# Lösungen zu Blatt 7

Die folgenden Aufgaben sind so konzipiert, dass sie ohne einen Taschenrechner gelöst werden können.

## 7.1 Ableitungen berechnen

Berechnen Sie die Ableitung für die folgenden Abbildungen

(a) $f(x) = 5 \cdot x^4,\ f'(x) = 5 \cdot 4 \cdot x^3 = 20 \cdot x^3$

(b) $g(y) = y^2 + y^4 + \frac{1}{y},\ g'(y) = 2 \cdot y + 4 \cdot y^3 - \frac{1}{y^2}$

(c) $v \mapsto \ln(v) - e^v + \cos(v)$, Ableitung ist $v \mapsto \frac{1}{v} - e^v - \sin(v)$

(d) $x(j) = e^{\sin(j)}$, Kettenregel: $x'(j) = \cos(j) \cdot e^{\sin(j)}$

(e) $f \mapsto f^2 \cdot \frac{1}{\sin(f)}$ Ableitung ist $f \mapsto \frac{2 \cdot f \cdot \sin(f) - f^2 \cdot \cos(f)}{(\sin(f))^2}$

(f) $f(x) = x \cdot \ln(x),\ f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

(g) $f(x) = \arctan(x)$, Formel über die inverse Funktion:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2},\ \text{denn}$$

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

(h) $f(x) = y^2,\ f'(x) = 0$ da Abbildung nicht von $x$ abhängt

## 7.2 Grenzwerte berechnen

Wir nutzen hier die Regel von de L'Hospital:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{\sin(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \cdot x - 1}{\cos(x)} = \frac{-1}{1} = -1.$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\cos(x) - (x+1)^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{-\sin(x) - 2 \cdot (x+1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x},\ (x^2)^{(3)} = 0$ nach dreimal ableiten verschwindet also der Zähler

also gilt mit L'Hospital 3 mal an angewendet $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x^\alpha)^{(k)}}{(e^x)^{(k)}} = \frac{0}{\infty} = 0.$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{(-1)x^{-2}} = \lim\limits_{x \to 0} -\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} -x = 0$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{\tan(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \cdot x}{1 + (\tan(x))^2} = \frac{0}{1} = 0.$

(f) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^{(z^2)} - 1}{(\sin(x))^2} = \frac{0}{(\sin(x))^2} = 0,$ kein L'Hospital benutzt.

### 7.3 Extremwerte bestimmen

Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen, sowie deren Art, der nachfolgenden Abbildungen:

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^2-2}{x+1},\ f'(x) = \dfrac{2\cdot x}{x+1} - \dfrac{x^2-2}{(x+1)^2} = \dfrac{(2\cdot x)\cdot(x+1) - x^2 + 2}{(x+1)^2}$

Kandidat für Extremum $0 = f'(x) = \dfrac{(2\cdot x)\cdot(x+1) - x^2 + 2}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow\ 0 = 2\cdot x^2 + 2\cdot x - x^2 + 2 = x^2 + 2\cdot x + 2,\ pq-\text{Formel: } x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-2}$

Keine Lösung, also auch keine lokalen Extrema.

(b) $h : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ h(x) = (\ln(x))^2 - 2\cdot\ln(x),\ h'(x) = \dfrac{2\cdot\ln(x)}{x} - \dfrac{2}{x}$

Ansatz $0 = h'(x) = \dfrac{2\cdot\ln(x)}{x} - \dfrac{2}{x}\ \Leftrightarrow\ 2\cdot\ln(x) - 2 = 0\ \Leftrightarrow\ \ln(x) = 1$

$\Leftrightarrow\ x = e^1 = e,$ zweite Ableitung $h''(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2\cdot\ln(x)}{x^2} + \dfrac{2}{x^2}$

$h(e) = \dfrac{2}{e^2} - \dfrac{2}{e^2} + \dfrac{2}{e^2} = \dfrac{2}{e^2} > 0$ also lokales Minimum.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x),$ Ableitung $f'(x) = \cos(x),$ Nullstellen bei $x_E = k\cdot\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

$f''(x) = -\sin(x),\ f''(x_E) = -\sin(x_E) = \begin{cases} 1, & k \text{ gerade} \\ -1, & k \text{ ungerade} \end{cases}$

lokales Minimum bei $x_E = k\cdot\pi + \dfrac{\pi}{2}$ mit $k$ gerade

lokales Maximum bei $x_E = k\cdot\pi + \dfrac{\pi}{2}$ mit $k$ ungerade

### 7.4 Knobelaufgabe

Überlegen Sie sich, dass für alle $x > 0$ gilt

$$x\cdot\ln(x) \geq -\frac{1}{e}.$$

Wir definieren die Abbildung $f(x) = x\cdot\ln(x)$ und berechnen die lokalen Extrema: Dazu zuerst die Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x) + 1 \\ f''(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Nullstellen der ersten Ableitung sind

$$0 = f'(x) = \ln(x) + 1\ \Leftrightarrow\ -1 = \ln(x)\ \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Eingesetzt in die zweite Ableitung

$$f''(\frac{1}{e}) = e > 0,\ \text{also lokales Minimum}$$

Weiter gilt mit L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0 > -\frac{1}{e}$$

und

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Da $f$ stetig ist, gilt also für alle $x > 0$

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}.$$