# Übungen zum Vorkurs
# Blatt 5

Die folgenden Aufgaben sind so konzipiert, dass sie ohne einen Taschenrechner gelöst werden können.

## 5.1 Wohldefiniertheit von Abbildungen

Entscheiden Sie welche der folgenden Abbildungen wohldefiniert sind:
(a) $i : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$. (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4$
(c) $h : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ a \mapsto$ Lösung von $x^2 - a = 0$ (d) $g : (0,\infty) \to [0,1],\ g(x) = \frac{1}{x}$
(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$
Bestimmen Sie den maximal möglichen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ der folgenden Abbildungen:
(f) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ (g) $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (h) $j(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
(i) $x(y) = \frac{1}{y} \cdot \log_2 y$ (j) $y(v) = v^2 + \frac{(v-2)^2}{2-v}$.
Berechnen Sie den minimalen Wertebereich der folgenden Abbildungen, d.h. ersetzen Sie $\square$ in den folgenden Abbildungsdefinitionen mit einer möglichst kleinen reellen Menge:
(k) $f : [0,1] \to \square,\ x \mapsto x^2$ (l) $c : \{0,1,2,3,4\} \to \square,\ c(v) = 2 + v$ (m) $u : (0, \frac{\pi}{2}) \to \square,\ u(x) = \tan(x)$.

## 5.2 Graphen

Skizzieren Sie Graphen zu den folgenden Abbildungen
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)$ (b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x^2 + 2 \cdot x + 1$ (c) $g : (0,\infty),\ x \mapsto \log_2 \frac{1}{x}$
Skizzieren Sie den Graphen der inversen Abbildung der folgenden gegeben Abbildungen
(d) $f : [0,\pi] \to [-1,1],\ x \mapsto \cos(x)$ (e) $j : (0,\infty) \to (2,\infty),\ j(x) = 2 + x^2$

## 5.3 Nullstellen und andere Schnittpunkte

Berechnen Sie alle Nullstellen der folgenden Abbildungen
(a) $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = -1 + \log_{x+1} 2$ (b) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r(x) = 7 \cdot e^x - 12 - e^{2\cdot x}$
(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x \cdot \frac{x+5}{x^2+1}$ (d) $q : \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R},\ q(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$
Berechnen Sie eine der Schnittstellen von $f$ und $g$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2 \cdot x$.

(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-1}{x},\ g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ g(x) = -\frac{2\cdot x}{x+1}$

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - 1,\ g : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \log_2(x)$

## 5.4 Knobelaufgaben

(a) Überlegen Sie sich, dass folgende Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ korrekt ist

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1.$$

(b) Sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = a > 0$. Weiter soll für alle $t, s \in \mathbb{Q}$ gelten, dass $f(t+s) = f(t) \cdot f(s)$. Überlegen Sie sich, dass dann für alle $t \in \mathbb{Q}$ gelten muss $f(t) = a^t$.

---

*Die Aufgaben finden Sie unter*
*https://www.math.uni-tuebingen.de/user/eichmann/Lehre/Vorkurs_21_22/.*