{3}$, die Wurzeln aus z_1 existieren nicht.

(e) $x^2 + 2 \cdot x - a \cdot x = 2 \cdot a \;\Rightarrow\; x^2 + (2-a) \cdot x - 2 \cdot a \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \frac{a-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-2)^2}{4} + 2 \cdot a}$

$= \frac{a-2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4 \cdot a + 4 + 8 \cdot a}{4}} = \frac{a-2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 + 4 \cdot a + 4}{4}} = \frac{a-2}{2} \pm \frac{\sqrt{(a+2)^2}}{2}$

$= \frac{a-2}{2} \pm \frac{a+2}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = a$ und $x_2 = -2$

(f) $x^2 + 4 \cdot x + a^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - a^2 - 4} = -2 \pm \sqrt{-a^2}$,

reelle Lösung nur bei $a = 0$, dann gilt $x_{1/2} = -2$.

(g) $x^3 - x^2 - 2 \cdot x = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ oder $x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow\; x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\Rightarrow\; x_1 = 0$ und $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$.

2.5 Knobelaufgabe

Seien x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung. Wir betrachten

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - x \cdot x_2 - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2.$$

$x^2 + p \cdot x + q$ kann in zwei Linearfaktoren zerlegt werden, welche genau $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ sind, denn der Term höchster Ordnung besitzt eine 1 als Vorfaktor und die Nullstellen sind diesselben. Also gilt

$$x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2.$$

für alle reelle x. Mithilfe eines Koeffizientenvergleichs gilt damit

$$p = -x_1 - x_2, \quad \text{und} \quad q = x_1 \cdot x_2.$$