Lösung zu Blatt 6

Die folgenden Aufgaben sind so konzipiert, dass sie ohne einen Taschenrechner gelöst werden können.

6.1 Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\cdot x^2 - 4\cdot x + 2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\cdot(x^2-2\cdot x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\cdot(x-1)^2}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} 2\cdot\dfrac{x-1}{x+1} = 2\cdot\dfrac{0}{2} = 0.$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5\cdot x^3 + 7\cdot x}{2\cdot x - 10\cdot x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3\cdot(5+\frac{7}{x^2})}{x^4\cdot(\frac{2}{x^3}-10)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{5+\frac{7}{x^2}}{\frac{2}{x^3}-10} = 0\cdot\dfrac{5}{-10} = 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin(x))^2-\sin(x)}{(\sin(x))^2-1}$, setze $z := \sin(x)$, dann gilt mit $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x) = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^2-\sin(x)}{(\sin(x))^2-1} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2-z}{z^2-1} = \lim_{z\to 0}\frac{z\cdot(z-1)}{(z-1)\cdot(z+1)} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{z-1} = 0.$$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log_2(x)+5}{\log_2(x+7)} = \dfrac{\log_2(1)+5}{\log_2(8)} = \dfrac{5}{3}.$

6.2 Stetige Abbildungen

Entscheiden Sie welche der folgenden Abbildungen stetig sind und geben Sie ggfs. alle Unstetigkeitsstellen an:

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$ Ist stetig, denn für $x\neq 0$ ist $x\mapsto x^2$ sowieso stetig

Wir haben weiter $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 = \lim\limits_{x\to 0} -x^2$. Also auch bei $x=0$ stetig.

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1 \\ 5, & x=-1 \end{cases}$ Ist stetig außer in $x=-1$, denn

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x+1} = -2 \neq 5 = f(-1).$$

(c) $f:(0,\pi)\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\cos(x)}, & x\neq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ Ist stetig außer in $x=\dfrac{\pi}{2}$, denn

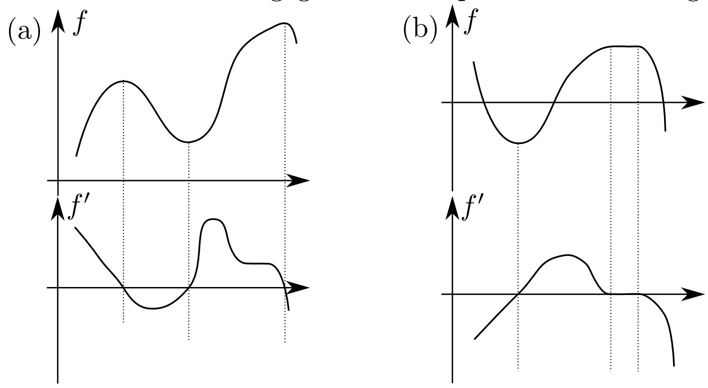
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2},x<\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos(x)} = \infty \neq 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

(d) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \ln(x), & x>0 \\ -\ln(-x), & x<0 \end{cases}$

Ist überall stetig, denn $x=0$ ist nicht im Definitionsbereich.

6.3 Ableitungen und Graphen

Skizzieren Sie zu den gegebenen Graphen die Ableitung.



6.4 Differenzierbarkeit

Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

bei $x_0 = 0$ differenzierbar? Berechnen Sie ggfs. $f'(0)$.
Die Abbildung ist differenzierbar. Dafür schauen wir uns den Differenzenquotienten bei $x_0 = 0$ genauer an:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \pm x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nun gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $|\sin(x)| \leq 1$ und damit auch für alle $x \neq 0$ ebenfalls $|\sin(\frac{1}{x}) \leq 1$. Weiter gilt $\lim_{x\to 0} |x|^{\frac{1}{2}} = 0$. D.h. ein Faktor geht gegen 0, während der andere beschränkt bleibt. Insgesamt geht das Produkt gegen 0, also erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \pm x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

D.h. f ist bei $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

6.5 Knobelaufgabe

Überlegen Sie sich, dass für eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Ausdruck

$$x \mapsto f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

eine gute Näherung von f in der Nähe von x_0 ist. In welcher Größenordung ist der zu erwartende Fehler? Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.
Wegen der Differenzierbarkeit haben wir

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Also ist der Differenzenquotient in der Nähe von x_0 ungefähr die Ableitung. Nennen wir den zugehörigen Fehler $Fehler(x - x_0)$. Dann haben wir also

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + Fehler(x - x_0).$$

Wir wissen über den Fehler nur $\lim_{x\to x_0} Fehler(x - x_0) = 0$. Wir können aber die obige Ungleichung umstellen und erhalten

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + Fehler(x - x_0) \cdot (x - x_0)$$

und damit

$$f(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) + Fehler(x - x_0) \cdot (x - x_0).$$

Hierbei verhält sich der Fehler nun etwas anders. Dieser hat nun folgenden Gestalt

$$Fehler(x - x_0) \cdot (x - x_0).$$

Dieser geht für $x \to x_0$ schneller als linear gegen 0! Die zugehörige Skizze sieht wie folgt aus: