Lösung zu Blatt 5

Die folgenden Aufgaben sind so konzipiert, dass sie ohne einen Taschenrechner gelöst werden können.

5.1 Wohldefiniertheit von Abbildungen

Entscheiden Sie welche der folgenden Abbildungen wohldefiniert sind:

(a) $i : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$: wohldefiniert

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4$: wohldefiniert

(c) $h : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ a \mapsto$ Lösung von $x^2 - a = 0$: nicht wohldefiniert, unklar ob $\sqrt{a}$ oder $-\sqrt{a}$ herauskomm

(d) $g : (0,\infty) \to [0,1],\ g(x) = \frac{1}{x}$: nicht wohldefiniert, $g(\frac{1}{2}) = 2 \notin [0,1]$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$: nicht wohldefiniert, $-2 \in \mathbb{R}$ kann z.B. nicht verarbeitet werden.

Bestimmen Sie den maximal möglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der folgenden Abbildungen:

(f) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $D = [0,\infty)$, da Quadratwurzeln nicht aus negativen Zahlen gezogen werden können

(g) $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Nullstelle im Nenner muss vermieden werden

(h) $j(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{z \cdot \pi + \frac{\pi}{2} |\ z \in \mathbb{Z}\}$, Nullstelle im Nenner, d.h. $\cos(x) = 0$ wird so vermieden

(i) $x(y) = \frac{1}{y} \cdot \log_2 y$, $D = (0,\infty)$, Logarithmen können nur von postiven Zahlen berechnet werden.

(j) $y(v) = v^2 + \frac{(v-2)^2}{2-v}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, Nullstelle im Nenner wird vermieden.

Berechnen Sie den minimalen Wertebereich der folgenden Abbildungen, d.h. ersetzen Sie $\square$ in den folgenden Abbildungsdefinitionen mit einer möglichst kleinen reellen Menge:

(k) $f : [0,1] \to \square,\ x \mapsto x^2$, $\square = [0,1]$, da f stetig ist, dort monoton steigend, $f(0) = 0$, sowie $f(1) = 1$.

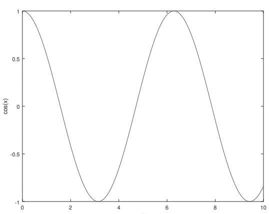
(l) $c : \{0,1,2,3,4\} \to \square,\ c(v) = 2 + v$, $\square = \{2,3,4,5,6\}$, jedes Element wurde verarbeitet.

(m) $u : (0,\frac{\pi}{2}) \to \square,\ u(x) = \tan(x)$, $\square = (0,\infty)$, da $\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$ und u stetig ist.

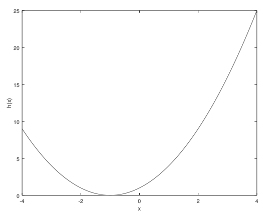
5.2 Graphen

Skizzieren Sie Graphen zu den folgenden Abbildungen

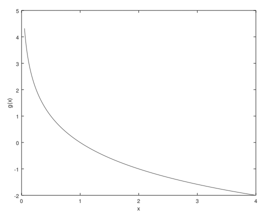
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)$ (b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x^2 + 2 \cdot x + 1$ (c) $g : (0,\infty),\ x \mapsto \log_2 \frac{1}{x}$



(a)



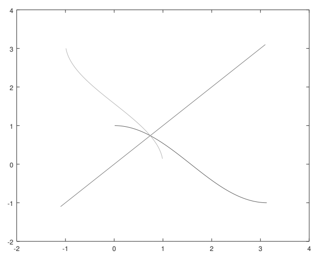
(b)



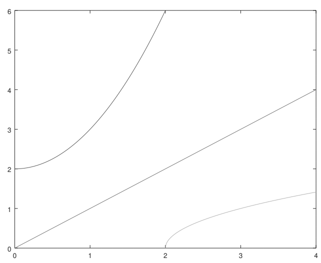
(c)

Skizzieren Sie den Graphen der inversen Abbildung der folgenden gegeben Abbildungen

(d) $f : [0,\pi] \to [-1,1],\ x \mapsto \cos(x)$ (e) $j : (0,\infty) \to (2,\infty),\ j(x) = 2 + x^2$



(d)



(e)

5.3 Nullstellen und andere Schnittpunkte

Berechnen Sie alle Nullstellen der folgenden Abbildungen

(a) $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = -1 + \log_{x+1} 2,$ setze $f(x) = 0,$ dann gilt $1 = \log_{x+1} 2$
also $(x+1)^1 = 2 \;\Leftrightarrow\; x = 1.$

(b) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r(x) = 7 \cdot e^x - 12 - e^{2\cdot x},$ setze $r(x) = 0,$ dann gilt $0 = 7 \cdot e^x - 12 - e^{2\cdot x}$
setze $z = e^x$ und erhalte $0 = z^2 - 7 \cdot z + 12,$ mit pq-Formel gilt

$$z_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-48}{4}} = \frac{7 \pm 1}{2}, \text{ also } e^{x_{1/2}} = 4 \text{ oder } = 3$$

Ergebnis ist also $x_1 = \ln(4)$ und $x_2 = \ln(3)$.

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x \cdot \dfrac{x+5}{x^2+1},$ also $0 = x \cdot \dfrac{x+5}{x^2+1} \;\Leftrightarrow\; 0 = x \cdot (x+5), \;\Rightarrow\; x_1 = 0$ oder $x_2 = -5$

(d) $q : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R},\ q(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+1},$ also $0 = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{x+1+2\cdot x-2}{x^2-1} = \dfrac{3\cdot x-1}{x^2-1}$
also gilt $0 = 3 \cdot x - 1$ und wir erhalten $x = \dfrac{1}{3}$ (O.K. da dies keine Nennernullstelle ist).

Berechnen Sie einen der Schnittstellen von f und g

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2 \cdot x.$
Also betrachten wir die $x \in \mathbb{R}$ für die gilt $f(x) = g(x)$, also $x^2 + 1 = 2 \cdot x$. Umstellen liefert $0 = x^2 - 2 \cdot x + 1 = (x-1)^2$. Demnach ist die Schnittstelle bei $x = 1$.

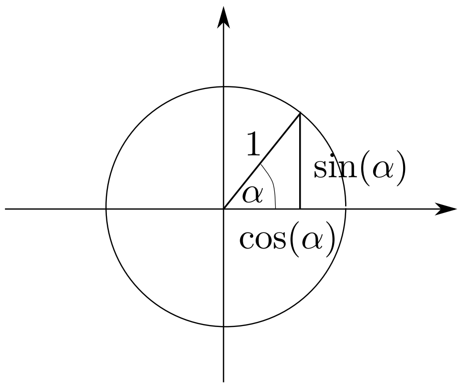
(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-1}{x},\ g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ g(x) = -\frac{2\cdot x}{x+1}.$
$f(x) = g(x), \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = -\frac{2\cdot x}{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 1 = -2 \cdot x^2$, weiteres Umstellen liefert $0 = 3 \cdot x^2 - 1$ also sind die Ergebnisse $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ bzw. $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$.

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - 1,\ g : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \log_2(x)$
Wir haben $x - 1 = \log_2(x)$. Äquivalent ist $2^{x-1} = x$. Mit etwas herumprobieren bekommt man, dass $x = 1$ eine Lösung ist.

5.4 Knobelaufgaben

(a) Überlegen Sie sich, dass folgende Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ korrekt ist

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1.$$



Die Skizze für die Definition von sin und cos ist
Da wir ein rechtwinkliges Dreieck nutzen, können wir den Satz von Pythagoras anwenden. Dabei entsprechen sin und cos geraden den Katheten und wir bekommen $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1^2 = 1$, also die gewünschte Aussage.

(b) Sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = a > 0$. Weiter soll für alle $t, s \in \mathbb{Q}$ gelten, dass $f(t+s) = f(t) \cdot f(s)$. Überlegen Sie sich, dass dann für alle $t \in \mathbb{Q}$ gelten muss $f(t) = a^t$.
Was passiert wenn wir zusätzlich $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig voraussetzen?
Wir starten mit $f(0)$:

$$f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 1.$$

Nun gehen wir zu $t \in \mathbb{N}$. Hier können wir schreiben

$$f(t) = f(\sum_{i=1}^{t} 1) = \prod_{i=1}^{t} f(1) = \prod_{i=1}^{t} a = a^t.$$

Wie kommen wir zu den negativen Zahlen? Wir betrachten zuerst $f(-1)$:

$$1 = f(0) = f(1-1) = f(1) \cdot f(-1) \;\Rightarrow\; f(-1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{a} = a^{-1}.$$

Bei $t \in \mathbb{Z}$ und $t < 0$ können wir nun analog zu den natürlichen Zahlen vorgehen:

$$f(t) = f(\sum_{i=1}^{-t} -1) = \prod_{i=1}^{-t} f(-1) = \prod_{i=1}^{-t} a^{-1} = a^t.$$

Kommen wir nun zu $\frac{1}{t} \in \mathbb{Q}$ mit $t \in \mathbb{N}$:

$$a = f(1) = f(\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{t}) = \prod_{i=1}^{t} f(\frac{1}{t}) = f(\frac{1}{t})^t.$$

Auflösen nach $f(\frac{1}{t})$ liefert

$$a^{\frac{1}{t}} = f(\frac{1}{t}).$$

Da wir wieder $\mathbb{Q} \ni \frac{s}{t} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{t}$ schreiben können falls $s \in \mathbb{N}$, so können wir analog zu oben arbeiten und bekommen

$$f(\frac{s}{t}) = f(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{t}) = \prod_{i=1}^{s} a^{\frac{1}{t}} = a^{\frac{s}{t}}.$$

Wie oben funktioniert das ganze auch wieder für negative s. Damit gilt insgesamt

$$f(x) = a^x$$

für alle $x \in \mathbb{Q}$.
Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zusätzlich stetig ist, können wir damit arbeiten, dass wir alle reellen Zahlen durch rationale Zahlen approximieren können, d.h. es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{q \to x, q \in \mathbb{Q}} q = x.$$

Da f stetig ist, kann Grenzwertbildung und Funktionsauswertung vertauscht werden und wir erhalten

$$f(x) = f(\lim_{q \to x, q \in \mathbb{Q}} q) = \lim_{q \to x, q \in \mathbb{Q}} f(q) = \lim_{q \to x, q \in \mathbb{Q}} a^q = a^x.$$