Lösungen zu Blatt 3

3.1 Logarithmen berechnen

(a) $\log_2 16 = 4$	(b) $\log_3 27 = 3$	(c) $\log_8 2 = \frac{1}{\log_2 8} = \frac{1}{3}$
(d) $\log_{213} 1 = 0$	(e) $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 1 - \log_3 9 = -2$	(f) $\log_{\frac{1}{4}} 2 = -\frac{1}{2}$
(g) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$	(h) $\log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \log_4 2 = \frac{1}{4}$	(i) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 27 = \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2}$
(j) $\log_3 \frac{3^{\frac{2}{9}}}{27} =$	$\log_3 3^{\frac{2}{9}} - \log_3 27 = \frac{2}{9} \cdot \log_3 3 - 3$	$= \frac{2}{9} - 3 = -\frac{25}{9}$

3.2 Gleichungen lösen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

(a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2\cdot x} = 5 \;\Leftrightarrow\; \log_{\frac{3}{2}} 5 = 2 \cdot x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{3}{2}} 5$

(b) $3^{2\cdot x} + 6 \cdot 3^x = -5$ setze $z = 3^x$, dann gilt $z^2 + 6 \cdot z + 5 = 0$

$\Rightarrow z_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm 2 < 0$ also gibt es keine Lösungen, denn es gilt immer $3^x > 0$

(c) $\log_{(x^2)} 4 = 2 \;\Leftrightarrow\; 4 = (x^2)^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{2}$

(d) $\frac{e^x}{2^{-x}} = \log_2 8 \;\Leftrightarrow\; \log_2 8 = 3 = e^x \cdot 2^x = (2 \cdot e)^x \;\Leftrightarrow\; \log_{2\cdot e} 3 = x$

(e) $2 \cdot e^x + 3 = \frac{2}{e^x} \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot e^{2\cdot x} + 3 \cdot e^x - 2 = 0$ setze $z = e^x$

$\Leftrightarrow 2 \cdot z^2 + 3 \cdot z - 2 = 0 \;\Rightarrow\; z_{1/2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$ Lösung ist positiv

$\Rightarrow z = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \ln \frac{1}{2}$

(f) $\log_2 x + \log_2(4 \cdot x) = 4 \;\Leftrightarrow\; \log_2(4 \cdot x^2) = 4 \;\Leftrightarrow\; 2^4 = 4 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; x = 2$

denn negative x können im Logarithmus nicht ausgewertet werden

(g) $\ln \frac{y}{2 \cdot x} = e^y \;\Leftrightarrow\; \ln y - \ln(2 \cdot x) = e^y \;\Rightarrow\; 2 \cdot x = e^{-e^y + \ln(y)} = \frac{y}{e^{(e^y)}} \;\Leftrightarrow x = \frac{y}{2 \cdot e^{(e^y)}}$

(h) $\frac{3}{\log_2 x} - 7 = y \;\Leftrightarrow\; \log_2 x = \frac{3}{y+7} \;\Leftrightarrow\; x = 2^{\frac{3}{y+7}}$

3.3 Ungleichungszeichen im Beispiel

(a) $2 \;<\; 4$	(b) $\log_3 2 \;<\; 1$	(c) $(x-1)^2 \;\geq\; 0$	(d) $\frac{2}{3} \;<\; \frac{7}{8}$
(e) $x^2 + 2 \cdot x \;\geq\; -4$ (bin. Formel)	(f) $\sqrt{7} \;<\; \sqrt{42}$	(g) $3^{\frac{1}{2}} \;<\; \frac{9}{5}$ $(\frac{9^2}{5^2} = \frac{81}{25} > 3)$	(h) $\log_{\frac{1}{2}} 7 \;<\; 5$

3.4 Ungleichungen lösen

Welche reellen x erfüllen die folgenden Ungleichungen?

(a) $2^x < 3^{x-10} = 3^x \cdot 3^{-10} \;\Leftrightarrow\; \frac{2^x}{3^x} < \frac{1}{3^{10}} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{1}{3^{10}} \;\Leftrightarrow\; x > \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3^{10}}$

Man beachte im letzten Schritt, dass $x \mapsto \log_{\frac{2}{3}}$ streng monoton fallend ist.

(b) $\log_3(x+y) > e^y \;\Leftrightarrow\; x+y > 3^{(e^y)} \;\Leftrightarrow\; x > 3^{(e^y)} - y.$

(c) $|x-1| > 2$ Fallunterscheidung: Sei zuerst $x - 1 \geq 0$, d.h. $x \geq 1$. Dann gilt

$|x-1| = x - 1 > 2 \;\Leftrightarrow\; x > 3$

Anderer Fall: $x - 1 < 0$ d.h. $x < 1$. Dann gilt

$|x-1| = -(x-1) > 2 \;\Leftrightarrow\; 1 - x > 2 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2 = -1 > x$

Zusammengefasst: $x < -1$ oder $x > 3$.

3.5 Knobelaufgaben

(a) Überlegen Sie sich, dass die folgende Aussage korrekt ist: Für alle reellen x, y gilt

$$x \cdot y \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}:$$

Die Schwierigkeit ist der Start des Beweises. Die Idee ist sich den Term $(x-y)^2$ anzuschauen. Dieser ist nichtnegativ, also erhalten wir mit der zweiten binomischen Formel:

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot x \cdot y \leq x^2 + y^2 \;\Leftrightarrow\; x \cdot y \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

(b) Verschärfen Sie die Aussage aus (b) zur Young'schen Ungleichung: Für alle reellen x, y und alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$x \cdot y \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \cdot y^2:$$

Die Idee ist grundsätzlich diesselbe. Wir starten nur mit dem Term $(\delta \cdot x - \frac{y}{\delta})^2$. Dann bekommen wir wieder mit der zweiten binomischen Formel

$$0 \leq \left(\delta \cdot x - \frac{y}{\delta}\right)^2 = x^2 \cdot \delta^2 - 2 \cdot \delta \cdot x \cdot \frac{1}{\delta} \cdot y + \frac{1}{\delta^2} \cdot y^2$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot x \cdot y \leq x^2\delta^2 + \frac{y^2}{\delta^2} \;\Leftrightarrow\; x \cdot y \leq \frac{\delta^2}{2} \cdot x^2 + \frac{y^2}{2 \cdot \delta^2}.$$

δ ist bei dieser Rechnung eine beliebige reelle Zahl ungleich 0. Da $\varepsilon > 0$ ist, können wir δ nun so wählen, dass $\delta^2 = \varepsilon$. Damit erhalten wir

$$x \cdot y \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \cdot y^2:$$