Lösung zu Blatt 9

Die folgenden Aufgaben sind so konzipiert, dass sie ohne einen Taschenrechner gelöst werden können.

9.1 Potenzmengen

Berechnen Sie die folgenden Potenzmengen:

$$\begin{aligned}
&\text{(a) } \operatorname{Pot}(\{1,2,3,4\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\} \\
&\qquad \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}. \\
&\text{(b) } \operatorname{Pot}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} \\
&\text{(c) } \operatorname{Pot}(\{a,\emptyset\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset\}, \{a,\emptyset\}\}.
\end{aligned}$$

9.2 Modellierung: Roulette

Es existieren 18 gerade und 18 ungerade Zahlen zwischen 1 und 36. Da die Farbe grün nicht gewählt werden kann, gibt es also 19 Möglichkeiten, dass der Spieler verliert. Insgesamt gibt es 37 Möglichkeiten wie das Spiel ausgeht. Nach der Regel von Laplace sind die Wahrscheinlichkeiten also wie folgt:

$$P(\{\text{Verloren}\}) = \frac{19}{37}, \; P(\{\text{Gewonnen}\} = 1 - P(\{\text{Verloren}\}) = \frac{18}{37}.$$

9.3 Anwendung der Kolmogorov Axiome

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer endlichen Menge X. Sei außerdem $A, B \subset X$, sodass

$$P(A) = 0.6, \; P(B) = 0.7.$$

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A \cap B$ mindestens?
Antwort: Mithilfe der Formel

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

und der Eigenschaft $P(C) \in [0,1]$ für alle $C \subset X$ können wir abschätzen

$$1 \geq P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1.3 - P(A \cap B) \; \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 1.3 - 1 = 0.3$$

9.4 Modellierung eines Glücksspiels

Wir nutzen das Gesetz $P(A) = 1 - P(A^c)$ um die Wahrscheinlichkeit eines Gewinnes zu berechnen. D.h. wir berechnen stattdessen die Wahrscheinlichkeit bei beiden Spielen gleichzeitig zu verlieren. Dafür erstmal bei der Lotterie: Es gibt 180 Nieten, d.h. nach der Regel von Laplace ist die Wahrscheinlichkeit dort zu verlieren

$$P_{Lotterie}(\{Verloren\}) = \frac{180}{200} = \frac{9}{10}.$$

Beim Würfeln gibt es nun 4 Möglichkeiten zu verlieren und insgesamt 6 mögliche Ausgänge. Nach der Regel von Laplace ist die Wahrscheinlichkeit dort zu verlieren also

$$P_{Würfel}(\{Verloren\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Mithilfe des Satzes von Carathéodory gilt also für die Gesamtwahrscheinlichkeit P_{Gesamt}

$$P_{Gesamt}(\{überall\ Verloren\}) = P_{Gesamt}(\{Lotterie\ verloren\} \times \{Würfel\ verloren\})$$
$$= P_{Lotterie}(\{Verloren\}) \cdot P_{Würfel}(Verloren) = \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}.$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit irgendwas zu gewinnen:

$$P_{Gesamt}(\{irgendwas\ gewonnen\}) = 1 - P_{Gesamt}(\{überall\ Verloren\}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}.$$

9.5 Knobelaufgabe

Stellen Sie sich vor, sie haben eine Münze, sodass auf einer Seite eine 1 und auf der anderen Seite eine 2 abgebildet ist. Außerdem ist die Münze nicht unbedingt fair, d.h. die Wahrscheinlichkeit dass eine 1 auftritt beim Münzwurf ist nicht unbedingt diesselbe wie für die 2. Das Experiment ist nun wie folgt: Die Münze wird zweimal geworfen und das Ergebnis addiert. Kann die Münze nun so modifiziert werden, dass alle Ergebnisse dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzen?
Nein, dies ist nicht möglich. Hier die Begründung: Wir nehmen an es würde gehen und führen das Ganze dann mathematisch zu einem Widerspruch. Sei dafür P das Wahrscheinlichkeitsmaß für einen einzigen Münzwurf, d.h. $P(\{1\})$ und $P(\{2\})$ sind unbekannt bzw. zu suchen. Nach dem Satz von Carathéthodory haben wir für die kombinierten Wahrscheinlichkeiten P_G auf der Menge $X_G = \{1,2\} \times \{1,2\}$

$$P_G(\{1\} \times \{1\}) = P((\{1\})^2,\ P(\{1\} \times \{2\}) = P(\{1\}) \cdot P(\{2\}),\ P(\{2\} \times \{2\}) = P(\{2\})^2.$$

Da die Summe der Ergebnisse immer dieselbe Wahrscheinlichkeit haben soll, gilt also für dieses Wahrscheinlichkeitsmaß P_S auf $X_S = \{2,3,4\}$

$$P_S(\{2\}) = P_S(\{3\}) = P_S(\{4\}) = \frac{1}{3}.$$

Die 3 aus X_S korrespondiert mit $\{1\} \times \{2\}$ und $\{2\} \times \{1\}$ aus X_G. Analoges gilt für die anderen Ereignisse. Also haben wir folgende Gleichungen

$$\frac{1}{3} = P_S(\{2\}) = P_G(\{1\} \times \{1\}) = P(\{1\})^2$$
$$\frac{1}{3} = P_S(\{3\}) = P_G(\{1\} \times \{2\} \cup \{2\} \times \{1\}) = P_G(\{1\} \times \{2\}) + P_G(\{2\} \times \{1\}) = 2 \cdot P(\{1\}) \cdot P(\{2\})$$
$$\frac{1}{3} = P_S(\{4\}) = P_G(\{2\} \times \{2\}) = P(\{2\})^2.$$

Aus der ersten und dritten Gleichung erhalten wir

$$P(\{1\}) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ P(\{2\}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein, erhalten wir

$$\frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

Dies kann nicht sein, also gibt es eine solche Münze nicht.