Lösungen zu Blatt 4

Die folgenden Aufgaben sind so konzipiert, dass sie ohne einen Taschenrechner gelöst werden können.

4.1 Teilmengenbeziehungen

(a) $\{2,3,5\} \subset \{1,2,4,3,5,8\}$ (b) $\{x \in \mathbb{N} |\ x \text{ gerade }\} \supset \{x \in \mathbb{N} |\ x = 4 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$
(c) $[2,3] \neq (2,4]$ (d) $\{x \in \mathbb{R} |\ x = y^2, y \in \mathbb{R}\} \supset (0,\infty)$
(e) $\{r \in \mathbb{Q} | 0 < r \leq 1\} \subset (0,1]$ (f) $\{z \in \mathbb{Z} |\ z > 0\} = \mathbb{N}$.
Diskutiert bei (f) bitte ob die 0 eine natürliche Zahl ist, oder nicht. Laut DIN-Norm 5473 ist sie eine, aber dies ist in der mathematischen Literatur trotzdem nicht einheitlich geregelt. Im Skript ist die 0 keine natürliche Zahl, deswegen oben die Gleichheit.
Die Antwort darauf ist eher von philosophischer Natur, d.h. da gibt es kein falsch oder richtig. Es ist Konvention, auf die man sich einigen muss.

4.2 Mengenoperationen

Berechnen sie die folgenden Mengen:
(a) $\{2,5\} \cup \{8,2,9\} = \{2,5,8,9\}$ (b) $\{x \in \mathbb{Q} |\ x < 0\} \cup \{z \in \mathbb{Q} |\ z \geq 0\} = \mathbb{Q}$
(c) $[2,5] \cup (3,10] = [2,10]$ (d) $\{2,3\} \cap \{1,3\} = \{3\}$
(e) $(0,2) \cap [\sqrt{2}, \sqrt{4}] = [\sqrt{2}, 2)$ (f) $(\frac{4}{5}, \frac{8}{9}) \cap (\frac{1}{2}, \frac{8}{7}) = (\frac{4}{5}, \frac{8}{9})$
(g) $\{3,7,9\} \setminus \{1,4,7\} = \{3,9\}$ (h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = x^2\} \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = \mathbb{R}^2$
(i) $[\log_2(8), 3] \setminus \{3\} = \emptyset$ ($\log_2 8 = 3$) (j) $[\log_3 2, \frac{7}{5}) \setminus (\frac{1}{2}, \log_4 16) = \emptyset$ ($3^{\frac{1}{2}} < 2$, also $\log_3 2 > \frac{1}{2}$)
(k) $[0,1]^c = \{x \in \mathbb{R} |\ x < 0 \text{ oder } x > 1\}$

4.3 Lösungsmengen

Berechnen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Gleichungen/Ungleichungen lösen:

(a) $\frac{x^2}{5} + 2 \cdot x = -5$: Stellen wir um, so können wir die *pq*-Formel benutzen:

$$x^2 + 10 \cdot x + 25 = 0 \ \Leftrightarrow \ x_{1/2} = -5 \pm \sqrt{5^2 - 25} = -5$$

Also ist die Lösungsmenge $\{-5\}$.

(b) $x^2 + \frac{2}{3} \leq \frac{1}{4}$. Auch hier können wir wieder umstellen und erhalten

$$x^2 \leq \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3-8}{12} = -\frac{5}{12} < 0.$$

Da für reelle x, das zugehörige Quadrat nichtnegativ ist, so ist auch diese Lösungsmenge leer, d.h. $= \emptyset$.

(c) $2^x \geq \frac{1}{2}$. Hier benutzen wir $\log_2(\cdot)$ auf beiden Seiten. Das Relationszeichen $\geq$ dreht sich dabei nicht um und wir erhalten

$$x \geq \log_2 \frac{1}{2} = -\log_2 2 = -1,$$

also ist die Lösungsmenge

$$\{x \in \mathbb{R} |\ x \geq -1\}.$$

(d) $(x-2)\cdot(5-x) \leq 0$: Hier müssen wir entscheiden, wann das Produkt zweier Faktoren nichtpostiv ist. Dies klären wir über die Vorzeichen der einzelnen Faktoren. Dazu stellen wir fest, dass

$$x-2\begin{cases} \leq 0, & \text{für } x \leq 2 \\ \geq 0, & \text{für } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{und } 5-x\begin{cases} \leq 0, & \text{für } x \geq 5 \\ \geq 0, & \text{für } x \leq 5. \end{cases}$$

Wenn die Faktoren in einem Bereich unterschiedliche Vorzeichen besitzen, so wird die ursprüngliche Ungleichung erfüllt, d.h. die Lösungsmenge ist

$$\{x \in \mathbb{R} | \; x \leq 2 \text{ oder } x \geq 5\}.$$

(e) $|x-3|^2 \geq 9$: Wir ziehen auf beiden Seite die Wurzel und erhalten äquivalent (da hier ein Betrag steht)

$$|x-3| \geq 3$$

Nun unterscheiden wir die Fälle, in denen $x-3$ sein Vorzeichen wechselt, d.h. genau bei 3.
Fall $x \leq 3$: Wir erhalten $x-3 \leq 0$, also $|x-3| = -(x-3) = 3-x$. Also gilt dort

$$3-x = |x-3| \geq 3 \;\Leftrightarrow\; 0 \geq x.$$

Fall $x \geq 3$: Hier erhalten wir $x-3 \geq 0$, also $|x-3| = x-3$. Also gilt hier

$$x-3 = |x-3| \geq 3 \;\Leftrightarrow\; x \geq 6.$$

Die Lösungsmenge ist also insgesamt

$$\{x \in \mathbb{R} | \; x \leq 0 \text{ oder } x \geq 6\}.$$

(f) $\log_y(x^2) = \frac{2}{7}$: Das $y \in \mathbb{R}$ ist hier als gegebener Parameter zu verstehen. Damit der Logarithmus Sinn ergibt, muss gelten $y > 0$. Wir stellen um und erhalten

$$x^2 = y^{\frac{2}{7}} \;\Leftrightarrow\; x = \pm y^{\frac{1}{7}}.$$

Die Lösungsmenge ist also

$$\{x \in \mathbb{R} | \; x = y^{\frac{1}{7}} \text{ oder } x = -y^{\frac{1}{7}}\}.$$

(g) $2^{2\cdot x} - 2^x \leq 12$: Wir formen um und führen die Variable $z = 2^x$ ein. Dann gilt

$$z^2 - z - 12 \leq 0.$$

Zerlegen wir die linke Seite in lineare Terme mithilfe der *pq*-Formel, d.h. die Nullstellen der linken Seite sind

$$z_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+48}{4}} = \frac{1 \pm 7}{2}.$$

Also gilt

$$0 \geq z^2 - z - 12 = (z+3)\cdot(z-4)$$

Nun arbeiten wir wie in (d) und erhalten, dass für z gelten muss $-3 \leq z \leq 4$. Weiter gilt nun $z = 2^x$ und diese Gleichung kann nur für positive z korrekt sein. Also gilt

$$x \in (-\infty, \log_2 4] = (-\infty, 2]$$

.

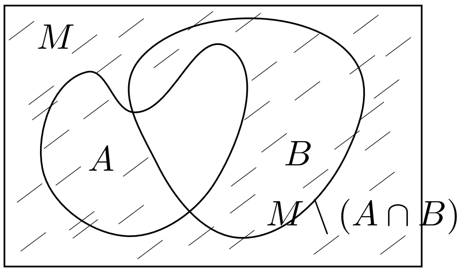

Abbildung 1: Mengendiagramm für De'Morgansche Regel.

4.4 Mengendiagramm zeichnen

Skizzieren Sie die folgenden beiden Mengen wobei gelten soll $A, B \subset M$.

$$\text{(i) } M \setminus (A \cap B), \quad \text{(ii) } (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Mengen?

Beide Mengen sind gleich. Dies ist eine de sogenannten De'Morganschen Regeln. Bild 1 zeigt eine Skizze der Situation

4.5 Knobelaufgaben

Definieren Sie für zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ eine Addition, d.h.

$$A + B :=?,$$

sodass für alle Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ gilt $A + \{0\} = A$. Skizzieren Sie Ihre Operation in einem Beispiel.

Eine einfache Möglichkeit wäre die Operation mit $A+B := A$ zu definieren. Dies hätte die gewünschte Eigenschaft, dann ist aber diese aber z.B. nicht mehr kommutativ. Es würde z.B. gelten $\emptyset + A = \emptyset$ und $A + \emptyset = A$.

Die normale Version wäre nach Minkowski. Dies wird elementweise definiert, genauer

$$A + B := \{a + b \in \mathbb{R} | a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

D.h. ich nehme alle möglichen Summen, wobei der erste Summand aus A und der zweite aus B stammt. Falls $B = \{0\}$, so gilt demnach direkt per Definition $A + \{0\} = A$ Machen wir ein Beispiel: $A := [0, 1]$ und $B := [5, 7]$. Dann gilt

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} | x = a + b,\ a \in [0, 1] \text{ und } b \in [5, 7]\} = [5, 8].$$

2 gibt eine Skizze der Situation.

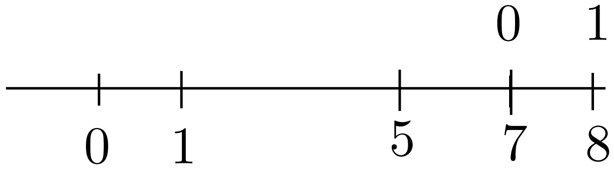

Abbildung 2: Beispiel für Minkwoski-Summe.