Lösung zu Blatt 8

Die folgenden Aufgaben sind so konzipiert, dass sie ohne einen Taschenrechner gelöst werden können.

8.1 Stammfunktionen

(a) $\int \frac{1}{3} \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 = \frac{1}{9} \cdot x^3$

(b) $\int x + \sin(x) \, dx = \int x \, dx + \int \sin(x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \cos(x)$

(c) $\int \frac{1}{x^3} \, dx = \int x^{-3} \, dx = \frac{1}{-2} \cdot x^{-2} = -\frac{1}{2 \cdot x^2}$

(d) $\int e^{-x} \, dx = -e^{-x}$, denn mit Kettenregel gilt $\frac{d}{dx}(-e^{-x}) = (-1) \cdot (-1) \cdot e^{-x} = e^{-x}$

8.2 Integrale berechnen

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int_{-1}^{1} |x| \, dx = \int_{-1}^{0} -x \, dx + \int_{0}^{1} x \, dx = -\frac{x^2}{2}|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}|_{0}^{1} = (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} - 0 = 1$

(b) $\int_{1}^{2} \log_2(x) \, dx = \frac{1}{\ln(2)} \int_{1}^{2} \ln(x) \, dx = \frac{1}{\ln(2)}(x \cdot \ln(x) - x)|_{1}^{2} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot (2 \cdot \ln(2) - 2 - 1 \cdot \ln(1) + 1)$
$= \frac{1}{\ln(2)} \cdot (2 \cdot \ln(2) - 1) = 2 - \frac{1}{\ln(2)}.$

8.3 Flächen berechnen

Berechnen Sie die Fläche, die vom gegeben Graphen und der x-Achse eingeschlossen ist:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ auf $[-1, 1]$. Wir integrieren über den Betrag und nutzen Aufgabe 2 a):

$$\text{Fläche } = \int_{-1}^{1} |x| \, dx = 1.$$

(b) Auf $[0, 2]$ besitzt f eine Nullstelle bei 1. Wir integrieren in Abschnitten und korrigieren das Vorzeichen händisch:

$$\begin{aligned}
\text{Fläche} &= \left| \int_0^1 x^2 - 2 \, dx \right| + \left| \int_1^2 x^2 - 2 \, dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2 \cdot x \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2 \cdot x \right]_1^2 \right| \\
&= \left| \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1 - 0 \right| + \left| \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2 - \frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 \right| = \left(2 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{7}{3} - 2 \right) \\
&= \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2.
\end{aligned}$$

8.4 Stammfunktionen mithilfe von Tricks bilden

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int x^2 \cdot e^x \, dx \overset{p.I.}{=} x^2 \cdot e^x - \int 2 \cdot x \cdot e^x \, dx \overset{p.I.}{=} x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + \int 2 \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 2)$

(b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$, Wir setzen $x = \sin(z)$ und erhalten

$\frac{dx}{dz} = \cos(z),\ z = \arcsin(x),$ also mithilfe der Substitutionsregel gilt

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{\cos(z)}{\sqrt{1-(\sin(z))^2}} \, dx = \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{\cos(z)}{|\cos(z)|}$, Siehe Aufgabe 5.4. a)

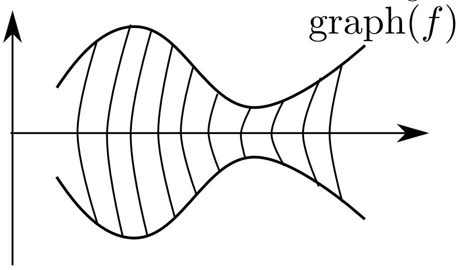
$= \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(\frac{1}{2})} 1 \, dx = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right).$

(c) $\int_2^3 \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \, dx$, Logarithmische Integration mit $f(x) := \ln(x),\ f'(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \int_2^3 \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \, dx = \ln(f(x))|_2^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)).$

8.5 Knobelaufgabe

Sei $f : [a, b] \to (0, \infty)$ stetig. Lassen Sie nun den Graphen von f um die x-Achse rotieren. So erhalten Sie einen rotationssymmetrischen dreidimensionalen Körper. Finden Sie mithilfe der Integrationstheorie eine Formel für das Volumen eines solchen Körpers.
Hinweis: Nutzen Sie, dass das Volumen eines Zylinders $\pi \cdot r^2 \cdot h$ ist, wobei r der Radius und h die Höhe ist.
Eine Skizze der Situation ist folgende



Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in n gleichlange Intervalle und nähern den Flächeninhalt des Rotationskörpers mithilfe von Zylindern an. Betrachten wir nun also den Zylinder über $x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$ bis $x_{k+1} = a + \frac{b-a}{n} \cdot (k+1)$. Wir wählen als Radius $f(\xi_k)$ mit $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Dann ist das Volumen des Zylinders

$$\text{Volumen Zylinder} = \pi \cdot (f(\xi_k))^2 \cdot (x_{k+1} - x_k) = \pi \cdot (f(\xi_k))^2 \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Nun können wir das Volumen des Rotationskörpers anähern durch

$$\text{Volumen Körper} = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{k-1} (f(\xi_k))^2.$$

Falls f stetig ist, so ist auch f^2 stetig. In dem Fall konvergiert obige Summe und wir erhalten

$$\text{Volumen Körper} = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$