ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

ENTWURF, STAND 15. Oktober 2019

JÜRGEN HAUSEN

Inhaltsverzeichnis

1. Der Projektive Raum

1.1. Der Projektive Raum als Prävarietät.

Erinnerung 1.1.1. Ein *Raum mit ($\mathbb{K}$-)Funktionen* ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Garbe $\mathcal{O}_X$ (auch kürzer $\mathcal{O}$) von $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen; man nennt $\mathcal{O}_X$ dann die *Strukturgarbe* von X.

Ein *Morphismus* von Räumen X und Y mit Funktionen ist eine stetige Abbildung $\varphi\colon X \to Y$, sodass man für jedes offene $V \subseteq Y$ einen wohldefinierten Homomorphismus (*Komorphismus*) erhält durch

$$\varphi^*\colon \mathcal{O}_Y(V) \ \to \ \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V)), \qquad g \ \mapsto g \circ \varphi.$$

Erinnerung 1.1.2. Affine Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ sind Räume mit Funktionen; ihre Definition verlief in mehreren Schritten:

(i) Eine *algebraische Menge* in $\mathbb{K}^n$ ist das Nullstellengebilde $X = V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \mathbb{K}^n$ endlich vieler Polynome $f_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.
(ii) Die *Zariski-Topologie* auf einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ besitzt als abgeschlossene Menge genau die Mengen der Form $X \cap A$, wobei $A \subseteq \mathbb{K}^n$ die algebraischen Mengen durchläuft.
(iii) Die Garbe $\mathcal{O}_X$ der *regulären Funktionen* auf einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ ordnet jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{O}_X(U)$ aller Fuktionen $f\colon U \to \mathbb{K}$ zu, die sich lokal als Quotient g/h von Polynomen $g, h \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ darstellen lassen.
(iv) Eine *affine Varietät* ist ein Raum mit Funktionen, der isomorph zu einer algebraischen Menge ist.

Der letzte Schritt bringt einen Gewinn an Flexibilität in der Handhabung; beispielsweise sind Hauptmengen $X_f \subseteq X$ wichtige Beispiele affiner Varietäten, die a priori nicht als algebraische Mengen gegeben sind.

Erinnerung 1.1.3. Es sei X ein Raum mit Funktionen. Dann erbt jedes $Y \subseteq X$ die Teilraumtopologie und eine Garbe $\mathbb{K}$-wertiger Funktionen:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_Y(V) \quad &:= \quad \{f\colon V \to \mathbb{K};\ \text{zu jedem } y \in V \text{ existieren eine Umgebung } U \subseteq X \\ &\qquad\qquad \text{von } y \text{ und } F \in \mathcal{O}_X(U) \text{ mit } f_{|U\cap V} = F_{|U\cap V}\} \\ &= \quad \{f\colon V \to \mathbb{K};\ \text{lokal } f = F \text{ mit } F \in \mathcal{O}_X(U)\}.\end{aligned}$$

Man nennt $\mathcal{O}_Y$ die durch $\mathcal{O}_X$ *induzierte Strukturgarbe* auf Y und Y zusammen mit $\mathcal{O}_Y$ den durch Y definierten *Unterraum* von X.

Definition 1.1.4. Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(i) Eine *(algebraische $\mathbb{K}$-) Prävarietät* ist ein Raum X mit ($\mathbb{K}$-)Funkionen, der durch offene Teilmengen $U_1, \ldots, U_r$ überdeckt wird, sodass jeder offene Unterraum U_i eine affine Varietät ist.
(ii) Ein *Morphismus* von Prävarietäten X und Y ist ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ der zu Grunde liegenden Räume mit Funktionen.

Bemerkung 1.1.5. Jede affine Varietät ist eine Prävarietät. Weiter ist eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ zwischen affinen Varietäten genau dann ein Morphismus von Prävarietäten, wenn sie ein Morphismus affiner Varietäten ist.

Erinnerung 1.1.6. Es sei X ein topologischer Raum. Man nennt X *noethersch*, falls jede aufsteigende Kette $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$ offener Mengen $V_j \subseteq X$ stationär wird, d.h., falls es ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gibt mit $V_j = v_n$ für alle $j \geq n$. Ist X noethersch, so ist auch jeder Teilraum $Y \subseteq X$ noethersch. Affine Varietäten sind noethersche topologische Räume.

Jeder noethersche topologische Raum X ist *quasikompakt*, d.h., jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Weiter erlaubt jeder noethersche topologische Raum X eine Zerlegung in *irreduzible Komponenten*, d.h., es gilt $X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$ mit irreduziblen abgeschlossenen Unterräumen $X_i \subseteq X$, wobei $X_i \subseteq X_j$ nur für $i = j$. Die X_i sind dabei bis auf Nummerierung eindeutig.

Satz 1.1.7. *Es sei X eine Prävarietät. Dann ist X ein noetherscher topologischer Raum.*

Beweis. Es sei $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette offener Mengen $V_j \subseteq X$. Wir überdecken X durch offen affine Unterräume $U_1, \ldots, U_r$. Dann ist U_i ein noetherscher topologischer Raum. Also gibt es ein $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, sodass die Kette $V_1 \cap U_i \subseteq V_2 \cap U_i \subseteq \ldots$ ab n_i stationär ist. Für $n := \max(n_1, \ldots, n_r)$ ist dann die Kette $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$ ab n stationär. □

Folgerung 1.1.8. *Jede Prävarietät X ist quasikompakt.*

Folgerung 1.1.9. *Jede Prävarietät X besitzt eine Zerlegung in irreduzible Komponenten.*

Satz 1.1.10. *Es sei X eine Prävarietät. Dann bilden die affinen offenen Teilmengen von X eine Basis der Topologie von X.*

Beweis. Es sei eine offene Menge $\emptyset \neq W \subseteq X$ gegeben. Wir überdecken X durch offene affine $U_1, \ldots, U_r \subseteq X$. Da die Hauptmengen eine Basis der Topologie von U_i bilden, können wir jedes $W \cap U_i$ durch affine Mengen $(U_i)_f$ mit $f \in \mathcal{O}(U_i)$ überdecken. Das liefert eine Überdeckung von W durch affine offene Mengen. Da W noethersch und somit quasikompakt ist, wird es bereits endlich viele dieser Mengen überdeckt. □

Satz 1.1.11. *Es sei X eine Prävarietät. Ist $Y \subseteq X$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge, so ist der Unterraum Y von X eine Prävarietät.*

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall, dass Y ein offener Unterraum von X ist. Nach Satz 1.1.10 können wir Y dann durch affine offene Mengen $U_i \subseteq Y$ überdecken. Als Y noethersch und somit quasikompakt ist, reichen endlich viele U_i aus, um Y zu überdecken.

Wir nehmen nun an, dass Y ein abgeschlossener Unterraum von X ist. Wird X überdeckt durch die offenen affine Mengen $U_1, \ldots, U_r$, so ist jeder Unterraum $V_i := U_i \cap Y$ eine affine Varietät, und diese überdecken Y. Also ist Y eine Prävarietät.

Für den allgemeinen Fall schreiben wir $Y = U \cap A$ mit einer offenen Menge $U \subseteq X$ und einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$. Nach der ersten Überlegung ist U eine Prävarietät. Nach der zweiten Überlegung ist $Y = U \cap A$ eine Prävarietät. □

Beispiel 1.1.12. Der offene Unterraum $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ in $\mathbb{K}^2$ ist eine Prävarietät, aber keine affine Varietät.

Bemerkung 1.1.13 (Einschränkungslemma)**.** Es sei $\varphi\colon X \to X'$ ein Morphismus von Prävarietäten. Weiter seien $Y \subseteq X$ und $Y' \subseteq X'$ lokal abgeschlossen mit $\varphi(Y) \subseteq Y'$. Dann ist die Einschränkung $\varphi_{|Y}\colon Y \to Y'$ wieder ein Morphismus von Prävarietäten.

Konstruktion 1.1.14 (Projektiver Raum)**.** Die Menge $W_n := \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist als Unterraum des $\mathbb{K}^{n+1}$ ein Raum mit Funktionen. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{K}^*$ wirkt auf W durch Skalarmultiplikation:

$$\mathbb{K}^* \times W_n \ \to W_n, \qquad (t, z) \ \mapsto \ tz.$$

Den zugehörigen Bahnenraum $\mathbb{P}_n := W_n/\mathbb{K}^*$ nennen wir den *projektiven Raum der Dimension* n, Für einen Punkt $(z_0, \ldots, z_n) \in W_n$ bezeichnen wir mit $[z_0, \ldots, z_n]$ seine Restklasse in $\mathbb{P}_n$, und wir bezeichnen die Restklassenabbildung mit

$$\pi \colon W_n \ \to \ \mathbb{P}_n, \qquad (z_0, \ldots, z_n) \ \mapsto \ [z_0, \ldots, z_n].$$

Wir versehen $\mathbb{P}_n$ mit der Quotiententopologie, d.h., eine Menge $U \subseteq \mathbb{P}_n$ ist genau dann offen, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(U)$ offen in W_n ist. Weiter erhalten wir eine Strukturgarbe auf $\mathbb{P}_n$ durch

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(U) \ \ := \ \ \{f \colon U \to \mathbb{K};\ f \circ \pi \in \mathcal{O}_{W_n}(\pi^{-1}(U))\}.$$

Diese Definitionen machen $\mathbb{P}_n$ zu einem Raum mit Funktionen und $\pi \colon W_n \to \mathbb{P}_n$ wird dabei zu einem Morphismus von Räumen mit Funktionen.

Bemerkung 1.1.15. Nach Konstruktion besitzen der projektive Raum $\mathbb{P}_n$ und der kanonische Morphismus $\pi \colon W_n \to \mathbb{P}_n$ folgende Eigenschaften:

(i) Der Morphismus $\pi \colon W_n \to \mathbb{P}_n$ ist offen, d.h., ist $V \subseteq W_n$ offen, so ist auch $\pi(V) \subseteq \mathbb{P}_n$ offen.

(ii) Es seien $U \subseteq \mathbb{P}_n$ offen und $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to Z$ ein Morphismus von Räumen mit Funktionen mit $\varphi(tz) = \varphi(z)$ für alle $z \in \pi^{-1}(U)$ und $t \in \mathbb{K}^*$. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm von Morphismen

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Z \\ & U \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Zu (i). Für jedes $t \in \mathbb{K}^*$ ist die Abbildung $W_n \to W_n$, $z \mapsto tz$ ein Isomorphismus; der Umkehrmorphismus ist gegeben durch $z \mapsto t^{-1}z$. Insbesondere ist für jede offene Menge $U \subseteq W_n$ die Menge $tU \subseteq W_n$ ebenfalls offen. Damit ist für jedes offene $U \subseteq W_n$ auch die Menge

$$\pi^{-1}(\pi((U)) \ = \ \bigcup_{t \in \mathbb{K}^*} tU$$

offen in W_n. Nach Definition der Topologie auf $\mathbb{P}_n$ ist damit die Menge $\pi(U) \subseteq \mathbb{P}_n$ offen. Aussage (ii) ergibt sich direkt aus den Definitionen von Topologie und Strukturgarbe auf $\mathbb{P}_n$. □

Satz 1.1.16. *Der projektive Raum* $\mathbb{P}_n$ *ist eine irreduzible Prävarietät. Weiter wird* $\mathbb{P}_n$ *wird überdeckt durch die offenen Mengen*

$$U_i \ := \ \{[z_0, \ldots, z_n] \in \mathbb{P}_n;\ z_i \neq 0\} \ \subseteq \ \mathbb{P}_n, \qquad 0 \le i \le n.$$

Diese sind affine Varietäten und für jedes $0 \le i \le n$ *hat man zueinander inverse Morphismen affiner Varietäten*

$$\varphi_i \colon \mathbb{K}^n \to U_i, \qquad (z_1, \ldots, z_n) \mapsto [z_1, \ldots, z_i, 1, z_{i+1}, \ldots, z_n],$$

$$\psi_i \colon U_i \to \mathbb{K}^n, \qquad [z_0, \ldots, z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

Beweis. Jede Menge $\widehat{U}_i := \pi^{-1}(U_i) = \{z \in W_n;\ z_i \neq 0\}$ ist offen in W_n und somit ist U_i offen in $\mathbb{P}_n$.

Es ist weiter zu zeigen, dass φ_i und ψ_i Morphismen von Räumen mit Funktionen sind. Zunächst zu φ_i. Wir betrachten den Morphismus

$$\widehat{\varphi}_i\colon \mathbb{K}^n \ \to\ \widehat{U}_i, \qquad (z_1, \ldots, z_n) \ \mapsto\ (z_1, \ldots, z_i, 1, z_{i+1}, \ldots, z_n).$$

Dann gilt $\varphi_i = \pi \circ \widehat{\varphi}_i$. Insbesondere ist die Abbildung φ_i als Komposition zweier Morphismen ein Morphismus von Räumen mit Funktionen. Nun zu ψ_i. Es sei

$$\widehat{\psi}_i\colon \widehat{U}_i \ \to\ \mathbb{K}^n, \qquad (z_0, \ldots, z_n) \ \mapsto\ \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right).$$

Dann ist $\widehat{\psi}_i$ ein Morphismus, und es gilt $\widehat{\psi}_i = \psi_i \circ \pi$. Nach Bemerkung 1.1.15 ist ψ_i Morphismus.

Da φ_i und ψ_i offensichtlich invers zueinander sind, erhalten wir, dass die U_i affin sind und $\mathbb{P}_n$ somit eine Prävarietät ist. Die Tatsache, dass $\mathbb{P}_n$ irreduzibel ist, folgt aus der Tatsache, dass $\mathbb{P}_n$ Bild des irreduziblen Raumes W_n unter der stetigen Abbildung π ist. □

Bemerkung 1.1.17. Für je zwei Punkte $[z]$ und $[w]$ des projektiven Raumes $\mathbb{P}_n$ haben wir

$$\begin{aligned} [z] \ = \ [w] \quad &\iff \quad w \ = \ tz \text{ mit einem } t \in \mathbb{K}^* \\ &\iff \quad z_i w_j \ = \ z_j w_i \text{ für alle } 0 \le i, j \le n. \end{aligned}$$

Gilt die dritte Bedingung und ist etwa $z_j \neq 0$, so ist $t := w_j / z_j$ der Faktor aus der zweiten Bedingung.

Bemerkung 1.1.18. Der projektive Raum $\mathbb{P}_n = W_n / \mathbb{K}^*$ besitzt die Darstellungen

$$\mathbb{P}_n \quad = \quad U_i \ \cup\ V(T_i) \quad = \quad \bigcap_{i=0}^{n} U_i \ \cup\ V(T_0) \cup \ldots \cup V(T_n),$$

wobei wir $V(T_i) := \{[z] \in \mathbb{P}_n;\ z_i \neq 0\}$ setzen. Mit $\mathbb{T}^n := \mathbb{K}^n_{T_1 \cdots T_n}$ gilt dabei

$$U_i \quad \cong \quad \mathbb{K}^n, \qquad V(T_i) \quad \cong \quad \mathbb{P}_{n-1}, \qquad \bigcap_{i=0}^{n} U_i \quad \cong \quad \mathbb{T}^n.$$

Bemerkung 1.1.19. Der Morphismus $\pi\colon W_n \to \mathbb{P}_n$ ist *lokal trivial*: Für jedes $0 \le i \le n$ hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} W_n \arrow[d, "\pi"'] & \supseteq & \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "z \mapsto (\pi(z), z_i)", "\cong"'] \arrow[d, "\pi"'] & U_i \times \mathbb{K}^* \arrow[d, "\mathrm{pr}_{U_i}"] \\ \mathbb{P}_n & \supseteq & U_i \arrow[r, equal] & U_i \end{tikzcd}$$

Der Umkehrmorphismus zum obigen Morphismus $\pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{K}^*$ ist dabei gegeben durch

$$U_i \times \mathbb{K}^* \ \to\ \pi^{-1}(U_i), \qquad ([z], t) \ \mapsto\ (t\frac{z_0}{z_i}, \ldots, t\frac{z_n}{z_i}).$$

Aufgaben zu Abschnitt 1.1.

Aufgabe 1.1.20. Es seien X eine Prävarietät, $U \subseteq X$ eine offene Menge und $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Beweise folgende Aussagen:

(i) $f: U \to \mathbb{K}$ ist stetig.
(ii) Besitzt f keine Nullstellen in U, so gilt $1/f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Aufgabe 1.1.21. Es sei X eine $\mathbb{C}$-Prävarietät. Zeige: Es gibt genau eine Topologie $\mathbb{C}$-TOP auf X, sodass folgendes gilt:

Ist $U \subseteq X$ eine affine offene Teilmenge und $\varphi: U \to Y$ ein Isomorphismus auf eine algebraische Menge $Y \subseteq \mathbb{C}^n$, so ist φ ein Homöomorphismus des $\mathbb{C}$-TOP-Unterraumes $U \subseteq X$ auf den metrischen Unterraum $Y \subseteq \mathbb{C}^n$.

Die Topologie $\mathbb{C}$-TOP nennt man auch die *komplexe Topologie* auf einer $\mathbb{C}$-Prävarietät; die andere Topologie nennt man die Zariski-Topologie auf X. Beweise folgende Eigenschaften der komplexen Topologie:

(i) Jeder Morphismus $\varphi: X \to X'$ von $\mathbb{C}$-Prävarietäten ist eine stetige Abbildung bezüglich der komplexen Topologie.
(ii) Der projektive Raum $\mathbb{P}_n$ über $\mathbb{C}$ ist kompakt bezüglich der komplexen Topologie.

Aufgabe 1.1.22. Betrachte die abgeschlossenen Unterräume $V(T_i) := \{[z] \in \mathbb{P}_n;\ z_i = 0\}$ des projektiven Raumes $\mathbb{P}_n$. Zeige, dass für jedes $0 \leq m \leq n$ gilt

$$V(T_{m+1}) \cap \ldots \cap V(T_n) \quad \cong \quad \mathbb{P}_m.$$

1.2. **Morphismen projektiver Räume.**

Definition 1.2.1. Es seien K ein abelsches Monoid und A eine $\mathbb{K}$-Algebra. Eine *K-Graduierung* auf A ist direkte eine Zerlegung in $\mathbb{K}$-Untervektorräume

$$A \;=\; \bigoplus_{k \in K} A_k,$$

sodass stets $A_k A_{k'} \subseteq A_{k+k'}$ gilt. Die $\mathbb{K}$-Vektorräume A_k nennt man die *homogenen Komponenten von A*, und die Elemente von A_k heißen *homogen vom Grad k*.

Bemerkung 1.2.2. Die *klassische Graduierung* auf dem Polynomring $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ in n Veränderlichen ist gegeben durch

$$\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \;=\; \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]_d, \quad \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]_d \;:=\; \left\{ \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_n = d} a_\nu T^\nu \right\}.$$

Wir betrachten weiter die Wirkung $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $t \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (tz_1, \ldots, tz_n)$. Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist genau dann homogen vom Grad d, wenn es stets $f(t \cdot z) = t^d f(z)$ erfüllt.

Satz 1.2.3. *Für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt $\mathcal{O}(\mathbb{P}_n) = \mathbb{K}$. Insbesondere ist $\mathbb{P}_n$ für $n \geq 1$ keine affine Varietät.*

Beweis. Es sei eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}_n)$ gegeben. Nach Definition der Strukturgarbe auf $\mathbb{P}_n$ haben wir dann

$$\pi^*(f) \;\in\; \mathcal{O}(W_n) \;=\; \mathcal{O}(\mathbb{K}^{n+1}) \;=\; \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n].$$

Weiter gilt $\pi^*(f)(t \cdot z) = \pi^*(f)(z)$ für alle $z \in \mathbb{K}^{n+1}$ und $t \in \mathbb{K}^*$. Also ist $\pi^*(f)$ homogen vom Grad 0 und somit konstant. Damit ist auch f konstant. $\square$

Bemerkung 1.2.4. Es seien $\varphi_0, \ldots, \varphi_m \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ homogene Polynome vom Grad $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $V(\varphi_0, \ldots, \varphi_m) \subseteq \{0\}$. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W_n \arrow[r, "z \mapsto (\varphi_0(z), \ldots, \varphi_m(z))"] \arrow[d] & W_m \arrow[d] \\
\mathbb{P}_n \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{P}_m
\end{tikzcd}$$

Nach Bemerkung 1.1.15 (ii) ist $\varphi \colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_m$ ein Morphismus. Insbesondere erhält man für jede Matrix $A \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$ einen Isomorphismus

$$\mathbb{P}_n \;\to\; \mathbb{P}_n, \qquad [z] \;\mapsto\; [A \cdot z].$$

Beispiel 1.2.5 (Rationale Normalkurve)**.** Für jedes $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ hat man einen Morphismus

$$\mathbb{P}_1 \;\to\; \mathbb{P}_d, \qquad [z_0, z_1] \;\mapsto\; [z_0^d, z_0^{d-1} z_1, \ldots, z_0 z_1^{d-1}, z_1^d],$$

Beispiel 1.2.6 (Veronese-Abbildung)**.** Es seien $n, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gegeben, und es sei $N := \binom{n+d}{d} - 1$. Dann hat man einen Morphismus

$$\imath \colon \mathbb{P}_n \;\to\; \mathbb{P}_N, \qquad [z_0, \ldots, z_n] \;\mapsto\; [z_0^d, z_0^{d-1} z_1, \ldots, z_{n-1} z_n^{d-1}, z_n^d],$$

wobei alle Monome $z_0^{\nu_0} \cdots z_n^{\nu_n}$ vom Grad d, d.h., mit $\nu_0 + \ldots + \nu_n = d$, durchlaufen werden.

Satz 1.2.7. *Es sei $\varphi \colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_m$ ein Morphismus.*

(i) *Es gibt ein $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und teilerfremde homogene Polynome $f_0, \ldots, f_m \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ vom Grad d mit $V(f_0, \ldots, f_m) \subseteq \{0\}$, sodass*

$$\varphi([z]) \;=\; [f_0(z), \ldots, f_m(z)] \qquad \text{für alle } [z] \in \mathbb{P}_n.$$

(ii) *Sind* $f_0, \dots, f_m \in \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]_d$ *und* $f'_0, \dots, f'_m \in \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]_e$ *wie in (i) gegeben, so gilt* $d = e$ *und* $(f'_0, \dots, f'_m) = a \cdot (f_0, \dots, f_m)$ *mit einem* $a \in \mathbb{K}^*$.

Folgerung 1.2.8. *Es sei* $\varphi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ *ein Isomorphismus. Dann gibt es eine Matrix* $A \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$ *mit*

$$\varphi([z]) \ = \ [A \cdot z] \qquad \textit{für alle } [z] \in \mathbb{P}_n.$$

Beweis. Es sei $\psi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ der Umkehrmorphismus zu $\varphi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$. Satz 1.2.7 (i) liefert Darstellungen

$$\varphi([z]) \ = \ [f_0(z), \dots, f_n(z)], \qquad \psi([z]) \ = \ [g_0(z), \dots, g_n(z)]$$

mit homogenen Polynomen $f_i, g_i \in \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]$ vom Grad $\deg(f_i) = d$ bzw. $\deg(g_i) = e$. Also haben wir

$$[z] \ = \ \psi \circ \varphi([z]) \ = \ [h_0(z), \dots, h_n(z)]$$

mit Polynomen h_i vom Grad de. Mit 1.2.7 (i) folgt $de = 1$ und somit $d = e = 1$. Folglich sind alle f_i, g_i Linearformen. Das bedeutet

$$\varphi([z]) \ = \ [A \cdot z], \qquad \psi([z]) \ = \ [B \cdot z]$$

mit Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$. Wir erhalten weiter

$$[z] \ = \ \psi \circ \varphi([z]) \ = \ [B \cdot A \cdot z]$$

Satz 1.2.7 (ii) liefert daher $B \cdot A = a \cdot E_n$ mit einem $a \in \mathbb{K}^*$. Das impliziert $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. □

Folgerung 1.2.9. *Es sei* $\varphi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_m$ *ein Morphismus. Gilt* $n > m$*, so ist* φ *konstant.*

Beweis. Nach Satz 1.2.7 gibt es homogene Polynome $f_0, \dots, f_m \in \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]_d$ ohne gemeinsame Nullstelle auf $\mathbb{K}^{n+1}$, sodass der Morphismus $\varphi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_m$ folgende Gestalt besitzt:

$$\varphi\colon \mathbb{P}_n \ \to \ \mathbb{P}_m, \qquad [z] \ \mapsto \ [f_0(z), \dots, f_m(z)].$$

Nehmen wir nun an, es gelte dabei $m > n$ und φ sei nicht konstant. Dann muss $d > 0$ gelten und somit jedes f_i Nullstellen. Das steht im Widerspruch zum Krullschen Hauptidealsatz, denn dieser liefert

$$\dim(V(f_0, \dots, f_m)) \ \geq \ n + 1 - (m+1) \ \geq \ 1.$$

□

Lemma 1.2.10. *Es sei* A *eine nullteilerfreie* $\mathbb{Z}_{\geq 0}$*-graduierte* $\mathbb{K}$*-Algebra. Dann gilt:*

(i) *Es seien* $f, g \in A$ *mit* $g \mid f$*. Ist* $f \in A$ *homogen, so ist auch* g *homogen.*
(ii) *Jede Einheit* $f \in A^*$ *ist homogen vom Grad* $\deg(f) = 0$.
(iii) *Ist* A *faktoriell, so ist jedes homogene* $0 \neq f \in A \setminus A^*$ *ein Produkt homogener Primelemente.*

Beweis. Zu (i). Wir schreiben $f = gh$ und $g = g_n + \ldots + g_N$ sowie $h = h_m + \ldots + h_M$ mit homogenen Elementen $g_i \in A_i$ und $h_j \in A_j$, sodass g_n,g_N,h_m,h_M von Null verschieden sind. Dann erhalten wir $g = g_n = g_N$ und $h = h_m = h_M$ mit

$$f \ = \ gh \ = \ g_N h_M + \sum_{d=m+n+1}^{M+N-1} \left(\sum_{i+j=d} g_i h_j \right) + g_n h_m.$$

Zu (ii). Wir schreiben zunächst $1 := f_n + \ldots + f_N$ mit homogenen Elementen $f_i \in A_i$, sodass $f_n \neq 0 \neq f_N$. Dann erhalten wir

$$f_n + \ldots + f_N \;=\; 1 \;=\; 1 \cdot 1 \;=\; f_n^2 + \sum_{d=2n+1}^{2N-1} \left(\sum_{i+j=d} f_i f_j \right) + f_N^2.$$

Es folgt $n = 2n$ und $N = 2N$, was $n = N = 0$ impliziert. Somit ist $1 \in A$ homogen vom Grad Null.

Ist $f \in A^*$, so gilt $fg = 1$ mit einem $g \in A^*$, und Aussage (i) liefert, dass f homogen vom Grad 0 sein muss. Aussage (iii) ergibt sich ebenfalls direkt aus (i). □

Lemma 1.2.11. *Es seien X eine faktorielle affine Varietät, $U \subseteq X$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$. Sind $g, h \in \mathcal{O}(X)$ teilerfremd mit $f = g/h$ in $\mathbb{K}(X)$, so gilt $V_X(h) \cap U = \emptyset$.*

Beweis. Nehmen wir an, es gelte $h(x) = 0$ für ein $x \in U$. Da f regulär in x ist, haben wir nahe x eine Darstellung $f = g'/h'$ mit $g', h' \in \mathcal{O}(X)$ und $h'(x) \neq 0$. Es folgt $gh' = g'h$ in $\mathcal{O}(X)$. Da g und h teilerfremd sind, muss $h \mid h'$ und somit $h'(x) = 0$ gelten. Widerspruch. □

Lemma 1.2.12. *Es seien $U \subseteq \mathbb{P}_n$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann gibt es ein $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und teilerfremde homogene Polynome $g, h \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ vom Grad d mit*

$$V(h) \cap \pi^{-1}(U) \;=\; \emptyset, \qquad f([z]) \;=\; \frac{g(z)}{h(z)}, \quad \textit{für alle } [z] \in U.$$

Umgekehrt definieren je zwei homogene Polynome $g, h \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ vom Grad d mit $V(h) \cap \pi^{-1}(U) = \emptyset$ eine reguläre Funktion $f\colon [z] \mapsto g(z)/h(z)$ auf $U \subseteq \mathbb{P}_n$.

Beweis. Wir dürfen $f \neq 0$ annehmen. Nach Definition der Strukturgarbe auf $\mathbb{P}_n$ gilt $f \circ \pi \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$. Das impliziert

$$f \circ \pi \;=\; \frac{g}{h} \;\in\; \mathbb{K}(T_0, \ldots, T_n)$$

mit Polynomen $g, h \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$. Dabei dürfen wir annehmen, dass g und h teilerfremd sind. Nach Lemma 1.2.11 gilt $V(h) \cap \pi^{-1}(U) = \emptyset$. Wir schreiben

$$g \;=\; \sum_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} g_d, \qquad h \;=\; \sum_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} h_d$$

wobei $g_d, h_d \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ homogene Polynome vom Grad d sind. Wir betrachten einen Punkt $z \in \pi^{-1}(U)$ mit $f(\pi(z)) \neq 0$. Für jedes $t \in \mathbb{K}^*$ erhalten wir

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} t^d g_d(z) \;=\; g(tz) \;=\; f(\pi(tz))h(tz) \;=\; f(\pi(z)) \sum_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} t^d h_d(z).$$

Das impliziert $g_d(z) = f(\pi(z))h_d(z)$ für jedes $z \in \pi^{-1}(U)$ mit $f(\pi(z)) \neq 0$ und somit für jedes $z \in \pi^{-1}(U)$. Wegen $g \neq 0$ gibt es ein d mit $g_d \neq 0$. Damit erhalten wir eine Darstellung

$$f \circ \pi \;=\; \frac{g_d}{h_d}$$

mit homogenen Polynomen g_d und h_d vom Grad d. Die Primfaktoren dieser Polynome sind ebenfalls homogen, sodass wir nach Kürzen des Bruchs g_d/h_d die gewünschte Darstellung erhalten. □

Beweis von Satz 1.2.7. Zu (i). Es sei wie früher $U_j := \{[w] \in \mathbb{P}_m;\ w_j \neq 0\}$. Wir reduzieren das Problem zunächst auf den Fall, dass $\varphi(\mathbb{P}_n) \cap U_j \neq \emptyset$ für alle $0 \le j \le m$ gilt.

Gibt es ein j mit $\varphi(\mathbb{P}_n) \cap U_j = \emptyset$, so folgt $\varphi(\mathbb{P}_n) \subseteq V(T_j)$, und man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_n \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & V(T_j) \arrow[r] & \mathbb{P}_m \\ & \mathbb{P}_{m-1} \arrow[ur, "\cong", "{[u]\mapsto[u_0,\ldots,u_{j-1},0,u_j,\ldots,u_{m-1}]}"'] & & \end{tikzcd}$$

mit einem Morphismus $\varphi' \colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{m-1}$. Übergang zu φ' und Wiederholen dieses Schrittes führt zu der gewünschten Situation.

Wir betrachten $U_0 \subseteq \mathbb{P}_m$ und setzen $V_0 := \varphi^{-1}(U_0)$ und $\widehat{V}_0 := \pi_n^{-1}(V_0)$. Für die Funktionen $\varphi^*(T_i/T_0) \in \mathcal{O}(V_0)$ haben wir dann nach Lemma 1.2.12 Darstellungen

$$\pi_n^*\varphi^*(T_i/T_0) \ = \ \frac{g_i}{h_i}, \qquad g_i, h_i \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]_{d_i}, \qquad V(h_i) \cap \widehat{V}_0 = \emptyset.$$

Das Polynom $f_{00} := h_1 \cdot \ldots \cdot h_m$ besitzt dann ebenfalls keine Nullstelle auf $\widehat{V}_0$ und mit $f_{0i} := f_{00}g_i/h_i$ erhalten wir auf V_0 die Darstellung

$$\varphi([z]) \ = \ [1, g_1/h_1(z), \ldots, g_m/h_m(z)] \ = \ [f_{00}(z), \ldots, f_{0m}(z)]$$

Dabei sind $f_{00}, \ldots, f_{0m}$ homogen vom Grad $k_0 = d_1 + \ldots + d_m$. Weiter dürfen wir annehmen, dass $f_{00}, \ldots, f_{0m}$ teilerfremd sind.

Eine analoge Überlegung für die weiteren $U_j \subseteq \mathbb{P}_m$ liefert auch auf den Mengen $V_j := \varphi^{-1}(U_j)$ Darstellungen

$$\varphi([z]) \ = \ [f_{j0}(z), \ldots, f_{jm}(z)],$$

wobei die Polynome $f_{j0}, \ldots, f_{jm}$ teilerfremd und homogen von einem gemeinsamen Grad k_j sind und f_{jj} keine Nullstelle auf $\widehat{V}_j := \pi_n^{-1}(V_j)$ besitzt.

Wir wollen nun zeigen, dass $(f_{j0}, \ldots, f_{jm}) = a_j \cdot (f_{00}, \ldots, f_{0m})$ mit einem $a_j \in \mathbb{K}^*$ gilt. Zunächst haben wir auf $\widehat{V}_0 \cap \widehat{V}_j$ und somit auf ganz $\mathbb{K}^{n+1}$ die Identitäten

$$f_{0i}f_{jl} \ = \ f_{0l}f_{ji}, \qquad 0 \le i, l \le m.$$

Insbesondere gilt $f_{00} \mid f_{0l}f_{j0}$. Aus der Teilerfremdheit von $f_{00}, \ldots, f_{0m}$ ergibt sich daher $f_{00} \mid f_{j0}$. Analog erhält man $f_{j0} \mid f_{00}$. Das bedeutet $f_{j0} = a_j f_{00}$ mit einem $a_j \in \mathbb{K}^*$. Es folgt weiter

$$f_{ji} \ = \ \frac{f_{j0}}{f_{00}} f_{0i} \ = \ a_j f_{0i}.$$

Da $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch die Mengen $\widehat{V}_j$ überdeckt wird, haben wir mit $f_i := a_j^{-1} f_{ji}$ die gewünschten Polynome gefunden.

Zu (ii). Wird φ durch homogene Polynome $f_0, \ldots, f_m$ sowie $f_0', \ldots, f_m'$ dargestellt, so erhalten wir $f_i f_j' = f_j f_i'$ auf $\mathbb{K}^{n+1}$. Ist dabei $f_k \neq 0$, so liefert die Teilerfremdheit der $f_0, \ldots f_m$ bzw. der $f_0', \ldots f_m'$, dass $f_k \mid f_k'$ und $f_k' \mid f_k$ gelten. Es folgt $f_k' = af_k$ mit einem $a \in \mathbb{K}^*$. Das impliziert $f_i' = af_i$ für jedes $0 \le i \le m$. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 1.2.

Aufgabe 1.2.13. Wir betrachten die klassische $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-Graduierung auf dem Polynomring in n Veränderlichen:

$$\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \; = \; \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]_d, \quad \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]_d \; := \; \left\{ \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_n = d} a_\nu T^\nu \right\}.$$

Zeige: Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist genau dann homogen vom Grad d, wenn es stets $f(t \cdot z) = t^d f(z)$ erfüllt.

Aufgabe 1.2.14. Zeige: Zu je drei paarweise verschiedenen Punkten $x, y, z \in \mathbb{P}_1$ gibt es einen Isomorphismus $\varphi \colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ mit

$$\varphi(x) \; = \; [1, 0], \qquad \varphi(y) \; = \; [1, 1], \qquad \varphi(z) \; = \; [0, 1].$$

Aufgabe 1.2.15. Beweise folgende Aussagen:

(i) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{P}_1$ ist $\mathbb{P}_1 \setminus \{x\}$ eine affine Varietät.
(ii) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{P}_2$ ist $\mathbb{P}_2 \setminus \{x\}$ keine affine Varietät.

Aufgabe 1.2.16. Beweise folgende Version von Lemma 1.2.10: Es sei A eine nullteilerfreie $\mathbb{Z}^n$-graduierte $\mathbb{K}$-Algebra.

(i) Es seien $f, g \in A$ mit $g \mid f$. Ist $f \in A$ homogen, so ist auch g homogen.
(ii) Jede Einheit $f \in A^*$ ist homogen.
(iii) Ist A faktoriell, so ist jedes homogene $0 \neq f \in A \setminus A^*$ ein Produkt homogener Primelemente.

Gib ein Beispiel einer $\mathbb{Z}$-graduierten Algebra, die homogene Einheiten echt positiven Grades besitzt.

1.3. **Unterräume des projektiven Raumes.**

Definition 1.3.1. Eine nicht leere algebraische Menge $C \subseteq \mathbb{K}^n$ nennt man einen *affinen Kegel*, falls mit jedem Punkt $z \in C$ auch die Gerade $\mathbb{K}z$ in C liegt.

Konstruktion 1.3.2. Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_n$ eine abgeschlossene Menge. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(X) & \subseteq & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \subseteq & \mathbb{P}_n \end{array}$$

Der *affine Kegel über* X ist definiert als $C(X) := \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$. Für nichtleeres X hat man

$$C(X) \quad = \quad \overline{\pi^{-1}(X)}.$$

Insbesondere ist $C(X)$ ein affiner Kegel im Sinne von Definition 1.3.1. Weiter hat man zueinander inverse Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} \{\text{affine Kegel in } \mathbb{K}^{n+1}\} & \longleftrightarrow & \{\text{abgeschlossene Mengen in } \mathbb{P}_n\} \\ C & \mapsto & \pi(C \setminus \{0\}) \\ C(X) & \leftarrow\!\shortmid & X. \end{array}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\overline{\pi^{-1}(X)} = C(X)$ für jedes abgeschlossene nichtleere $X \subseteq \mathbb{P}_n$ gilt. Das Urbild $\pi^{-1}(X)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Somit gilt $\overline{\pi^{-1}(X)} \subseteq C(X)$. Wir wählen nun $z \in \pi^{-1}(X)$. Dann gilt $\mathbb{K}^* \cdot z \subseteq \pi^{-1}(X)$ und es folgt $\mathbb{K} \cdot z \subseteq \overline{\pi^{-1}(X)}$. Insbesondere ergibt sich $0 \in \overline{\pi^{-1}(X)}$.

Wie eben gesehen, ist $C(X)$ ein affiner Kegel. Ebenso ist die Zuordnung $C \mapsto \pi(C \setminus \{0\})$ wohldefiniert, denn für jeden affinen Kegel $C \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ gilt

$$\pi^{-1}(\pi(C \setminus \{0\})) \quad = \quad C \setminus \{0\}$$

und somit ist $\pi(C \setminus \{0\})$ abgeschlossen in $\mathbb{P}_n$. Nach Definition sind die Abbildungen $X \mapsto C(X)$ und $C \mapsto \pi(C \setminus \{0\})$ invers zueinander. □

Konstruktion 1.3.3 (Hyperflächen in $\mathbb{P}_n$)**.** Es sei $0 \neq f \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d > 0$. Dann nennt man

$$V(f) \ := \ V_{\mathbb{P}_n}(f) \ := \ \{[z] \in \mathbb{P}_n;\ f(z) = 0\}.$$

die durch f definierte *Hyperfläche* in $\mathbb{P}_n$. Für quadratfreies f nennen wir d den *Grad* von $V_{\mathbb{P}_n}(f)$. Der zugehörige affine Kegel ist

$$C(V_{\mathbb{P}_n}(f)) \quad = \quad V_{\mathbb{K}^{n+1}}(f).$$

Beispiel 1.3.4. Einige Hyperflächen vom Grad 2 und ihre affinen Kegel.

(i) $X = V_{\mathbb{P}_1}(T_0T_1)$ besteht aus den Punkten $[0,1]$ und $[1,0]$. Der affine Kegel über X ist das Achsenkreuz $V_{\mathbb{K}^2}(T_0T_1)$ und besitzt im Nullpunkt eine nichtnormale Singularität.

(ii) $X = V_{\mathbb{P}_2}(T_0T_1 - T_2^2)$ besitzt $C(X) = V_{\mathbb{K}^3}(T_0T_1 - T_2^2)$ als affinen Kegel. Man beachte, dass $C(X)$ im Nullpunkt eine nicht-faktorielle normale Singularität besitzt.

(iii) $X = V_{\mathbb{P}_3}(T_0T_1 - T_2T_3)$ besitzt $C(X) = V_{\mathbb{K}^4}(T_0T_1 - T_2T_3)$ als affinen Kegel. Man beachte, dass $C(X)$ im Nullpunkt eine nicht-faktorielle normale Singularität besitzt.

(iv) $X = V_{\mathbb{P}_n}(T_0^2 + \ldots + T_n^2)$ besitzt $C(X) = V_{\mathbb{K}^{n+1}}(T_0^2 + \ldots + T_n^2)$ als affinen Kegel. Man beachte, dass $C(X)$ für $n \geq 4$ im Nullpunkt eine faktorielle Singularität besitzt.

Definition 1.3.5. Es sei $L = a_0T_0 + \ldots + a_nT_n$ eine nichttriviale Linearform auf $\mathbb{K}^{n+1}$. Dann nennt man $V(L) \subseteq \mathbb{P}^n$ eine *Hyperebene* in $\mathbb{P}_n$.

Definition 1.3.6. Ein *linearer Unterraum* in $\mathbb{P}_n$ ist ein Durchschnitt von endlich vielen Hyperebenen.

Erinnerung 1.3.7. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(l, m; \mathbb{K})$ eine Matrix. Dann gibt es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}(l, \mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{K})$ mit

$$S \cdot A \cdot T \;=\; \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $r := \mathrm{rg}(A)$. Für $Z := \mathrm{Kern}(A)$ und den linearen Isomorphismus $\psi\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$, $v \mapsto T^{-1}\cdot v$ gilt dabei

$$\psi(Z) \;=\; \mathrm{Kern}(A\cdot T) \;=\; \mathrm{Kern}(S\cdot A\cdot T) \;=\; V(T_1, \ldots, T_r).$$

Satz 1.3.8. *Es sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ ein linearer Unterraum. Dann gibt es einen Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ mit*

$$\varphi(X) \;=\; V(T_0, \ldots, T_r) \;\cong\; \mathbb{P}_{n-r-1}.$$

Definition 1.3.9. Eine *Quadrik* im projektiven Raum $\mathbb{P}_n$ ist die Hyperfläche $V(q) \subseteq \mathbb{P}_n$ zu einem homogenen Polynom $q \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ der Form

$$q \;=\; \sum_{0\leq i\leq j\leq n} q_{ij}T_iT_j.$$

Beispiel 1.3.10. Zu je zwei ganzen Zahlen r, n mit $1 \leq r \leq n$ erhält man eine Quadrik

$$X \;:=\; V(T_0^2 + \ldots + T_r^2) \;\subseteq\; \mathbb{P}_n.$$

Erinnerung 1.3.11. Es sei $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Das allgemeine homogene Polynom vom Grad 2 in den Variablen $T_0, \ldots, T_n$ lässt sich schreiben als

$$q \;=\; \sum_{0\leq i\leq j\leq n} q_{ij}T_iT_j \;\in\; \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$$

Es bezeichne $A \in \mathrm{Mat}(n+1, n+1; \mathbb{K})$ die durch q eindeutig bestimmte symmetrische Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} \;:=\; \begin{cases} q_{ij}/2, & i < j, \\ q_{ii}, & i = j, \\ q_{ji}/2, & i > j. \end{cases}$$

Dann nennt man $\mathrm{rg}(A)$ den *Rang* von q bzw. der Quadrik $V_{\mathbb{P}_n}(q)$. Man erhält folgende Schreibweise für das Polynom q:

$$q \;=\; q_A \;:=\; (T_0, \ldots, T_n)^t \cdot A \cdot (T_0, \ldots, T_n) \;\in\; \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n].$$

Die Darstellung $q = q_A$ verwendet man zur Untersuchung der Quadrik $V(q)$. Es gibt eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{K})$ mit

$$S^t \cdot A \cdot S \;=\; \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $r := \mathrm{rg}(q)$. Für den linearen Isomorphismus $\psi\colon \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$, $v \mapsto S^{-1}\cdot v$ gilt dann

$$\psi(V(q)) \;=\; V(T_0^2 + \ldots + T_r^2).$$

Satz 1.3.12. *Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_n$ eine Quadrik vom Rang $r+1$. Dann gibt es einen Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ mit*

$$\varphi(X) \quad = \quad V_{\mathbb{P}_n}(T_0^2 + \ldots + T_r^2).$$

Bemerkung 1.3.13. Die allgemeine homogene Gleichung dritten Grades in drei Variablen besitzt die Gestalt

$$f \;=\; \sum_{i+j+k=3} a_{ijk} T_0^i T_1^j T_2^k.$$

Das Nullstellengebilde $X := V_{\mathbb{P}_2}(f)$ nennt man eine *ebene Kubik*. Man kann zeigen, dass es für "glattes" X einen Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ gibt mit

$$\varphi(X) \;=\; V_{\mathbb{P}_2}(T_0T_2^2 - 4T_1^3 + g_2T_1T_0^2 + g_3T_0^3), \qquad \text{wobei } g_2, g_3 \in \mathbb{K} \text{ mit } g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

Definition 1.3.14. Es seien K ein Monoid und A eine K-graduierte $\mathbb{K}$-Algebra. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ nennt man *homogen*, falls es sich wie folgt zerlegen lässt:

$$\mathfrak{a} \quad = \quad \bigoplus_{k \in K} A_k \cap \mathfrak{a}.$$

Beispiel 1.3.15. Der Polynomring $\mathbb{K}[T]$ in einer Veränderlichen besitzt eine kanonische Graduierung: Man hat

$$\mathbb{K}[T] \quad = \quad \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{K}T^k.$$

Das durch die Variable $T \in \mathbb{K}[T]$ erzeugte Ideal in $\mathbb{K}[T]$ ist homogen, denn es gilt

$$\langle T \rangle \;=\; \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{K}T^k \;=\; \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{>0}} \langle T \rangle \cap \mathbb{K}[T]_k.$$

Das durch Element $1+T \in \mathbb{K}[T]$ erzeugte Ideal ist hingegen nicht homogen, denn für jedes $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt

$$\langle 1+T \rangle \cap \mathbb{K}T^k \quad = \quad \{0\}.$$

Satz 1.3.16. *Es seien K ein Monoid, A eine K-graduierte $\mathbb{K}$-Algebra und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Das Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist homogen.*
(ii) *Für jedes $f \in \mathfrak{a}$ liegen auch die homogenen Summanden f_k von f in $\mathfrak{a}$.*
(iii) *Das Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ wird von homogenen Elementen erzeugt.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Ist $f \in \mathfrak{a}$ gegeben, so liefert die Homogenität des Ideals $\mathfrak{a}$ eine Zerlegung $f = \sum f'_k$ mit $f'_k \in \mathfrak{a} \cap A_k$. Die Eindeutigkeit der Entwicklung $f = \sum f_k$ in homogene Summanden liefert $f_k = f'_k \in \mathfrak{a}$. Die Implikation "(ii)⇒(iii)" ist offensichtlich. Für den Nachweis von "(iii)⇒(i)" vermerken wir zunächst, dass

$$\mathfrak{a} \quad \supseteq \quad \bigoplus_{k \in K} A_k \cap \mathfrak{a}$$

gilt. Wir wählen nun Erzeuger $f_k \in A_k \cap \mathfrak{a}$ für $\mathfrak{a}$. Ist $f \in \mathfrak{a}$ gegeben, so schreiben wir $f = \sum g_k f_k$ mit $g_k \in A$. Entwickelt man jedes g_k in homogene Elemente und sortiert nach Graden, so ergibt sich $f \in \oplus A_k \cap \mathfrak{a}$. □

Beispiel 1.3.17. Die *feine Graduierung* auf dem Polynomring $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ besitzt $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ als Graduierungsmonoid und ist gegeben durch

$$\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \;=\; \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} \mathbb{K}T^\nu.$$

Dabei ist jede von homogene Komponente ein eindimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist genau dann homogen bezüglich der feinen Graduierung, wenn es ein Monomialideal ist.

Konstruktion 1.3.18. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ ein echtes homogenes Ideal bezüglich der klassischen Graduierung 1.2.2. Dann ist $V_{\mathbb{K}^{n+1}}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ ein affiner Kegel. Das *Nullstellengebilde* von $\mathfrak{a}$ in $\mathbb{P}_n$ ist die abgeschlossene Menge

$$V_{\mathbb{P}_n}(\mathfrak{a}) \ := \ \pi(V_{\mathbb{K}^{n+1}}(\mathfrak{a} \setminus \{0\})) \ \subseteq \ \mathbb{P}_n.$$

Beweis. Es sei $X := V_{\mathbb{K}^{n+1}}(\mathfrak{a})$. Wir zeigen zunächst, dass mit $z \in X$ auch alle $t \cdot z$, $t \in \mathbb{K}^*$, in X liegen. Für jedes $f \in \mathfrak{a}$ betrachten wir seine Zerlegung $f = \sum_k f_k$ in ν-homogene Polynome. da $\mathfrak{a}$ homogen ist, erhalten wir $f_k \in \mathfrak{a}$ für alle k. Die Behauptung ergibt sich dann mit

$$f(t \cdot z) \ = \ \sum_k f_k(t \cdot z) \ = \ \sum_k t^k f_k(z) \ = \ 0.$$

Da $\mathfrak{a}$ ein echtes homogenes Ideal ist, besitzt keines der $f \in \mathfrak{a}$ einen konstanten Term und somit gilt $f(0) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{a}$. Insbesondere folgern wir $\mathbb{K} \cdot z \subseteq X$ für alle $t \in \mathbb{K}$ und $z \in X$. □

Satz 1.3.19. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ eine algebraische Menge und $I(X) \subseteq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ ihr Verschwindungsideal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *X ist ein affiner Kegel.*
(ii) *X ist invariant unter der $\mathbb{K}^*$-Wirkung $t \cdot z = (tz_0, \ldots, tz_n)$.*
(iii) *$I(X)$ ist homogen bezüglich der klassischen Graduierung 1.2.2.*

Beweis. Die Implikation „(i)⇒(ii)“ ist offensichtlich. Die Implikation „(iii)⇒(i)“ folgt aus Konstruktion 1.3.18.

Zu „(ii)⇒(iii)“: Ist $f \in I(X)$ gegeben, so betrachten wir die Zerlegung $f = \sum_k f_k$ in homogene Polynome f_k vom Grad k. Wir haben zu zeigen, dass jedes f_k auf X verschwindet. Ist $z \in X$ gegeben, so gilt

$$0 \ = \ f(t \cdot z) \ = \ \sum_k f_k(t \cdot z) \ = \ \sum_k t^k f_k(z)$$

für alle $t \in \mathbb{K}^*$. Der letzte Ausdruck in der obigen Gleichung ist ein Polynom in t, das für alle $t \in \mathbb{K}^*$ verschwindet. Folglich müssen alle Koeffizienten $f_k(z)$ dieses Polynoms verschwinden. Damit ergibt sich $f_k \in I(X)$. □

Folgerung 1.3.20. *Man hat zueinander inverse, inklusionsumkehrende Bijektionen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Abgeschlossene Mengen} \\ \textit{von } \mathbb{P}_n \end{array} \right\} \quad \longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{echte homogene Radikalideale} \\ \textit{in } \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n] \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{rcl} X & \mapsto & I(C(X)) \\ V_{\mathbb{P}_n}(\mathfrak{a}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{a}. \end{array}$$

Aufgaben zu Abschnitt 1.3.

Aufgabe 1.3.21. Es seien $0 \neq f, g \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ quadratfreie homogene Polynome mit $\deg(f) = \deg(g) > 0$. Zeige: Gilt $V(g) = V(f)$ in $\mathbb{P}_n$, so gibt es ein $\alpha \in \mathbb{K}^*$ mit $g = \alpha f$.

Aufgabe 1.3.22. Eine *Gerade* in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2$ ist ein linearer Unterraum $V(L)$ mit einer nichttrivialen Linearform $L = aT_0 + bT_1 + cT_2$. Zeige:

(i) Jede Gerade in $\mathbb{P}_2$ ist isomorph zu $\mathbb{P}_1$.
(ii) Je zwei verschiedene Geraden $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{P}_2$ schneiden sich in genau einem Punkt.
(iii) Zu $x, y \in \mathbb{P}_2$ mit $x \neq y$ gibt es genau eine Gerade $G \subseteq \mathbb{P}_2$ mit $x, y \in G$.

Aufgabe 1.3.23. Zeige: Die Prävarietät $V_{\mathbb{P}_2}(T_0T_1 - T_2^2)$ ist isomorph zu $\mathbb{P}_1$.

Aufgabe 1.3.24. Es sei $0 \neq f \in \mathbb{K}[T_0, T_1]$ ein klassisch homogenes Polynom vom Grad d. Beweise folgende Aussagen:

(i) f ist ein Produkt von d Linearformen.
(ii) $V_{\mathbb{P}_1}(f)$ besteht aus höchstens d Punkten.
(iii) $V_{\mathbb{P}_1}(f)$ besteht genau dann aus genau d Punkten, wenn f quadratfrei ist.

Aufgabe 1.3.25. Betrachte die klassische Graduierung auf $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Zeige: Ist $\mathfrak{a}$ homogen, so ist auch das Radikal $\sqrt{\mathfrak{a}}$ homogen. Gilt die entsprechende Aussage auch für die feine Graduierung auf $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$?

Aufgabe 1.3.26. Beweise folgende Aussagen über den projektiven Raum $\mathbb{P}_n$.

(i) Es sei $L = a_0T_0 + \ldots + a_nT_n$ eine nichttriviale Linearform. Zeige: Der offene Unterraum $\mathbb{P}_n \setminus V(L)$ ist eine affine Varietät.
(ii) Zeige: Zu jeder endlichen Menge $M \subseteq P_n$ gibt es eine nichttriviale Linearform $L = a_0T_0 + \ldots + a_nT_n$ mit $M \subseteq \mathbb{P}_n \setminus V(L)$.

2. Geometrie auf Prävarietäten

2.1. Funktionenkörper und Dimension.

Erinnerung 2.1.1. Es sei X eine affine irreduzible Varietät. Dann ist $\mathcal{O}(X)$ ein Integritätsring und man nennt den Quotientenkörper von $\mathcal{O}(X)$ den Körper der rationalen Funktionen auf X.

Konstruktion 2.1.2 (Körper der rationalen Funktionen)**.** Es sei X eine irreduzible Prävarietät. Wir betrachten die Menge

$$\mathfrak{K} \quad := \quad \{(U,f);\ \emptyset \neq U \subseteq X \text{ offen},\ f \in \mathcal{O}(U)\}$$

und darauf die Äquivalenzrelation

$$(U,f) \ \sim\ (V,g) \quad :\Longleftrightarrow \quad f_{|U\cap V} \ = \ g_{|U\cap V}.$$

Wir setzen $\mathbb{K}(X) := \mathfrak{K}/\sim$, und bezeichnen die Klasse eines Paares (U,f) mit $[U,f]$. Zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} [U,f]+[V,g] & := & [U\cap V, f_{|U\cap V} + g_{|U\cap V}], \\ [U,f]\cdot[V,g] & := & [U\cap V, f_{|U\cap V}g_{|U\cap V}]. \end{aligned}$$

und den neutralen Elementen $0_{\mathbb{K}(X)} := [X,0]$ sowie $1_{\mathbb{K}(X)} := [X,1]$ wird $\mathbb{K}(X)$ zu einem Körper, dem *Körper der rationalen Funktionen* auf X.

Beweis. Um das multiplikative Inverse einer rationalen Funktion $0_{\mathbb{K}(X)} \neq [U,f]$ zu erhalten, wähle man eine affine offene Menge $W \subseteq U$ mit $W \cap V_U(f) = \emptyset$. Dann ist $[W, f^{-1}]$ das gesuchte Inverse zu $[U,f]$. Die übrigen Aussagen sind unmittelbar einsichtig. □

Satz 2.1.3. *Es sei X eine irreduzible Prävarietät.*

(i) *Ist X affin, so stimmt der neue Begriff des Funktionenkörpers mit dem alten überein: Man hat einen wohldefinierten Isomorphismus*

$$Q(\mathcal{O}(X)) \ \to \ \mathbb{K}(X), \qquad \frac{f}{g} \ \mapsto \ \left[X_g, \frac{f}{g}\right].$$

(ii) *Für jede nichtleeren offenen Unterraum $U \subseteq X$ hat man zueinander inverse Isomorphismen:*

$$\mathbb{K}(U) \ \leftrightarrow \ \mathbb{K}(X), \quad [V,f] \ \mapsto \ [V,f], \quad [W\cap V, g] \ \leftarrow\!\shortmid \ [W,g].$$

Beweis. Aussage (ii) ist offensichtlich. Zu (i). Zunächst zur Wohldefiniertheit: Sind $f,g,f',g' \in \mathcal{O}(X)$ mit $f/g = f'/g' \in Q(\mathcal{O}(X))$ gegeben, so gilt $fg' = f'g$ auf X. Insbesondere folgt

$$\frac{f}{g}|_{X_g\cap X_{g'}} \quad = \quad \frac{f'}{g'}|_{X_g\cap X_{g'}}.$$

Da X irreduzibel ist, gilt $X_g \cap X_{g'} \neq \emptyset$ und es folgt $[X_g, fg^{-1}] = [X_{g'}, f'(g')^{-1}]$. Somit ist die Zuordnung wohldefiniert. Offenbar liefert sie einen Homomorphismus von Körpern, und ist damit injektiv.

Zur Surjektivität: Es sei $[U, f]$ eine rationale Funktion. Dann gibt es Funktionen $g, h \in \mathcal{O}(X)$ mit $X_g \subseteq U$ und $f|_{X_g} = hg^{-l}$. Also folgt $[U, f] = [X_g, hg^{-l}]$. □

Bemerkung 2.1.4. Es sei X eine irreduzible Prävarietät. Jede rationale Funktion $[U, f]$ auf X besitzt einen eindeutigen maximalen Repräsentanten (U', f'), d.h., man hat

- $[U', f'] = [U, f]$,
- für alle (V, g) mit $[V, g] = [U, f]$ gilt $V \subseteq U$.

Dabei ist U' die Vereinigung aller $V \subseteq X$, sodass $[V, g] = [U, f]$ mit einem $g \in \mathcal{O}(V)$ gilt. Weiter ist $f' \in \mathcal{O}(U')$ durch Zusammensetzen der $g \in \mathcal{O}(V)$ gegeben.

Definition 2.1.5. Es sei X eine irreduzible Prävarietät. Ist eine rationale Funktion $[U, f]$ maximal repräsentiert durch (U, f), so nennen wir $U \subseteq X$ den *Definitionsbereich* von $[U, f]$.

Beispiel 2.1.6. Für den Funktionenkörper des projektiven Raumes $\mathbb{P}_n$ erhalten wir

$$\mathbb{K}(\mathbb{P}_n) \;\cong\; \mathbb{K}(U_0) \;\cong\; \mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n),$$

wobei $U_0 = \{[z] \in \mathbb{P}_n;\ z_0 \neq 0\}$. Die rationale Funktion $[U_0, T_1/T_0]$ besitzt U_0 als Definitionsbereich.

Definition 2.1.7. Die *Dimension* einer irreduziblen Prävarietät X ist der Transzendenzgrad ihres Funktionenkörpers:

$$\dim(X) \quad := \quad \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)).$$

Die Dimension einer beliebigen Prävarietät X ist das Maximum der Dimensionen ihrer irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_r$:

$$\dim(X) \quad := \quad \max_{1 \le i \le r} \dim(X_i).$$

Beispiel 2.1.8. Für den projektiven Raum haben wir $\dim(\mathbb{P}_n) = n$.

Satz 2.1.9. *Es sei X eine irreduzible Prävarietät.*

(i) *Ist $U \subseteq X$ ein nichtleer und offen, so gilt* $\dim(U) = \dim(X)$.
(ii) *Ist $Y \subseteq X$ lokal abgeschlossen, so gilt* $\dim(Y) \le \dim(X)$.
(iii) *Ist $Y \subseteq X$ abgeschlossen mit* $\dim(Y) = \dim(X)$, *so gilt* $Y = X$.

Beweis. Aussage (i) ergibt sich sofort aus der Tatsache, dass wir nach Satz 2.1.3 einen Isomorphismus $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(U)$ haben.

Zu (ii). Wir wählen wir einen offenen affinen Unterraum $U \subseteq X$ mit $U \cap Y \neq \emptyset$, sodass $U \cap Y$ abgeschlossen in U ist. Aus dem affinen Fall ergibt sich

$$\dim(Y) \;=\; \dim(U \cap Y) \;\le\; \dim(U) \;=\; \dim(X).$$

Zu (iii). Wir wählen einen offenen affinen Unterraum $U \subseteq X$ mit $U \cap Y \neq \emptyset$. Dann ist $Y \cap U$ abgeschlossen in U, und es gilt

$$\dim(U \cap Y) \;=\; \dim(Y) \;=\; \dim(X) \;=\; \dim(U).$$

Das impliziert $U \cap Y = U$. Folglich liegt $U \cap Y$ dicht in X. Damit liegt auch Y dicht in X. Da Y zudem abgeschlossen ist, folgt $Y = X$. □

Folgerung 2.1.10. *Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_n$ ein abgeschlossener Unterraum. Mit den offenen Mengen $U_i = \{[z] \in \mathbb{P}_n;\ z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}_n$ gilt*

$$\dim(X) \quad = \quad \max_{0 \le i \le n} \dim(X \cap U_i).$$

Definition 2.1.11. Eine Prävarietät X heißt *rein n-dimensional* wenn jede irreduzible Komponente von X die Dimension n besitzt.

Beispiel 2.1.12. Es sei $0 \neq f \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]_d$ ein homogenes Polynom vom Grad $d \geq 1$. Dann ist $V_{\mathbb{P}_n}(f)$ rein $(n-1)$-dimensional.

Konstruktion 2.1.13. Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Der *projektive Abschluss* von X ist

$$\overline{X} \;:=\; \overline{\varphi_0(X)} \;\subseteq\; \mathbb{P}_n,$$

wobei $\varphi_0 \colon \mathbb{K}^n \to U_0$, $z \mapsto [1, z_1, \ldots, z_n]$ die 0-te Standardkarte auf dem projektivem Raum $\mathbb{P}_n$ ist. Es gilt

$$\dim(\overline{X}) \;=\; \dim(X).$$

Definition 2.1.14. Es sei $f = \sum a_\nu T^\nu$ ein Polynom in den Variablen $T_1, \ldots, T_n$, und es sei $d := \deg(f)$. Dann nennen wir

$$\overline{f} \;:=\; \sum a_\nu T_0^{d-\nu_1-\ldots-\nu_n} T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n} \;=\; T_0^d f(T_1/T_0, \ldots, T_n/T_0) \;\in\; \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$$

die *Homogenisierung* von f und bezeichnen dabei T_0 auch als die *homogenisierende Variable.*

Beispiel 2.1.15. Das Polynom $1 - T_1T_2 \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$ besitzt die Homogenisierung $T_0^2 - T_1T_2 \in \mathbb{K}[T_0, T_1, T_2]$.

Satz 2.1.16. *Es sei $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom, und es sei $\overline{f} \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ die Homogenisierung. Dann ist der projektive Abschluss $\overline{V(f)} \subseteq \mathbb{P}_n$ gegeben durch $\overline{V_{\mathbb{K}^n}(f)} = V_{\mathbb{P}_n}(\overline{f})$.*

Beweis. Es seien $\pi \colon W_n \to \mathbb{P}_n$ der kanonische Morphismus und $\widehat{U}_0 := \pi^{-1}(U_0)$. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \widehat{U}_0 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[ur, "\widehat{\varphi}_0 \colon z \mapsto (1,z)"] \arrow[r, "\varphi_0 \colon z \mapsto [1,z]"'] & U_0 \end{tikzcd}$$

Insbesondere erhalten wir damit

$$\varphi_0^{-1}(V_{\mathbb{P}_n}(\overline{f} \cap U_0)) \;=\; \widehat{\varphi}_0^{-1}(V_{\mathbb{K}^{n+1}}(\overline{f} \cap \widehat{U}_0)) \;=\; V_{\mathbb{K}^n}(f).$$

Die Inklusion $\overline{V(f)} \subseteq V(\overline{f})$ erhält man dann durch Abschlussbildung aus der Inklusion

$$\varphi_0(V_{\mathbb{K}^n}(f)) \;=\; V_{\mathbb{P}_n}(\overline{f} \cap U_0) \;\subseteq\; V_{\mathbb{P}_n}(\overline{f}).$$

Zum Nachweis der Inklusion $\overline{V(f)} \supseteq V_{\mathbb{P}_n}(\overline{f})$, genügt es zu zeigen, dass irreduzible Komponente von $V(\overline{f})$ die Menge U_0 trifft. Da $\overline{V(f)}$ rein $(n-1)$-dimensional ist, müssen wir nur aussschliessen, dass $\mathbb{P}_n \setminus U_0 = V_{\mathbb{P}_n}(T_0)$ keine Komponente von $\overline{V(f)}$ ist. Andernfalls wäre $V_{\mathbb{K}^{n+1}}(T_0)$ eine Komponente von $V_{\mathbb{K}^{n+1}}(\overline{f})$ und somit T_0 ein Teiler von $\overline{f}$; Widerspruch. □

Erinnerung 2.1.17. Die *Krulldimension* eines topologischen Raumes X ist das Supremum über alle Längen r von Ketten $\emptyset \neq A_0 \subsetneq \ldots \subsetneq A_r$ irreduzibler abgeschlossener Teilmengen $A_i \subseteq X$.

Satz 2.1.18. *Es sei X eine Prävarietät. Dann ist die Dimension* $\dim(X)$ *von X gleich der Krulldimension des topologischen Raumes X.*

Beweis. Es seien $X_1, \ldots X_r \subseteq X$ die irreduziblen Komponenten von X. Dann ist jede aufsteigende Kette irreduzibler Mengen in X in einem X_i enthalten. Somit gilt

$$\mathrm{krulldim}(X) \quad = \quad \max_{i=1,\ldots,r} \mathrm{krulldim}(X_i).$$

Da man für die Dimension von X eine entsprechende Aussage hat, genügt es, die Aussage für irreduzibles X zu beweisen.

Um zu sehen, dass die Krulldimension von X größer oder gleich der Dimension von X ist, wählen wir eine nichtleere affine offene Menge $U \subseteq X$. Dann gibt es eine Kette $\emptyset \neq A_0 \subsetneq \ldots \subsetneq A_n$ mit abgeschlossenen irreduziblen $A_i \subseteq U$, mit $n = \dim(U) = \dim(X)$. Durch Abschlussbildung erhält man eine Kette $\overline{A_0} \subsetneq \ldots \subsetneq \overline{A_n}$ Folglich besitzt X mindestens die Krulldimension $n = \dim(X)$.

Um zu sehen, dass die Krulldimension von X kleiner oder gleich der Dimension von X ist, betrachten wir eine Kette $\emptyset \neq A_0 \subsetneq \ldots \subsetneq A_r$ mit abgeschlossenen irreduziblen $A_i \subseteq X$. Nach Satz 2.1.9 gilt dann jeweils $\dim(A_i) < \dim(A_{i+1})$ und somit $\dim(A_r) \geq r$. Nochmalige Anwendung von Satz 2.1.9 liefert $r \leq \dim(X)$. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 2.1.

Aufgabe 2.1.19. Es sei X eine irreduzible affine Varietät, sodass $\mathcal{O}(X)$ ein faktorieller Ring ist. Zeige: Sind $f, g \in \mathcal{O}(X)$ teilerfremd, so ist X_g der Definitionsbereich der rationalen Funktion $[X_g, f/g] \in \mathbb{K}(X)$.

Aufgabe 2.1.20. Es sei $[U, f] \in \mathbb{K}(\mathbb{P}_n)$ eine nichtkonstante rationale Funktion. Zeige: Der Definitionsbereich U' von $[U, f]$ besitzt ein rein $(n-1)$-dimensionales Komplement $\mathbb{P}_n \setminus U'$.

Aufgabe 2.1.21. Betrachte die affine rationale Raumkurve $\gamma \colon \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}^3$, $z \mapsto (z, z^2, z^3)$ und beweise folgende Aussagen für das Bild $X := \gamma(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^2$:

(i) Es gilt $X = V(f_1, f_2)$ mit $f_1 = T_2 - T_1^2$ und $f_2 = T_3 - T_1 T_2$.
(ii) Der projektive Abschluss $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}_3$ ist eine echte Teilmenge von $V(\overline{f}_1, \overline{f}_2)$.

2.2. **Morphismen I.**

Bemerkung 2.2.1. Es seien X und Y Prävarietäten, und es sei X überdeckt durch offene Mengen $X_1, \ldots, X_r \subseteq X$.

(i) Es seien $\varphi, \psi\colon X \to Y$ Morphismen. Gilt $\varphi_{|X_i} = \psi_{|X_i}$ für $i = 1, \ldots, r$, so gilt $\varphi = \psi$.
(ii) Es seien $\varphi_i\colon X_i \to Y$ Morphismen. Gilt stets $\varphi_{i|X_i \cap X_j} = \varphi_{j|X_i \cap X_j}$, so gibt es einen Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ mit $\varphi_{|X_i} = \varphi_i$ für $i = 1, \ldots, r$.

Satz 2.2.2. *Es seien X eine Prävarietät und Y eine affine Varietät. Dann hat man eine Bijektion*

$$\imath\colon \mathrm{Mor}(X, Y) \ \to \ \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)) \qquad \varphi \ \mapsto \ \varphi^*.$$

Beweis. Es ist klar, dass die Zuordnung wohldefiniert ist. Für den Fall, dass X eine affine Varietät ist, ist die Aussage ein Teil des Antiäquivalenzsatzes. Wir wählen eine Überdeckung von X durch offene affine Mengen $X_1, \ldots, X_r$.

Zum Nachweis der Injektivität von $\imath$ seien Morphismen $\varphi, \psi\colon X \to Y$ mit $\varphi^* = \psi^*$ gegeben. Die Einschränkungen $\varphi_i := \varphi_{|X_i}$ und $\psi_i := \psi_{|X_i}$ erfüllen

$$\varphi_i^*(g) \ = \ \varphi^*(g)_{|X_i} \ = \ \psi^*(g)_{|X_i} \ = \ \psi_i^*(g)$$

für jede Funktion $g \in \mathcal{O}(Y)$. Folglich stimmen die Komorphismen φ_i^* und ψ_i^* jeweils überein, was $\varphi_i = \psi_i$ und somit $\varphi = \psi$ impliziert.

Zum Nachweis der Surjektivität von $\imath$ sei ein Homomorphismus $\alpha\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ gegeben. Dann erhalten wir Homomorphismen

$$\alpha_i\colon \mathcal{O}(Y) \ \to \ \mathcal{O}(X_i), \qquad g \ \mapsto \ \alpha(g)_{|X_i}$$

Diese definieren Morphismen $\varphi_i\colon X_i \to Y$ mit Komorphismus $\varphi_i^* = \alpha_i$. Für je zwei Indizes i, j erhalten wir

$$\varphi_{i|X_i \cap X_j} \quad = \quad \varphi_{j|X_i \cap X_j},$$

da diese Morphismen jeweils den Komorphismus $g \mapsto \alpha(g)_{|X_i \cap X_j}$ besitzen. Folglich lassen sich die φ_i zu einem Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ zusammensetzen. Es gilt

$$\varphi^*(g)_{|X_i} \ = \ \varphi_i^*(g) \ = \ \alpha_i^*(g) \ = \ \alpha_i(g)_{|X_i}$$

für jedes i und jede Funktion $g \in \mathcal{O}(Y)$. Damit sehen wir, dass, wie gewünscht, $\varphi^*(g) = \alpha(g)$ für jedes $g \in \mathcal{O}(Y)$ gilt. □

Definition 2.2.3. Ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ von Prävarietäten heisst *abgeschlossene (offene, lokal abgeschlossene) Einbettung*, falls er ein Isomorphismus auf einen abgeschlossenen (offenen, lokal abgeschlossenen) Unterraum von Y ist.

Satz 2.2.4. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus von Prävarietäten. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ ist eine abgeschlossene Einbettung.*
(ii) *Es gibt affine offene Mengen $V_1, \ldots, V_r \subseteq Y$ mit*
  - $Y = V_1 \cup \ldots \cup V_r$,
  - *jedes $\varphi^{-1}(V_i)$ ist affin,*
  - *jedes $\varphi^*\colon \mathcal{O}(V_i) \to \mathcal{O}(\varphi^{-1}(V_i))$ ist surjektiv.*

Beweis. Gilt (i), so wählen wir eine Überdeckung von Y durch affine offene Mengen $V_1, \ldots, V_r$. Dann ist jedes $V_i \cap \varphi(X)$ eine affine offene Menge in $\varphi(X)$. Somit ist

$$\varphi^{-1}(V_i) \quad = \quad \varphi^{-1}(V_i \cap \varphi(X))$$

offen und affin in X und $\varphi_i \colon \varphi^{-1}(V_i) \to V_i$ ist eine abgeschlossene Einbettung. Insbesondere ist $\varphi^* \colon \mathcal{O}(V_i) \to \mathcal{O}(\varphi^{-1}(V_i))$ surjektiv.

Falls (ii) gilt, so ist jede Einschränkung $\varphi_i \colon \varphi^{-1}(V_i) \to V_i$ von φ eine abgeschlossene Einbettung affiner Varietäten. Insbesondere ist

$$\varphi(X) \cap V_i \quad = \quad \varphi_i(\varphi^{-1}(V_i))$$

abgeschlossen in V_i. Da Y durch die Mengen V_i überdeckt wird, ist $\varphi(X)$ abgeschlossen in X. Zusammensetzen der Umkehrmorphismen $\varphi_i^{-1} \colon \varphi(X) \cap V_i \to V_i$ zu den φ_i ergibt einen Umkehrmorphismus $\varphi^{-1} \colon \varphi(X) \to X$ zu φ. Somit ist φ eine abgeschlossene Einbettung. □

Satz 2.2.5. *Es seien $n, d \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ gegeben, und es sei $N := \binom{n+d}{d} - 1$. Die Veronese-Abbildung*

$$\imath \colon \mathbb{P}_n \ \to \ \mathbb{P}_N, \qquad [z_0, \ldots, z_n] \ \mapsto \ [z_0^d, z_0^{d-1} z_1, \ldots, z_{n-1} z_n^{d-1}, z_n^d],$$

wobei alle Monome $z_0^{\nu_0} \cdots z_n^{\nu_n}$ mit $\nu_0 + \ldots + \nu_n = d$ durchlaufen werden, ist eine abgeschlossene Einbettung und ihr Bild in $\mathbb{P}_N$ ist gegeben durch

$$\imath(\mathbb{P}_n) \ = \ V(T_\nu T_\mu - T_\kappa T_\lambda; \ \mu + \nu = \kappa + \lambda) \ \subseteq \ \mathbb{P}_N,$$

wobei wir die homogenen Variablen auf $\mathbb{P}_N$ durch T_ν, $\nu \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n+1}$ mit $\nu_0 + \ldots + \nu_n = d$, bezeichnen. Insbesondere ist $\imath(\mathbb{P}_n)$ ein Durchschnitt von Quadriken in $\mathbb{P}_N$.

Beweis. Zu $\nu \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n+1}$ mit $\nu_0 + \ldots + \nu_n = d$ betrachten wir die zugehörige affine Karte in $U_\nu \subseteq \mathbb{P}_N$ und ihr Urbild $\imath^{-1}(U_\nu) \subseteq \mathbb{P}_n$; diese sind gegeben durch

$$U_\nu \ = \ \{[z] \in \mathbb{P}_N; \ z_\nu \ne 0\}, \qquad \imath^{-1}(U_\nu) \ = \ \{[z] \in \mathbb{P}_n; \ z^\nu \ne 0\},$$

wobei wir die homogenen Variablen auf $\mathbb{P}_N$ durch T_ν, $\nu \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n+1}$ mit $\nu_0 + \ldots + \nu_n = d$, bezeichnen. Insbesondere ist $\imath^{-1}(U_\nu)$ affin. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(U_\nu) \quad &= \quad \mathbb{K}[T_\mu / T_\nu; \ \mu_0 + \ldots + \mu_n = d], \\ \mathcal{O}(\imath^{-1}(U_\nu)) \quad &= \quad \mathbb{K}[T_i / T_j; \ 0 \le i, j \le n, \ \nu_j \ne 0]. \end{aligned}$$

Zu jedem Paar i, j mit $0 \le i, j \le n$ und $\nu_j \ne 0$ betrachten wir den Vektor $\nu(i, j) := \nu + e_i - e_j$. Damit erhalten wir

$$\imath^*(T_{\nu(i,j)} / T_\nu) \ = \ T^{\nu(i,j)} / T^\nu \ = \ T_i / T_j.$$

Folglich ist $\imath^* \colon \mathcal{O}(U_\nu) \to \mathcal{O}(\imath^{-1}(U_\nu))$ surjektiv. Nach Satz 2.2.4 ist $\imath \colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_N$ eine abgeschlossene Einbettung.

Offenbar verschwindet jedes $T_\nu T_\mu - T_\kappa T_\lambda$ mit $\mu + \nu = \kappa + \lambda$ auf $\imath(\mathbb{P}_n)$ und somit ist $\imath(\mathbb{P}_n)$ im Durchschnitt dieser Quadriken enthalten. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir die homogenen Variablen

$$T(0) \ := \ T_{(d,0,\ldots,0)}, \qquad \ldots, \qquad T(n) \ := \ T_{(0,\ldots,0,d)}$$

und setzen $U(i) := \mathbb{P}_N \setminus V(T(i))$. Dann gilt jeweils $\imath^{-1}(U(T(i))) = U_i$. Insbesondere ist $\imath(\mathbb{P}_n)$ in $U(0) \cup \ldots \cup U(n)$ enthalten. Für $i = 0$ haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[r, "\imath"] \arrow[d] & U(0) \arrow[d] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "z \mapsto (z^\nu; \ \nu_1 + \ldots + \nu_n \le d)"'] & \mathbb{K}^N \end{tikzcd}$$

Unter den Monomen z^ν tauchen dabei auch die Monome z_k, $1 \le k \le n$ auf. Aus diesen bauen wir sukzessive alle anderen auf:

- Für $\nu_1 + \ldots + \nu_n = 2$ erhalten wir $z^\nu = z_k z_l$,
- Für $\nu_1 + \ldots + \nu_n = 3$ erhalten wir $z^\nu = z^\mu z_l$ mit $\mu_1 + \ldots + \mu_n = 2$,

usw.. Für $\nu \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ setzen wir $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$. Homogenisieren der einzelnen Monome der obigen Gleichungen liefert Quadriken der Form

$$T(0)\cdot T_{(d-|\nu|,\nu_1,\ldots,\nu_n)} \quad = \quad T_{(d-|\mu|,\mu_1,\ldots,\mu_n)} T_{(d-1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}.$$

Auf $U(0)$ beschreiben diese Gleichungen das Bild $\imath(U_0)$. Analog erhält man, dass $\imath(U_i)$ auf $U(i)$ durch Quadriken dieser Form beschrieben wird. Insbesondere liegt der Durchschnitt aller Quadriken der Form in $\imath(\mathbb{P}_n)$. □

Bemerkung 2.2.6. Es sei $X = V_{\mathbb{P}_n}(f)$ mit einem homogenen Polynom f vom Grad d. Wir schreiben

$$f \;=\; \sum_{\nu_0+\ldots+\nu_n=d} a_\nu T^\nu, \qquad L \;:=\; \sum_{\nu_0+\ldots+\nu_n=d} a_\nu T_\nu,$$

wobei wir im zweiten Fall den Polynomring $\mathbb{K}[T_\nu; \nu_0 + \ldots + \nu_n = d]$ betrachten. Mit der zu d gehörigen Veronese-Einbettung $\imath\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_N$ gilt dann

$$\imath(V_{\mathbb{P}_n}(f)) \quad = \quad \imath(\mathbb{P}_n) \;\cap\; V_{\mathbb{P}_N}(L).$$

Satz 2.2.7. *Es sei $f \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ homogen vom Grad $d > 0$, und es sei $X := V_{\mathbb{P}_n}(f) \subseteq \mathbb{P}_n$ die zugehörige Hyperfläche. Dann ist $\mathbb{P}_n \setminus X$ affin.*

Beweis. Die Aussage ergibt sich aus Bemerkung 2.2.6: Mittels geeigneter Veronese-Einbettung $\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_N$ erhalten wir

$$\mathbb{P}_n \setminus V(f) \;\cong\; \mathbb{P}_N \setminus V(L) \;\cong\; \mathbb{P}_N \setminus V(T_0).$$

□

Satz 2.2.8. *Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_n$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist X isomorph zu einem Durchschnitt von Quadriken in einem $\mathbb{P}_m$.*

Beweis. Es sei $X = V(f_1, \ldots, f_r)$. Indem wir die f_i durch geeignete Potenzen ersetzen, erreichen wir, dass sie alle denselben Grad d besitzen. Ist $\imath\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_N$ die Veronese-Einbettung zum Grad d, so gilt

$$V(f_1, \ldots, f_r) \quad = \quad \imath^{-1}(V(L_1, \ldots, L_r))$$

mit Linearformen L_i in den Monomen von f_i auf $\mathbb{P}_N$. Weiter ist das Bild $\imath(\mathbb{P}_n)$ als Durchschnitt von Quadriken $V(q_1), \ldots, V(q_s)$ gegeben. Ist $\jmath\colon \mathbb{P}_m \to V(L_1, \ldots, L_r)$ ein Isomorphismus, so erhält man X als Durchschnitt von Quadriken

$$X \quad \cong \quad \jmath^{-1}(V(q_1)) \cap \ldots \cap \jmath^{-1}(V(q_s)).$$

□

Definition 2.2.9. Ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ von Prävarietäten heisst *dominant*, falls sein Bild $\varphi(X)$ dicht in Y ist.

Bemerkung 2.2.10. Jede offene Einbettung irreduzibler Prävarietäten ist ein dominanter Morphismus.

Bemerkung 2.2.11. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus irreduzibler Prävarietäten. Dann hat man einen wohldefinierten Komorphismus

$$\varphi^*\colon \mathbb{K}(Y) \;\to\; \mathbb{K}(X), \qquad [V, g] \;\mapsto\; [\varphi^{-1}(V), \varphi^*(g)].$$

Insbesondere ergibt sich daraus $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)) \ge \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(Y))$ und man erhält $\dim(X) \ge \dim(Y$.

Satz 2.2.12. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus von Prävarietäten. Dann gibt es einen dominanten Morphismus $\psi\colon X \to Z$ von Prävarietäten und eine abgeschlossene Einbettung $\imath\colon Z \to Y$ mit $\varphi = \imath \circ \psi$.*

Beweis. Wir setzen $Z := \overline{\varphi(X)}$. □

Erinnerung 2.2.13. Es seien X und Y affine Varietäten. Ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ heisst *endlich*, falls $\varphi^*(\mathcal{O}(Y)) \subseteq \mathcal{O}(X)$ eine endlich erzeugte Ringerweiterung ist. Bilder abgeschlossener Mengen unter endlichen Morphismen affiner Varietäten sind stets wieder abgeschlossen. Weiter sind dominante Morphismen affiner Varietäten surjektiv und dimensionserhaltend.

Definition 2.2.14. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus von Prävarietäten.

(i) Man nennt $\varphi\colon X \to Y$ *affin*, falls es eine Überdeckung $Y = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ durch offen affine Mengen V_i gibt, sodass jedes $\varphi^{-1}(V_i)$ affin ist.
(ii) Man nennt $\varphi\colon X \to Y$ *endlich*, falls es eine Überdeckung $Y = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ durch offen affine Mengen V_i gibt, sodass jedes $\varphi^{-1}(V_i)$ affin ist und $\varphi^{-1}(V_i) \to V_i$, $x \mapsto \varphi(x)$ ein endlicher Morphismus ist.

Satz 2.2.15. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein endlicher Morphismus von Prävarietäten.*

(i) *Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist auch $\varphi(A) \subseteq Y$ abgeschlossen.*
(ii) *Es gilt* $\dim(X) = \dim(\varphi(X))$.
(iii) *Ist φ dominant, so ist φ surjektiv und $\varphi^*(\mathbb{K}(Y)) \subseteq \mathbb{K}(X)$ ist eine endliche Körpererweiterung.*

Aufgaben zu Abschnitt 2.2.

Aufgabe 2.2.16. Es sei X eine Prävarietät. Dann hat man zueinander inverse Isomorphismen von $\mathbb{K}$-Vektorräumen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mor}(X, \mathbb{K}^n) & \longleftrightarrow & \mathcal{O}(X)^n \\ \varphi & \mapsto & (\pi_1 \circ \varphi, \ldots, \pi_n \circ \varphi). \\ x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)) & \leftarrow\!\shortmid & (f_1, \ldots, f_n) \end{array}$$

Aufgabe 2.2.17. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus von Prävarietäten. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(i) Es gibt affine offene Mengen $V_1, \ldots, V_r \subseteq Y$ mit
- $\varphi(Y) \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_r$,
- jedes $\varphi^{-1}(V_i)$ ist affin,
- jedes $\varphi^*\colon \mathcal{O}(V_i) \to \mathcal{O}(\varphi^{-1}(V_i))$ ist surjektiv.

(ii) Der Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ ist eine lokal abgeschlossene Einbettung.

Aufgabe 2.2.18. Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_2$ eine Quadrik vom Rang 3. Zeige: Es gilt $X \cong \mathbb{P}_1$. *Hinweis*: Veronese-Einbettung.

Aufgabe 2.2.19. Stelle $X = V_{\mathbb{P}_2}(T_0T_2^2 - 4T_1^3 + T_1T_0^2 + T_0^3)$ als Durchschnitt von Quadriken in einem projektiven Raum dar.

Aufgabe 2.2.20. Es sei $f \in \mathbb{K}[T]$ ein Polynom vom Grad 3 bzw. 4. Beschreibe die Nullstellen von f als Schnittpunkte von Quadriken in $\mathbb{P}_3$ bzw. $\mathbb{P}_4$.

2.3. **Affine Tangentialräume.**

Bemerkung 2.3.1. Die Parabel $X = V(f) \subset \mathbb{R}^2$, wobei $f := T_2 - T_1^2$, wird parametrisert durch die Kurve

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (t, t^2).$$

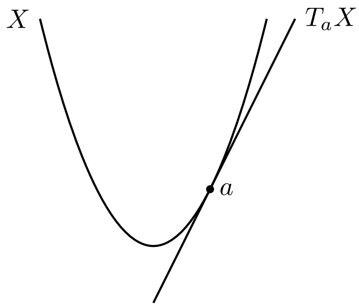
Aus der Analysis weiss man, dass die Tangente T_aX an einen Punkt $a = \gamma(t_0) \in X$ gegeben ist durch

$$T_aX = a + \mathbb{R}\gamma'(t_0).$$

Man kann diese Tangente auch durch die definierende Gleichung ausdrücken: Wegen $f \circ \gamma = 0$ liefert die Kettenregel

$$\langle \mathrm{grad}_f(a), \gamma'(t_0) \rangle = 0.$$

Mit $L_{f,a} := \langle \mathrm{grad}_f(a), T - a \rangle$ ist die Tangente an X in a genau das Nullstellengebilde $V(L_{f,a}) \subseteq \mathbb{R}^2$.



Definition 2.3.2. Für ein gegebenes Polynom $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und einen Punkt $a \in \mathbb{K}^n$ setzen wir

$$L_{f,a} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial T_i}(a)(T_i - a_i) = \langle \mathrm{grad}_f(a), T - a \rangle.$$

Der *affine Tangentialraum* einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ in $a \in X$ ist der affine Unterraum

$$T_a^{\mathrm{aff}} X := V(L_{f,a};\ f \in I(X)) \subseteq \mathbb{K}^n$$

zusammen mit der $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur, die man erhält, indem man für $z = a + v$ und $z' = a + v'$ aus $T_a^{\mathrm{aff}}X$, sowie $c \in \mathbb{K}$ setzt

$$z + z' := a + v + v', \qquad cz := a + cv.$$

Satz 2.3.3. *Es sei $X \in \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Sind $f_1, \ldots, f_r$ Erzeugende für das Ideal $I(X) \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, so gilt für jedes $a \in X$:*

$$T_a^{\mathrm{aff}} X = V(L_{f_1,a}, \ldots, L_{f_r,a}).$$

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $L_{f_1,a}, \ldots, L_{f_r,a}$ dasselbe Ideal in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ erzeugen wie die $L_{f,a}$, wobei $f \in I(X)$. Wir stellen jedes $L_{f,a}$ als Linearkombination der $L_{f_i,a}$ dar: Zu $f \in I(X)$ gibt es $h_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ mit $f = \sum h_i f_i$. Es folgt

$$\begin{aligned}
L_{f,a} &= \langle \mathrm{grad}_f(a), T - a \rangle \\
&= \sum \langle h_i(a)\mathrm{grad}_{f_i}(a), T - a \rangle + \langle f_i(a)\mathrm{grad}_{h_i}(a), T - a \rangle \\
&= \sum \langle h_i(a)\mathrm{grad}_{f_i}(a), T - a \rangle \\
&= \sum h_i(a) L_{f_i,a}.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 2.3.4. (i) Es sei $X = V(T_2 - T_1^2) \subset \mathbb{K}^2$ die Normalparabel. Dann wird $I(X)$ durch das Polynom $T_2 - T_1^2$ erzeugt. Für $a \in X$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_a^{\mathrm{aff}} X &= V(L_{T_2 - T_1^2, a}) \\ &= V(T_2 - a_2 - 2a_1(T_1 - a_1)) \\ &= \{a + (t, 2a_1 t);\ t \in \mathbb{K}\}. \end{aligned}$$

(ii) Es sei $X = V(T_1 T_2) \subset \mathbb{K}^2$ das Achsenkreuz. Dann ist $I(X)$ durch $T_1 T_2$ erzeugt. Für $a \in X$ erhalten wir

$$L_{T_1 T_2, a} = a_2(T_1 - a_1) + a_1(T_2 - a_2).$$

Für die Berechnung des Tangentialraumes von X im Punkte a sind also drei Fälle zu unterscheiden:

$$T_a^{\mathrm{aff}} X = \begin{cases} \mathbb{K} \times \{0\}, & \text{falls } a_2 = 0 \neq a_1, \\ \{0\} \times \mathbb{K}, & \text{falls } a_1 = 0 \neq a_2, \\ \mathbb{K}^2, & \text{falls } a_1 = a_2 = 0. \end{cases}$$

Wir beobachten dabei, dass die Dimension des Tangentialraumes plötzlich nach oben „springen“ kann.

(iii) Es sei $X = V(T_2^2 - T_1^3) \subset \mathbb{K}^2$ die Neilsche Parabel. Das Verschwindungsideal $I(X)$ wird durch $T_2^2 - T_1^3$ erzeugt. Für $a \in X$ gilt

$$L_{T_2^2 - T_1^3, a} = -3a_1^2(T_1 - a_1) + 2a_2(T_2 - a_2).$$

Für den zugehörigen Tangentialraum beobachten wir wieder ein Sprungphänomen: Es gilt

$$T_a^{\mathrm{aff}} X = \begin{cases} \{a + (2a_2 t, 3a_1^2 t);\ t \in \mathbb{K}\}, & \text{falls } a \neq 0, \\ \mathbb{K}^2, & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Satz 2.3.5. *Es sei $X \subset \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge.*

(i) *Es seien $f_1, \ldots, f_r$ Erzeugende des Verschwindungsideals $I(X)$, und es sei $a \in X$. Dann gilt*

$$\dim(T_a^{\mathrm{aff}} X) = n - \mathrm{rg}\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(a)\right)_{1 \le i \le r, 1 \le j \le n}$$

(ii) *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Menge $A_k := \{a \in X;\ \dim(T_a^{\mathrm{aff}} X) \geq k\}$ abgeschlossen in X.*

(iii) *Die Punkte $a \in X$ mit einem Tangentialraum minimaler Dimension bilden eine nichtleere offene Teilmenge von X.*

Beweis. Zunächst zu Aussage (i): Für jeden Punkt $a \in \mathbb{K}^n$ betrachten wir die Matrix

$$M_a := \left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(a)\right)_{1 \le i \le r, 1 \le j \le n}.$$

Liegt a in X, so können wir mit Hilfe dieser Matrix für jeden gegebenen Punkt $z = a + v \in \mathbb{K}^n$ Mitgliedschaft im Tangentialraum wie folgt charakterisieren:

$$\begin{aligned} z \in T_a^{\mathrm{aff}} X &\iff L_{f_1, a}(z) = \ldots = L_{f_r, a}(z) = 0 \\ &\iff \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial T_j}(a) v_j = 0 \text{ für } 1 \le i \le r \\ &\iff M_a \cdot v = 0. \end{aligned}$$

Also ist die Dimension von $T_a^{\mathrm{aff}}X$ gerade die Dimension des Kernes von M_a. Damit ist (i) bewiesen. Zu (ii): In den obigen Bezeichnungen gilt:

$$\begin{aligned} A_k &= \{a \in X;\ \mathrm{rg}(M_a) \le n-k\} \\ &= \{a \in X;\ \det(N_a) = 0 \text{ für alle } (n-k+1)\text{-Minoren } N_a \text{ von } M_a\}. \end{aligned}$$

Insbesondere sehen wir, dass A_k Durchschnitt von X mit einer algebraischen Teilmenge des $\mathbb{K}^n$ ist. Damit folgt (ii). Aussage (iii) ergibt sich sofort aus (ii). □

Definition 2.3.6. Es sei R eine $\mathbb{K}$-Algebra, und es sei $\alpha\colon R \to \mathbb{K}$ ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren. Eine *α-Derivation* von R ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\delta\colon R \to \mathbb{K}$, sodass für je zwei $f, g \in R$ gilt:

$$\delta(fg) = \delta(f)\alpha(g) + \alpha(f)\delta(g).$$

Die Menge aller α-Derivationen wird bezüglich punktweiser Verknüpfungen zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum; wir bezeichnen diesen mit $\mathrm{Der}_\alpha(R)$.

Konstruktion 2.3.7. Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge und $a \in X$. Wir betrachten den Auswertungshomomorphismus

$$\alpha\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}, \qquad f \mapsto f(a).$$

Der Kern von α ist gerade das maximale Ideal $\mathfrak{m}_a \in \mathbb{K}[X]$. Den Vektorraum der α-Derivationen von $\mathbb{K}[X]$ bezeichnet man üblicherweise mit $\mathrm{Der}_a(\mathbb{K}[X])$ und nennt seine Elemente häufig die in *a zentrierten* Derivationen von $\mathbb{K}[X]$. Die Produktregel für ein Element $\delta \in \mathrm{Der}_a(\mathbb{K}[X])$ schreibt sich dann als

$$\delta(fg) \quad = \quad \delta(f)g(a) + f(a)\delta(g).$$

Es sei nun $z = a + v$ ein Element des Tangentialraumes $T_a^{\mathrm{aff}}X$. Wir ordnen z zunächst eine in a zentrierte Derivation des Polynomringes $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ zu, nämlich

$$\varrho_z\colon f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial T_i}(a)v_i = L_{f,a}(z).$$

Da z in $T_a^{\mathrm{aff}}X$ liegt, annuliert diese Derivation das Verschwindungsideal $I(X)$, und induziert somit eine Derivation $\delta_z \in \mathrm{Der}_a(\mathbb{K}[X])$ mit $\delta_z(f|_X) = \varrho_z(f)$. Wir nennen δ_z die zu z gehörige *Richtungsableitung*.

Satz 2.3.8. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge, und es sei $a \in X$. Dann hat man einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen:*

$$T_a^{\mathrm{aff}}X \to \mathrm{Der}_a(\mathbb{K}[X]), \qquad z \mapsto \delta_z.$$

Lemma 2.3.9. *Es seien R eine $\mathbb{K}$-Algebra, $\alpha\colon R \to \mathbb{K}$ ein Homomorphismus, $\mathfrak{m} := \ker(\alpha)$ und $\delta \in \mathrm{Der}_\alpha(R)$.*

(i) *Für jedes $c \in \mathbb{K}$ gilt $\delta(c \cdot 1) = 0$.*
(ii) *Für jedes $g \in \mathfrak{m}^2$ gilt $\delta(g) = 0$.*

Beweis. Behauptung (i) ergibt sich sofort aus der $\mathbb{K}$-Linearität von δ und $\delta(1) = 0$. Letzteres folgt mit der Produktregel: Man hat

$$\delta(1) \;=\; \delta(1 \cdot 1) \;=\; \delta(1)\alpha(1) + \alpha(1)\delta(1) \;=\; 2\delta(1).$$

Zu (ii). Es sei $f \in \mathfrak{m}^2$. Dann gibt es eine Darstellung $f = \sum h_i g_i$ mit $h_i, g_i \in \mathfrak{m}$. Linearität und Produktregel der α-Derivationen liefern

$$\delta(f) \;=\; \delta\left(\sum h_i g_i\right) \;=\; \sum \delta(h_i)\alpha(g_i) + \alpha(h_i)\delta(g_i) \;=\; 0.$$

□

Beweis von Satz 2.3.8. Es ist klar, dass die Zuordnung $z \mapsto \delta_z$ homomorph ist. Wir betrachten im folgenden den kanonischen Epimorphismus

$$\Phi \colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \ \to \ \mathbb{K}[X], \qquad f \ \mapsto \ f|_X.$$

Zu Surjektivität von $z \mapsto \delta_z$: Es sei $\delta \colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ eine in a zentrierte Derivation. Offenbar ist $\delta' := \delta \circ \Phi$ eine in a zentrierte Derivation des Polynomringes $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Wir setzen

$$v \ := \ (\delta'(T_1), \ldots, \delta'(T_n)), \qquad\qquad z \ := \ v + a.$$

Wir behaupten nun, dass $z \in T_a^{\mathrm{aff}} X$ gilt. Dazu müssen wir zeigen, dass für jedes $f \in I(X)$, der lineare Anteil $L_{f,a}$ in z verschwindet. Man beachte dazu, dass

$$\delta'(f) \ = \ \delta(\Phi(f)) \ = \ \delta(0) \ = \ 0$$

gilt. Weiter liefert Taylorentwicklung von f im Punkt a eine Darstellung $f = f(a) + L_{f,a} + g$ mit einem Polynom $g \in \mathfrak{m}_a^2$. Mit Lemma 2.3.9 folgt

$$0 \ = \ \delta'(f) \ = \ \delta'(L_{f,a}) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial T_i}(a)\delta'(T_i) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial T_i}(a) v_i \ = \ L_{f,a}(z).$$

Das beweist $z \in T_{X,a}$. Nach Definition von $z = a + v$ erhalten wir für die Erzeugenden T_i des Polynomrings $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$:

$$\varrho_z(T_i) \ = \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T_i}{\partial T_j}(a)\delta'(T_j) \ = \ \delta'(T_i).$$

Die Produktregel zeigt nun, dass $\delta' = \delta \circ \Phi$ und $\delta_z \circ \Phi$ auf ganz $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ übereinstimmen. Da Φ surjektiv ist, folgt $\delta = \delta_z$.

Zur Injektivität: Es sei $z = v + a \in T_{X,a}$ mit $\delta_z = 0$ gegeben. Dann ist $\varrho_z = \delta_z \circ \Phi$ eine in a zentrierte Derivation des Polynomringes $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, und wir haben

$$0 \ = \ \varrho_z(T_i) \ = \ \frac{\partial T_i}{\partial T_i} v_i \ = \ v_i.$$

Das impliziert $v = 0$. Nach Definition der Vektorraumstruktur auf dem Tangentialraum $T_a^{\mathrm{aff}} X$ ist $z = a$ dort die Null. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 2.3.

Aufgabe 2.3.10. Es sei R eine $\mathbb{K}$-Algebra. Zeige: Die Menge aller maximalen Ideale von R steht in kanonischer Bijektion zu $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(R, \mathbb{K})$.

Aufgabe 2.3.11. Es sei $X = a + W$ mit einem Punkt $a \in \mathbb{K}^n$ und einem Untervektorraum $W \subset \mathbb{K}^n$. Zeige: Es gilt $T_a^{\mathrm{aff}} X = X$.

Aufgabe 2.3.12 (Tangentialbündel)**.** Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Zeige, dass

$$TX \ := \ \bigcup_{a \in X} \{a\} \times T_a^{\mathrm{aff}} X \ \subseteq \ \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$$

eine algebraische Menge ist. Zeige weiter, dass $\pi \colon TX \to X$, $(a, v) \mapsto a$ ein Morphismus ist mit $\pi^{-1}(a) = T_a^{\mathrm{aff}} X$ für jedes $a \in X$.

Aufgabe 2.3.13. Es seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und $X := V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \mathbb{K}^n$, sodass jedes $a \in X$

$$T_a^{\mathrm{aff}} X = V(L_{f_1,a}, \ldots, L_{f_k,a})$$

erfüllt. Gilt dann notwendigerweise $I(X) = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$? *Hinweis.* Betrachte $f_1 := T_1^9 - T_2^6$ und $f_2 := T_1^6 - T_2^4$ in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$.

2.4. **Tangentialräume und Singularitäten.**

Erinnerung 2.4.1. Es sei X eine Prävarietät. Der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ in einem Punkt $x \in X$ ist definiert als

$$\mathcal{O}_{X,x} \quad := \quad \left(\bigsqcup_{x \in U \subseteq X} \mathcal{O}_X(U) \right) \Big/ \sim,$$

wobei U die offenen Umgebungen von x in X durchläuft, und die Äquivalenzrelation "$\sim$" erklärt ist durch

$$\mathcal{O}_X(U) \ni f \;\simeq\; f' \in \mathcal{O}_X(U') \quad \Longleftrightarrow \quad f_{|V} \;=\; f'_{|V} \text{ mit } x \in V \subseteq U \cap U' \text{ offen.}$$

Für $f \in \mathcal{O}_X(U)$ nennt man die zugehörige Restklasse $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ den *Keim* in x. Der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ wird eine $\mathbb{K}$-Algebra durch

$$f_x + f'_x \;:=\; (f + f')_x, \qquad f_x \cdot f'_x \;:=\; (f \cdot f')_x.$$

Dabei sind die Repräsentanten f, f' für die Summen- und Produktbildung geeignet einzuschränken. Man hat einen wohldefinierten Auswertungshomomorphismus

$$\alpha \colon \mathcal{O}_{X,x} \;\to\; \mathbb{K}, \qquad f_x \;\mapsto\; f(x).$$

Bemerkung 2.4.2. Es seien X eine Prävarietät und $x \in X$. Dann besitzt $\mathcal{O}_{X,x}$ ein eindeutig bestimmtes maximales Ideal

$$\mathfrak{m}_{X,x} \;:=\; \ker(\alpha) \;=\; \{h_x \in \mathcal{O}_{X,x};\ h(x) = 0\} \;\subseteq\; \mathcal{O}_{X,x}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring. Ist X affin, so hat man mit $\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{O}_X(X);\ f(x) = 0\}$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x} \;\to\; \mathcal{O}_{X,x}, \qquad \frac{f}{g} \;\mapsto\; \left(\frac{f}{g}\right)_x.$$

Konstruktion 2.4.3. Es seien X eine Prävarietät, $x \in X$ und $\alpha \colon \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{K}$, $f_x \mapsto f(x)$ der Auswertungshomomorphismus. Der $\mathbb{K}$-Vektorraum der *Derivationen* auf $\mathcal{O}_{X,x}$ ist

$$\operatorname{Der}(\mathcal{O}_{X,x}) \quad := \quad \operatorname{Der}_\alpha(\mathcal{O}_{X,x}).$$

Eine Derivation auf dem Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ist also eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\delta \colon \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{K}$, die folgender Produktregel genügt:

$$\delta(f_x g_x) \quad = \quad \delta(f_x) g(x) + f(x) \delta(g_x).$$

Definition 2.4.4. Es sei X eine Prävarietät. Der *Tangentialraum* von X in einem Punkt $x \in X$ ist definiert als

$$T_{X,x} \quad := \quad \operatorname{Der}(\mathcal{O}_{X,x}).$$

Bemerkung 2.4.5. Es seien R eine $\mathbb{K}$-Algebra, $\alpha \colon R \to \mathbb{K}$ ein Homomorphismus und $\mathfrak{m} := \ker(\alpha)$. Dann liefert die universelle Eigenschaft der Lokalisierung einen Homomorphismus

$$\alpha_{\mathfrak{m}} \colon R_{\mathfrak{m}} \;\to\; \mathbb{K}, \qquad \frac{f}{g} \;\mapsto\; \frac{\alpha(f)}{\alpha(g)}.$$

Satz 2.4.6. *Es seien R eine $\mathbb{K}$-Algebra, $\alpha \colon R \to \mathbb{K}$ ein $\mathbb{K}$-Algebrenhomomorphismus und $\mathfrak{m} := \ker(\alpha)$. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus*

$$\varphi \colon \operatorname{Der}_\alpha(R) \;\to\; \operatorname{Der}_{\alpha_{\mathfrak{m}}}(R_{\mathfrak{m}}), \qquad \delta \;\mapsto\; \left[\varphi(\delta) \colon \frac{r}{s} \mapsto \frac{\delta(r)\alpha(s) - \alpha(r)\delta(s)}{\alpha(s)^2} \right].$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass φ überhaupt wohldefiniert ist. Dazu seien $r, r' \in R$ und $s, s' \in R \setminus \mathfrak{m}$ mit $r/s = r'/s'$ gegeben. Nach Definition von $R_\mathfrak{m}$ gibt es ein $u \in R \setminus \mathfrak{m}$ mit $u(rs' - r's) = 0$. Mit $\alpha(u) \neq 0 \in \mathbb{K}$ folgt

$$\alpha(r)\alpha(s') = \alpha(r')\alpha(s).$$

Durch Anwenden von δ auf die Gleichung $u(rs' - r's) = 0$ ergibt sich mit der Produktregel

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(u(rs' - r's)) \\ &= \delta(u)\Big(\alpha(r)\alpha(s') - \alpha(r')\alpha(s)\Big) \\ &\quad + \alpha(u)\Big((\delta(r)\alpha(s') + \alpha(r)\delta(s')) - (\delta(r')\alpha(s) + \alpha(r')\delta(s))\Big). \end{aligned}$$

Wegen $\alpha(r)\alpha(s') = \alpha(r')\alpha(s)$ erhalten wir

$$\delta(r)\alpha(s') + \alpha(r)\delta(s') = \delta(r')\alpha(s) + \alpha(r')\delta(s).$$

Folglich gilt

$$\delta(r)\alpha(s') - \alpha(r')\delta(s) = \delta(r')\alpha(s) - \alpha(r)\delta(s').$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\alpha(s)^{-1}\alpha(s')^{-1}$, so hat man

$$\frac{\delta(r)\alpha(s) - \alpha(r)\delta(s)}{\alpha(s)^2} = \frac{\delta(r')\alpha(s') - \alpha(r')\delta(s')}{\alpha(s')^2}.$$

Die Definition von φ hängt also nicht von der Wahl der Repräsentanten ab. Weiter ist klar, dass $\varphi(\delta)$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist und auf $\mathbb{K} \subset R_\mathfrak{m}$ verschwindet. Zur Produktregel:

$$\begin{aligned} \varphi(\delta)\left(\frac{r}{s}\frac{r'}{s'}\right) &= \frac{\delta(rr')\alpha(ss') - \delta(ss')\alpha(rr')}{\alpha(ss')^2} \\ &= \frac{(\delta(r)\alpha(r') + \alpha(r)\delta(r'))\alpha(ss') - (\delta(s)\alpha(s') + \alpha(s)\delta(s'))\alpha(rr')}{\alpha(ss')^2} \\ &= \frac{\delta(r)\alpha(s) - \delta(s)\alpha(r)}{\alpha(s)^2}\frac{\alpha(r')}{\alpha(s')} + \frac{\alpha(r)}{\alpha(s)}\frac{\delta(r')\alpha(s') - \alpha(r')\delta(s')}{\alpha(s')^2} \\ &= \varphi(\delta)\left(\frac{r}{s}\right)\alpha_\mathfrak{m}\left(\frac{r'}{s'}\right) + \alpha_\mathfrak{m}\left(\frac{r}{s}\right)\varphi(\delta)\left(\frac{r'}{s'}\right). \end{aligned}$$

Also ist $\varphi(\delta)$ tatsächlich eine $\alpha_\mathfrak{m}$-Derivation von $R_\mathfrak{m}$. Aus der Definition von φ ist unmittelbar ersichtlich, dass φ ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen ist. Zur Injektivität: Es sei $\varphi(\delta) = 0$. Dann gilt

$$0 = \varphi(\delta)\left(\frac{r}{1}\right) = \delta(r)$$

für alle $r \in R$. Somit gilt $\delta = 0$. Zur Surjektivität: Es sei $\delta' \in \mathrm{Der}_{\alpha_\mathfrak{m}}(R_\mathfrak{m})$ gegeben. Dann definiert $\delta(r) := \delta'(r/1)$ eine α-Derivation auf R. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\delta)\left(\frac{r}{s}\right) &= \frac{\delta'\left(\frac{r}{1}\right)\alpha(s) - \alpha(r)\delta'\left(\frac{s}{1}\right)}{\alpha(s)^2} \\ &= \delta'\left(\frac{r}{1}\right)\alpha_\mathfrak{m}\left(\frac{1}{s}\right) - \alpha_\mathfrak{m}\left(\frac{r}{1}\right)\delta'\left(\frac{s}{1}\right)\alpha_\mathfrak{m}\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= \delta'\left(\frac{r}{1}\right)\alpha_\mathfrak{m}\left(\frac{1}{s}\right) + \alpha_\mathfrak{m}\left(\frac{r}{1}\right)\delta'\left(\frac{1}{s}\right) \\ &= \delta'\left(\frac{r}{s}\right). \end{aligned}$$

Für die zweitletzte Gleichung beachte man, dass $\delta'(s/s) = 0$ gilt. Somit ergibt die Produktregel $\delta'(1/s) = -\delta'(s/1)\alpha_\mathfrak{m}(1/s^2)$. □

Folgerung 2.4.7. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge, $x \in X$ ein Punkt $\alpha\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(x)$ der Auswertungshomomorphismus und $\mathfrak{m}_x = \ker(\alpha)$ das zugehörige maximale Ideal. Dann hat man kanonische Isomorphismen*

$$T_x^{\mathrm{aff}} X \;\cong\; \mathrm{Der}_\alpha(\mathcal{O}_X(X)) \;\cong\; \mathrm{Der}_{\alpha_{\mathfrak{m}_x}}(\mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x}) \;\cong\; \mathrm{Der}(\mathcal{O}_{X,x}) \;=\; T_{X,x}.$$

Beweis. Die Aussagen ergeben sich sofort mit den Sätzen 2.3.8 und 2.4.6. □

Beispiel 2.4.8. Für jeden Punkt $a \in \mathbb{K}^n$ hat man kanonische Isomorphismen

$$T_{\mathbb{K}^n,a} \;\cong\; T_a^{\mathrm{aff}}\mathbb{K}^n \;=\; V(L_{f,a}; f \in I(\mathbb{K}^n)) \;=\; \mathbb{K}^n.$$

Satz 2.4.9. *Es seien R eine $\mathbb{K}$-Algebra, $\alpha\colon R \to \mathbb{K}$ ein $\mathbb{K}$-Algebrenhomomorphismus und $\mathfrak{m} := \ker(\alpha)$. Dann hat man einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen:*

$$\mathrm{Der}_\alpha(R) \;\to\; (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*, \qquad \delta \;\mapsto\; [u_\delta\colon f + \mathfrak{m}^2 \mapsto \delta(f)].$$

Beweis. Nach Lemma 2.3.9 ist $\delta \mapsto u_\delta$ ein wohldefinierter Homomorphismus. Zur Injektivität: Es sei $\delta \in \mathrm{Der}_\alpha$ mit $u_\delta = 0$. Für jedes $f \in R$ erhalten wir dann

$$\delta(f) \;=\; \delta(f - \alpha(f)) + \delta(\alpha(f)) \;=\; u_\delta(f - \alpha(f) + \mathfrak{m}^2) + \delta(\alpha(f)) \;=\; 0.$$

Zur Surjektivität: Es sei $u\colon \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional. Wir definieren eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung

$$\delta\colon R \;\to\; \mathbb{K}, \qquad f \;\mapsto\; u(f - \alpha(f) + \mathfrak{m}^2).$$

Dies ist sogar eine α-Derivation: Da δ auf $\mathbb{K} \subseteq R$ sowie $\mathfrak{m}^2 \subseteq R$ verschwindet, erhält man die Die Produktregel durch Anwenden von δ auf

$$fg - \alpha(fg) \quad=\quad (f - \alpha(f))\alpha(g) + \alpha(f)(g - \alpha(g)) \;+\; (f - \alpha(f))(g - \alpha(g)).$$

Schließlich gilt $u = u_\delta$, denn für ein Element $f + \mathfrak{m}^2$ in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ hat man nach Konstruktion:

$$u_\delta(f + \mathfrak{m}^2) \;=\; \delta(f) \;=\; u(f - \alpha(f) + \mathfrak{m}^2) \;=\; u(f + \mathfrak{m}^2).$$

□

Folgerung 2.4.10. *Es seien X eine Prävarietät und $x \in X$. So hat man einen kanonischen Isomorphismus*

$$T_{X,x} \;=\; \mathrm{Der}(\mathcal{O}_{X,x}) \;\cong\; (\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2)^*.$$

Ist X affin und $\alpha\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(x)$ der Auswertungshomomorphismus, so hat man weitere kanonische Isomorphismen

$$T_{X,x} \;\cong\; \mathrm{Der}_\alpha(\mathcal{O}_X(X)) \;\cong\; (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*.$$

Konstruktion 2.4.11. Es seien $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus von Prävarietäten, $x \in X$ und $y := \varphi(x) \in Y$. Dann hat man einen Homomorphismus

$$\varphi_x^*\colon \mathcal{O}_{Y,y} \;\to\; \mathcal{O}_{X,x}, \qquad g_y \;\mapsto\; (g \circ \varphi)_x$$

der Halme in x bzw. y. Damit definiert man das *Differential* von φ im Punkt x:

$$T_{\varphi,x}\colon T_{X,x} \;\to\; T_{Y,y}, \qquad \delta \;\mapsto\; [\delta \circ \varphi_x^*\colon g_y \mapsto \delta\varphi_x^*(g_y)].$$

Das Differential ist funktoriell, d.h. wir haben stets $T_{\mathrm{id}_X,x} = \mathrm{id}_{T_{X,x}}$ und $T_{\psi\circ\varphi,x} = T_{\psi,\varphi(x)} \circ T_{\varphi,x}$.

Definition 2.4.12. Es seien X eine Prävarietät und $x \in X$.

(i) Man nennt $x \in X$ einen *glatten (auch regulären) Punkt* von X, falls es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt mit

$$\dim(T_{X,u}) \; = \; \dim(T_{X,x}) \text{ für alle } u \in U.$$

Die Menge aller glatten Punkte von X bezeichnen wir mit X^{reg}. Man nennt X *glatt*, falls $X = X^{\mathrm{reg}}$ gilt.

(ii) Man nennt $x \in X$ *singulär* bzw. eine *Singularität*, falls x kein glatter Punkt. Die Menge der singulären Punkte von X bezeichnen wir mit X^{sing}.

Satz 2.4.13. *Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge mit Verschwindungsideal $I(X) = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$, und es sei $x_0 \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Punkt $x_0 \in X$ ist glatt.*
(ii) *Die Funktion $x \mapsto \dim(T_{X,x})$ besitzt ein lokales Minimum in x_0.*
(iii) *Der Rang der Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(x)\right)$ besitzt ein lokales Maximum in x_0.*

Beweis. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ergibt sich direkt aus Satz 2.3.5. Die Implikation „(i)⇒(ii)“ ist offensichtlich.

Zur Implikation „(ii)⇒(i)“. Es sei $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von x_0, sodass $k := \dim(T_{X,x_0})$ ein Minimum für $x \mapsto \dim(T_{X,x})$ auf U ist. Nach Satz 2.3.5 ist

$$A_{k+1} \quad := \quad \{x \in X;\ \dim(T_{X,x}) \geq k+1\}$$

abgeschlossen in X. Folglich ist $U' := U \setminus A$ eine offene Umgebung von x_0 in X, und $x \mapsto \dim(T_{X,x})$ ist konstant auf U'. □

Bemerkung 2.4.14. Es seien X eine Prävarietät, $x \in X$ und $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von X. Es gilt

$$x \in X^{\mathrm{reg}} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in U^{\mathrm{reg}}.$$

Weiter sei $X = U_1 \cup \ldots \cup U_r$ mit offenen Mengen $U_i \subseteq X$. Es ist X genau dann glatt, wenn jedes U_i glatt ist.

Beispiele 2.4.15. (i) $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{P}_n = U_0 \cup \ldots \cup U_n$ sind glatt.
(ii) Die Normalparabel $X = V(T_2 - T_1^2) \subset \mathbb{K}^2$ ist glatt.
(iii) Für das Achsenkreuz $X = V(T_1 T_2) \subset \mathbb{K}^2$ gilt $X^{\mathrm{sing}} = \{0\}$.
(iv) Für die Neilsche Parabel $X = V(T_2^2 - T_1^3) \subset \mathbb{K}^2$ gilt $X^{\mathrm{sing}} = \{0\}$.

Satz 2.4.16. *Es sei X eine Prävarietät.*

(i) *Die Menge X^{sing} der singulären Punkte ist abgeschlossen in X.*
(ii) *Die Menge X^{reg} der glatten Punkte ist offen und dicht in X.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass X affin ist. Nach Definition ist Glattheit offene Bedingung. Also ist X^{reg} offen in X und das Komplement $X^{\mathrm{sing}} = X \setminus X^{\mathrm{reg}}$ ist abgeschlossen in X.

Es ist also nur zu zeigen, dass X^{reg} dicht in X liegt. Dazu seien $X_1, \ldots, X_r$ die irreduziblen Komponenten von X. Wir zeigen zunächst, dass $U_i := X^{\mathrm{reg}} \cap X_i$ dicht in X_i liegt. Dazu betrachten wir

$$V_i \quad := \quad X \;\setminus\; \bigcup_{i \neq j} X_j.$$

Dann ist V_i nicht leer, denn sonst könnte man X als Vereinigung von $r-1$ irreduziblen Teilmengen darstellen. Weiter ist V_i offen in X, und es gilt $V_i \subseteq X_i$.

Es bezeichne $V_i' \subseteq X_i$ die Menge aller Punkte $x \in X_i$, für die $\dim(T_{X_i,x})$ minimal in X_i ist. Dann ist V_i' eine nichtleere offene Teilmenge von X_i. Wir betrachten weiter die Mengen

$$V_i'' \quad := \quad V_i \ \cap \ V_i'.$$

Wegen der Irreduzibilität von X_i ist diese Menge nicht leer. Da V_i offen in X ist, muss auch V_i'' offen in X sein. Insbesondere erhalten wir $\mathcal{O}_{X_i}(V) = \mathcal{O}_X(V)$ für jede offene Teilmenge $V \subset V_i''$. Das impliziert

$$\mathcal{O}_{X_i,x} \ \cong \ \mathcal{O}_{X,x} \text{ für alle } x \in V_i''.$$

Foglich stimmen $\dim(T_{X_i,x})$ und $\dim(T_{X,x})$ für jeden Punkt x aus V_i'' überein. Nach Wahl von V_i'' ist dort die Funktion $x \to \dim(T_{X,x})$ konstant. Das bedeutet

$$V_i'' \ \subseteq \ U \cap X_i \ = \ U_i.$$

Folglich ist U_i nicht leer und liegt somit dicht in der irreduziblen Komponente X_i. Damit können wir den Beweis beenden: Es gilt

$$X \ = \ \bigcup_{i=1}^{r} X_i \ = \ \bigcup_{i=1}^{r} \overline{U_i} \ \subseteq \ \overline{X^{\text{reg}}}.$$

□

Aufgaben zu Abschnitt 2.4.

Aufgabe 2.4.17. Es sei R eine lokale $\mathbb{K}$-Algebra mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$. Zeige: Hat man eine Zerlegung $R = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}$, so gibt es genau einen $\mathbb{K}$-Algebrenhomomorphismus $R \to \mathbb{K}$, und dieser ist

$$\alpha\colon R \ \to \ \mathbb{K}, \qquad f = a \oplus f' \ \mapsto \ a.$$

Aufgabe 2.4.18. Es sei X eine affine Varietät, und es sei $x \in X$. Zeige: Die kanonische Abbildung $\mathfrak{m}_x \to \mathfrak{m}_{X,x}$, $f \mapsto f_x$ induziert einen Vektorraumisomorphismus $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$.

Aufgabe 2.4.19. Bestimme die Singularitätenmengen der projektiven Abbschlüsse (in $\mathbb{P}_2$) von

$$V(T_1T_2) \ \subseteq \ \mathbb{K}^2, \qquad\qquad V(T_1^3 - T_2^2) \ \subseteq \ \mathbb{K}^2.$$

Aufgabe 2.4.20. Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_3$ eine Quadrik vom Rang 3. Zeige: X besitzt genau eine Singularität x_0 und es gibt eine abgeschlossene Untervarietät $X' \subseteq \mathbb{P}_3$ mit

$$X' \cong \mathbb{P}_1, \qquad x_0 \not\in X', \qquad X = \bigcup_{x' \in X'} L(x_0, x'),$$

wobei $L(x_0, x') \subseteq \mathbb{P}_3$ die Gerade durch die Punkte $x_0, x' \in \mathbb{P}_3$ bezeichnet; d.h., X ist der projektive Kegel in $\mathbb{P}_3$ über einem $\mathbb{P}_1$.

Aufgabe 2.4.21. In $\mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^4$ betrachte die abgeschlossene (affine) Untervarietät $X := \mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{K}) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. Bestimme die Singularitätenmenge X^{sing}.

Aufgabe 2.4.22. Es seien paarweise nicht assozierte Primelemente $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben. Dann besitzt $X := V(f_1 \cdots f_r)$ die irreduziblen Komponenten $X_i := V(f_i)$, wobei $i = 1, \ldots, r$. Zeige:

$$X^{\mathrm{sing}} \quad = \quad \bigcup_i X_i^{\mathrm{sing}} \ \cup \ \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j).$$

Aufgabe 2.4.23. Es sei $0 \neq f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein klassisch homogenes Polynom vom Grad d und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) Es gilt $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\langle f \rangle \cong \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}]$.
(ii) Es gilt $d = 1$.

3. Produkte und Separiertheit

3.1. **Produkte I.**

Definition 3.1.1. Es seien X und Y Objekte einer Kategorie $\mathfrak{C}$. Ein *Produkt* für X und Y in $\mathfrak{C}$ ist ein Objekt W in $\mathfrak{C}$ zusammen mit Morphismen $\pi_X : W \to X$ und $\pi_Y : W \to Y$, sodass folgendes gilt:

(PR) Ist Z ein Objekt in $\mathfrak{C}$ und sind $\varphi\colon Z \to X$ sowie $\psi\colon Z \to Y$ Morphismen, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\kappa\colon Z \to W$, mit dem das folgende Diagramm kommutativ wird

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X & & Y \\ & Z \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] \arrow[uu, "\kappa"] & \end{tikzcd}$$

Beispiel 3.1.2. In der Kategorie der Mengen ist das kartesische Produkt $X \times Y$ mit den beiden Projektionen $X \times Y \to X$ und $X \times Y \to Y$ ein Produkt in obigem Sinn.

Bemerkung 3.1.3. Sofern es existiert, ist das Produkt zweier Objekte X, Y einer Kategorie durch die Eigenschaft (PR) bis auf Isomorphie festgelegt; man bezeichnet es daher auch mit $X \times Y$.

Satz 3.1.4 (Produkt in der Kategorie algebraischer Mengen)**.** *Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen. Dann ist $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{n+m}$ eine algebraische Menge,*

$$\pi_X : X \times Y \to Y,\ (x, y) \mapsto x, \qquad \pi_Y : X \times Y \to Y,\ (x, y) \mapsto y$$

sind algebraische Abbildungen und $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{n+m}$ ist zusammen mit π_X und π_Y ist ein Produkt für $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ in der Kategorie der algebraischen Mengen. Weiter gilt

$$\mathbb{K}[X \times Y] \quad = \quad \mathbb{K}[\pi_X^*(f),\, \pi_Y^*(g);\ f \in \mathbb{K}[X],\, g \in \mathbb{K}[Y]].$$

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{n+m}$ eine algebraische Menge ist und dass die Projektionen π_X und π_Y algebraische Abbildungen sind. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X \times Y] &= \mathbb{K}[T_{i|X\times Y}, S_{j|X\times Y};\ 1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m] \\ &= \mathbb{K}[\pi_{\mathbb{K}^n}^*(T_i)_{|X\times Y},\, \pi_{\mathbb{K}^m}^*(S_j)_{|X\times Y};\ 1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m] \\ &= \mathbb{K}[\pi_X^*(f),\, \pi_Y^*(g);\ f \in \mathbb{K}[X],\, g \in \mathbb{K}[Y]]. \end{aligned}$$

Zum Nachweis der Eigenschaft (PR) seien eine algebraische Menge $Z \subseteq \mathbb{K}^l$ und algebraische Abbildungen $\varphi\colon Z \to X$ sowie $\psi\colon Z \to Y$ gegeben. Dann sind φ und ψ Einschränkungen polynomialer Abbildungen $\Phi\colon \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^m$ bzw. $\Psi\colon \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^n$. Die gesuchte algebraische Abbildung ist

$$\kappa\colon Z \ \to\ X \times Y, \qquad z \ \mapsto\ (\Phi(x), \Psi(y)).$$

$\square$

Erinnerung 3.1.5 (Tensorprodukt)**.** Es seien R ein K1-Ring und M, N zwei R-Moduln.

Das *Tensorprodukt* von M und N über R wird folgendermaßen konstruiert. In einem ersten Schritt betrachtet man den "freien R-Modul" über der Menge $M \times N$:

$$F(M \times N) \quad := \quad \bigoplus_{(u,v) \in M \times N} R \cdot (u,v), \qquad \text{wobei } R \cdot (u,v) \cong R.$$

Dann bildet man in $F(M \times N)$ den R-Untermodul $B(M \times N) \subseteq F(M \times N)$ der "bilinearen Relationen"; dieser wird definitionsgemäß erzeugt durch die Elemente

$$\begin{array}{ll} (au,v) - a(u,v), & u \in M,\ v \in N,\ a \in R, \\ (u+u',v) - (u,v) - (u',v), & u,u' \in M,\ v \in N, \\ (u,av) - a(u,v), & u \in M,\ v \in N,\ a \in R, \\ (u,v+v') - (u,v) - (u,v'), & u \in M,\ v,v' \in N. \end{array}$$

Das *Tensorprodukt* von M und N ist dann der Restklassenmodul von $F(M \times N)$ nach $B(M \times N)$:

$$M \otimes_R N \quad := \quad F(M \times N)/B(M \times N).$$

Man schreibt $u \otimes v$ für die Restklasse $(u,v) + B(M \times N)$. Das allgemeine Element von $M \otimes_R N$ eine endliche Summe $\sum u_i \otimes v_i$ und man hat eine bilineare Abbildung

$$\Pi \colon M \times N \ \to \ M \otimes_R N, \qquad (u,v) \ \mapsto \ u \otimes v.$$

Das Tensorprodukt erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder *bilinearen* Abbildung $\varphi \colon M \times N \to L$ gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\Pi"'] & & L \\ & M \otimes_R N \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

mit einer eindeutig bestimmten *linearen* Abbildung $\widetilde{\varphi} \colon M \otimes_R N \to L$; diese ist explizit gegeben durch

$$\widetilde{\varphi}(u_1 \otimes v_1 + \ldots + u_r \otimes v_r) \quad = \quad \varphi(u_1,v_1) + \ldots + \varphi(u_r,v_r).$$

Konstruktion 3.1.6 (Koprodukt in der Kategorie der Algebren)**.** Es seien A und B zwei $\mathbb{K}$-Algebren. Wir betrachten das Tensorprodukt

$$R \quad = \quad A \otimes_{\mathbb{K}} B.$$

Dies ist a priori nur ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir führen eine Multiplikation ein, indem wir zunächst setzen

$$(f \otimes g) \cdot (f' \otimes g') \quad := \quad ff' \otimes gg'.$$

Mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts prüft man nach, dass sich dies (eindeutig und wohldefiniert) zu einer Multiplikation auf R fortsetzen lässt, welche R zu einer $\mathbb{K}$-Algebra macht. Weiter hat man kanonische Homomorphismen

$$\imath_A \colon A \to R,\ f \mapsto f \otimes 1, \qquad \imath_B \colon B \to R,\ g \mapsto 1 \otimes g.$$

Zusammen mit diesen Homomorphismen erfüllt das Tensorprodukt R die folgende universelle Eigenschaft:

(KoPR) Sind eine $\mathbb{K}$-Algebra C und Homomorphismen $\varphi\colon A \to C$ sowie $\psi\colon B \to C$ gegeben, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\mu\colon R \to C$ mit dem das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dd, "\mu"] & \\
A \arrow[ur, "\imath_A"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B \arrow[ul, "\imath_B"'] \arrow[dl, "\psi"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

kommutativ wird. Tatsächlich kann man den Homomorphismus $\varphi\colon R \to C$ direkt angeben; er ist definiert durch

$$\mu\colon R \ \to \ C, \qquad f \otimes g \ \mapsto \ \varphi(f)\psi(g).$$

Satz 3.1.7. *Es seien X und Y affine Varietäten. Dann besitzt das kartesische Produkt $X \times Y$ die Struktur einer affinen Varietät, sodass es zusammen mit*

$$\pi_X\colon X \times Y \ \to \ X, \ (x,y) \mapsto x, \qquad \pi_X\colon X \times Y \ \to \ Y, \ (x,y) \mapsto y$$

zu einem Produkt für die affinen Varietäten X und Y wird. Weiter hat man einen kanonischen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_Y(Y) \ &\to \ \mathcal{O}_{X\times Y}(X \times Y), \\ \sum f_i \otimes g_i \ &\mapsto \ \sum \pi_X^*(f_i)\pi_Y^*(g_i). \end{aligned}$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall, dass $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ algebraische Mengen sind. Nach Satz 3.1.4 ist dann $X \times Y \subseteq \mathbb{K}^{m+n}$ zusammen mit den Projektionen π_X und π_Y ein Produkt in der Kategorie der algebraischen Mengen.

Die Abbildung μ ist der durch die universelle Eigenschaft (Kopr) des Tensorproduktes gegebene Algebrenhomomorphismus zu

$$\pi_X^*\colon \mathbb{K}[X] \ \to \ \mathbb{K}[X \times Y], \qquad \pi_Y^*\colon \mathbb{K}[Y] \ \to \ \mathbb{K}[X \times Y].$$

Die Surjektivität von μ ergibt sich sofort aus der Tatsache, dass $\mathbb{K}[X \times Y]$ gemäß Satz 3.1.4 erzeugt wird von den Funktionen

$$\pi_X^*(f) = \mu(f \otimes 1), \ f \in \mathbb{K}[X], \qquad \pi_Y^*(g) = \mu(1 \otimes g), \ g \in \mathbb{K}[Y].$$

Um zu sehen, dass μ injektiv ist, betrachten wir ein $h = \sum f_i \otimes g_i$ mit $\mu(h) = 0$. Dabei darf man annehmen, dass die g_i eine über $\mathbb{K}$ linear unabhängige Familie bilden. Für festes $x \in X$ hat man

$$0 \ = \ \mu(h)(x, ?) \ = \ \sum f_i(x)g_i \ \in \ \mathbb{K}[Y].$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der g_i bedeutet dies $f_i(x) = 0$ für alle i. Das geht für jedes $x \in X$, und man erhält $f_i = 0$ für alle i. Das impliziert $h = 0$ und folglich ist μ injektiv.

Wir kommen zum allgemeinen Fall. Die affinen Varietäten X und Y sind, als Räume mit Funktionen, isomorph zu algebraischen Mengen $X' \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y' \subseteq \mathbb{K}^m$, etwa vermöge

$$\imath\colon X \ \to \ X', \qquad \jmath\colon \ Y \to \ Y'.$$

Wir wissen bereits, dass $X' \times Y'$ eine affine Varietät ist, und diese Struktur transportieren wir nun nach $X \times Y$ vermöge der bijektiven Abbildung

$$\imath \times \jmath\colon X \times Y \ \to \ X' \times Y', \qquad (x,y) \ \mapsto \ (\imath(x), \jmath(y)).$$

Die offenen Mengen in $X \times Y$ sind genau die Urbilder $U := (\imath \times \jmath)^{-1}(V)$ offener Mengen in $V \subseteq X' \times Y'$, und die Strukturgarbe auf $X \times Y$ ist definiert durch

$$\mathcal{O}_{X\times Y}(U) \ := \ \{f \circ (\imath \times \jmath);\ f \in \mathcal{O}_{X'\times Y'}(V)\},$$

Damit ist $X \times Y$ ein Raum mit Funktionen, und $\imath \times \jmath$ ist ein Isomorphismus auf eine affine Varietät; insbesondere ist $X \times Y$ nun eine affine Varietät.

Die Tatsache, dass die beiden Projektionen $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ Morphismen sind, ergibt sich sofort aus den kommutativen Diagrammen

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\imath\times\jmath", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_X"'] & X' \times Y' \arrow[d, "\pi_{X'}"] \\
X \arrow[r, "\cong", "\imath"'] & X'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\imath\times\jmath", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_Y"'] & X' \times Y' \arrow[d, "\pi_{Y'}"] \\
Y \arrow[r, "\cong", "\jmath"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

Zum Nachweis der universellen Eigenschaft eines Produktes seien eine affine Varietät Z und Morphismen $\varphi\colon Z \to X$ sowie $\psi\colon Z \to Y$ gegeben. Dann gibt es einen Isomorphismus $\eta\colon Z \to Z'$ auf eine algebraische Menge $Z' \subseteq \mathbb{K}^l$. Rein mengentheoretisch erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & X \times Y \arrow[d, "(\imath\times\jmath)", "\cong"'] \arrow[ddll, bend right, "\pi_X"'] \arrow[ddrr, bend left, "\pi_Y"] & & \\
 & & X' \times Y' \arrow[dl, "\pi'_X"'] \arrow[dr, "\pi'_Y"] & & \\
X \arrow[r, "\imath"] & X' & & Y' & Y \arrow[l, "\jmath"'] \\
 & & Z' \arrow[uu, "\kappa'"'] \arrow[ul, "\varphi'"] \arrow[ur, "\psi'"'] & & \\
 & & Z \arrow[u, "\eta"', "\cong"] \arrow[uull, bend left, "\varphi"] \arrow[uurr, bend right, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

von Abbildungen. Die Abbildungen φ' und ψ' sind, als Verkettung von Morphismen wieder Morphismen, und somit algebraische Abbildungen. Satz 3.1.4 sagt uns also, dass κ' eine algebraische Abbildung ist. Damit ist die Abbildung $\kappa := (\imath\times\jmath)^{-1} \circ \kappa' \circ \eta$ der gewünschte Morphismus.

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung $\mu\colon \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_{X\times Y}(X \times Y)$ ein Isomorphismus ist. Die entsprechende Aussage für X' und Y' haben wir bereits in Satz 3.1.4 gezeigt. Den allgemeinen Fall erhalten wir wieder mit einem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_Y(Y) \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{O}_{X'}(X') \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_{Y'}(Y') \arrow[l, "\imath^*\otimes\jmath^*"', "\cong"] \arrow[d, "\mu"', "\cong"] \\
\mathcal{O}_{X\times Y}(X \times Y) & \mathcal{O}_{X'\times Y'}(X' \times Y') \arrow[l, "\cong"', "(\imath\times\jmath)^*"]
\end{tikzcd}$$

□

Folgerung 3.1.8. *Das Koprodukt zweier affiner Algebren ist wieder eine affine Algebra. Insbesondere existieren in der Kategorie der affinen Algebren Koprodukte.*

Aufgaben zu Abschnitt 3.1.

Aufgabe 3.1.9. Beweise Bemerkung 3.1.3: Sind X_1, X_2 Objekte einer Kategorie $\mathfrak{C}$ und W mit $\pi_i \colon W \to X_i$ sowie W' mit $\pi_i' \colon W' \to X_i$ Produkte für X_1, X_2, so gilt $W \cong W'$.

Aufgabe 3.1.10. Es seien X, Y, Z Objekte einer Kategorie $\mathfrak{C}$, in der Produkte existieren. Beweise folgende Aussagen:

$$X \times Y \ \cong\ Y \times X, \qquad\qquad (X \times Y) \times Z \ \cong\ X \times (Y \times Z).$$

Aufgabe 3.1.11. Es seien $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zeige: Es gilt $\mathbb{K}^{n+m} \cong \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$.

Aufgabe 3.1.12. Es seien X und Y topologische Räume. Betrachte die Menge $X \times Y$ und die beiden Projektionen π_X, π_Y. Die Mengen

$$\pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V), \qquad U \subseteq X,\ V \subseteq Y \text{ offen}$$

biden die Basis einer Topologie auf $X \times Y$, der *Produkttopologie*. Beweise folgende Aussagen:

(i) Sind X, Y affine Varietäten, so ist die Topologie der affinen Varietät $X \times Y$ feiner als die Produkttopologie auf $X \times Y$.
(ii) Die Zariskitopologie auf $\mathbb{K}^2 \cong \mathbb{K}^1 \times \mathbb{K}^1$ ist *echt* feiner als die Produkttopologie auf $\mathbb{K}^1 \times \mathbb{K}^1$.

Aufgabe 3.1.13. Beweise die Aussagen aus Konstruktion 3.1.6.

Aufgabe 3.1.14. Es seien X und Y irreduzible affine Varietäten und es sei $(x, y) \in X \times Y$. Zeige:

(i) $\mathfrak{a} := \mathfrak{m}_{X,x} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_{Y,y} + \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}_{Y,y}$ ist ein maximales Ideal in $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_{Y,y}$.
(ii) Betrachte die kanonischen Projektionen $\pi_X \colon X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ sowie die Abbildung

$$\varphi \colon \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_{Y,y} \ \to\ \mathcal{O}_{X \times Y,(x,y)}, \qquad f_x \otimes g_y \ \mapsto\ (\pi_X^*(f)\pi_Y^*(g))_{(x,y)}.$$

Dann induziert φ einen Isomorphismus $(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_{Y,y})_{\mathfrak{a}} \cong \mathcal{O}_{X \times Y,(x,y)}$.
(iii) Es gilt $T_{X \times Y,(x,y)} \cong T_{X,x} \oplus T_{Y,y}$.
(iv) Es gilt $(X \times Y)^{\mathrm{reg}} = X^{\mathrm{reg}} \times Y^{\mathrm{reg}}$.

3.2. **Produkte II.**

Satz 3.2.1. *Es seien X und Y Prävarietäten. Dann besitzt die Menge $X \times Y$ die Struktur einer Prävarietät, sodass sie zusammen mit den beiden Projektionen $\mathrm{pr}_X \colon X \times Y \to X$ und $\mathrm{pr}_Y \colon X \times Y \to Y$ zu einem Produkt für X und Y in der Kategorie der Prävarietäten wird.*

Lemma 3.2.2. *Es seien X und Y affine Varietäten, und es sei $X \times Y$ ihr Produkt in der Kategorie affiner Varietäten. Dann ist $X \times Y$ auch ein Produkt in der Kategorie der Prävarietäten.*

Beweis. Es sei Z eine beliebige Prävarietät, und es seien Morphismen $\varphi \colon Z \to X$ und $\psi \colon Z \to Y$ gegeben. Dann ist zu zeigen, dass die Abbildung

$$Z \ \mapsto \ X \times Y, \qquad z \ \mapsto \ (\varphi(z), \psi(z))$$

Dazu überdecken wir Z durch offene affine Mengen $W_1 \cup \ldots \cup W_r \subseteq Z$. Da $X \times Y$ ein Produkt in der Kategorie der affinen Varietäten ist, sind die Abbildungen

$$W_i \ \mapsto \ X \times Y, \qquad z \ \mapsto \ (\varphi(z), \psi(z))$$

jeweils Morphismen. Also ist die obige Abbildung $Z \ \mapsto \ X \times Y$ lokal Morphismus und somit ein Morphismus. □

Lemma 3.2.3. *Es seien X und Y Prävarietäten und W mit $\pi_X \colon W \to X$ sowie $\pi_Y \colon W \to Y$ ein Produkt für X und Y. Sind $A \subseteq X$ sowie $B \subseteq Y$ offen (abgeschlossen, lokal abgeschlossen), so ist*

$$C \ := \ \pi_X^{-1}(A) \cap \pi_Y^{-1}(B) \ \subseteq \ W$$

ein offener (abgeschlossener, lokal abgeschlossener) Unterraum in W. Mit den eingeschränkten Projektionen $\pi_A \colon C \to A$ und $\pi_B \colon C \to B$ ist C ein Produkt der Prävarietäten A und B.

Beweis. Zunächst ist klar, dass die Menge C offen (bzw. abgeschlossen, lokal abgeschlossen) in $X \times Y$ ist, wenn Entsprechendes für $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ gilt. Weiter sind $\pi_A \colon C \to A$ und $\pi_B \colon C \to B$ Morphismen.

Die Einschränkungen der Projektionen pr_X und pr_Y auf C liefern nach Bemerkung 1.1.13 Morphismen

$$\mathrm{pr}_A \colon C \ \to \ A, \qquad \mathrm{pr}_B \colon C \ \to \ B.$$

Zum Nachweis der universellen Eigenschaft seien $\varphi \colon Z \to A$ sowie $\psi \colon Z \to B$ Morphismen. Aufgrund der universellen Eigenschaft des Produktes W ist

$$\kappa \colon Z \ \to \ W, \qquad z \ \mapsto \ (\varphi(z), \psi(z))$$

ein Morphismus. Dabei gilt offenbar $\kappa(Z) \subseteq C$. Also definiert die Abbildung κ den gesuchten Morphismus $\varphi \times \psi \colon Z \to C$. □

Konstruktion 3.2.4 (Verkleben)**.** Es sei I eine endliche Indexmenge, und es seien Prävarietäten X_i, $i \in I$, gegeben. Weiter seien für jedes Paar $i, j \in I$ gegeben

- offene Mengen $X_{ij} \subseteq X_i$, wobei $X_{ii} = X_i$,
- Isomorphismen $\varphi_{ij} \colon X_{ij} \to X_{ji}$ von Prävarietäten, sodass
  - $\varphi_{ij}(X_{ij} \cap X_{ik}) = X_{ji} \cap X_{jk}$,
  - $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}|_{X_{ij} \cap X_{ik}} = \varphi_{ik}|_{X_{ij} \cap X_{ik}}$.

Einen solchen Datensatz nennt man *Verklebedaten* und die φ_{ij} nennt man dabei auch *Verklebeabbildungen.*

Man beachte, dass stets $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$ und $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$ gilt. Wir betrachten nun die disjunkte Vereinigung

$$\Omega \quad := \quad \bigsqcup_{i \in I} X_i.$$

Da jedes X_i eine Prävarietät ist, wird auch Ω auf natürliche Weise zu einer Prävarietät. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf Ω durch

$$X_{ij} \ni x \quad \sim \quad \varphi_{ij}(x) \in X_{ji}.$$

Es sei $X := \Omega/\sim$ der zugehörige Restklassenraum, und es sei $\pi\colon \Omega \to X$ die Restklassenabbildung.

Wir versehen X mit der *Quotiententopologie*, d.h., $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq \Omega$ offen ist. Dies ist die feinste Topologie auf X, sodass $\pi\colon \Omega \to X$ stetig wird.

Weiter definieren wir eine Strukturgarbe auf X. Es sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann setzen wir

$$\mathcal{O}_X(U) \quad := \quad \{f\colon U \to \mathbb{K};\ f \circ \pi \in \mathcal{O}_\Omega(\pi^{-1}(U))\}.$$

Dann ist X eine Prävarietät und $\pi\colon \Omega \to X$ ist ein Morphismus. Weiter sind die Einschränkungen $\varphi_i := \pi|_{X_i}\colon X_i \to X$ Isomorphismen auf offene Unterräume von $(X, \mathcal{O}_X)$, und man hat kommutative Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \supseteq & X_{ij} \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[d, "\varphi_i"] & X_{ji} \arrow[d, "\varphi_j"'] & \subseteq & X_j \arrow[dl, "\varphi_j"] \\
 & & X \arrow[r, equal] & X & &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 3.2.5. Die Prävarietät X entstehe durch Verkleben der Prävarietäten X_i längs $\varphi_{ij}\colon X_{ij} \to X_{ji}$. Weiter seien $\psi_i\colon X_i \to Z$ Morphismen in eine Prävarietät Z, sodass

$$\psi_{i|X_{ij}} \quad = \quad \psi_j \circ \varphi_{ij}$$

für alle $i, j \in I$ gilt. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\psi\colon X \to Z$ mit dem das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{i \in I} X_i \arrow[rr, "\sqcup\psi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Z \\
 & X \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis von Satz 3.2.1. Wir überdecken X und Y durch offene affine Untervarietäten $U_1, \ldots, U_r \subseteq X$ bzw. $V_1, \ldots, V_s \subseteq Y$. Nach Lemma 3.2.2 haben wir Produkte $U_i \times V_j$.

Die Idee ist, die Prävarietätenstruktur auf $X \times Y$ durch Verkleben dieser Produkte zu gewinnen. Für je zwei Indexpaare i_1, i_2 und j_1, j_2 setzen wir

$$U_{i_1,i_2} \ := \ U_{i_1} \cap U_{i_2}, \qquad V_{j_1,j_2} \ := \ V_{j_1} \cap V_{j_2}.$$

Dann gilt $U_{i_1,i_2} \times V_{j_1,j_2} = (U_{i_1} \times V_{j_1}) \cap (U_{i_2} \times V_{j_2})$ und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_{i_1} & U_{i_1} \times V_{j_1} \arrow[l, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_Y"] & V_{j_1} \\
U_{i_1,i_2} \arrow[u] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"'] & U_{i_1,i_2} \times V_{j_1,j_2} \arrow[l, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_Y"] \arrow[u] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"'] & V_{j_1,j_2} \arrow[u] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] \\
U_{i_1,i_2} \arrow[d] & U_{i_1,i_2} \times V_{j_1,j_2} \arrow[l, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_Y"'] \arrow[d] & V_{j_1,j_2} \arrow[d] \\
U_{i_2} & U_{i_2} \times V_{j_2} \arrow[l, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_Y"'] & V_{j_2}
\end{tikzcd}$$

Dabei sind sämtliche Projektionen, die (unbezeichneten) Inklusionen sowie die äußeren identischen Abbildungen Morphismen. Nach Lemma 3.2.3 ist dann auch die identische Abbildung in der Mitte ein Morphismus.

Damit sind die Voraussetzungen für ein Verkleben der $U_i \times V_j$ längs der identischen Abbildung $U_{i_1,i_2} \times V_{j_1,j_2} \to U_{i_1,i_2} \times V_{j_1,j_2}$ gegeben. Das liefert eine Prävarietätenstruktur auf $X \times Y$ und macht die Projektionen zu Morphismen.

Zum Nachweis der universellen Eigenschaft seien Morphismen $\varphi\colon Z \to X$ und $\psi\colon Z \to Y$ von Prävarietäten gegeben. Nach Lemma 3.2.2 sind

$$\varphi^{-1}(U_i) \cap \psi^{-1}(V_i) \ \to \ U_i \times V_j, \qquad z \ \mapsto \ (\varphi(z), \psi(z))$$

jeweils Morphismen. Damit ist auch $\kappa\colon Z \to X \times Y$, $z \mapsto (\varphi(z), \psi(z))$ ein Morphismus und dieser besitzt die gewünschte Eigenschaft. □

Definition 3.2.6. Es seien $\varphi\colon X \to Y$ und $\varphi'\colon X' \to Y$ Morphismen einer Kategorie $\mathfrak{C}$. Ein *Faserprodukt* für φ und φ' ist ein Objekt W in $\mathfrak{C}$ zusammen mit Morphismen $\pi\colon W \to X$ und $\pi'\colon W \to X'$ mit $\varphi \circ \pi = \varphi' \circ \pi'$, sodass folgendes gilt:

(FPR) Ist Z ein Objekt in $\mathfrak{C}$ und sind $\psi\colon Z \to X$ sowie $\psi'\colon Z \to X$ Morphismen mit $\varphi \circ \psi = \varphi' \circ \psi'$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\kappa\colon Z \to W$, mit dem das folgende Diagramm kommutativ wird

$$\begin{tikzcd}
 & & W \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd] \arrow[dr, "\pi'"] & \\
Z \arrow[urr, bend left, "\kappa"] \arrow[rrr, "\psi'"] \arrow[r, "\psi"'] \arrow[drr, bend right] & X \arrow[dr, "\varphi"'] & & X' \arrow[dl, "\varphi'"] \\
 & & Y &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 3.2.7. Es seien $\varphi\colon X \to Y$ und $\varphi'\colon X' \to Y$ Morphismen einer Kategorie $\mathfrak{C}$. Definieren $W \to X$ und $W \to X'$ ein Faserprodukt für φ und φ', so ist das Objekt W dadurch bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Man schreibt daher auch $X \times_Y X'$ für W.

Definition 3.2.8. Es sei X eine Prävarietät. Die *Diagonale* von X ist die Teilmenge

$$\Delta_X \ := \ \{(x,x);\ x \in X\} \ \subseteq \ X \times X.$$

Bemerkung 3.2.9. Es sei X eine affine Varietät. Dann ist die Diagonale Δ_X abgeschlossen in $X \times X$, denn es gilt

$$\Delta_X \quad := \quad V_{X \times X}(f \otimes 1 - 1 \otimes f;\ f \in \mathcal{O}(X))$$

Bemerkung 3.2.10. Es sei X eine Prävarietät, und es sei $X = U_1 \cup \ldots \cup U_r$ eine Überdeckung von X durch offene affine Mengen $U_i \subseteq X$. Dann haben wir

$$\Delta_X \cap U_i \times U_i \ = \ \{(x,x);\ x \in U_i\} \ = \ \Delta_{U_i}$$

für jedes $1 \le i \le r$. Nach Bemerkung 3.2.9 ist $\Delta_X \cap U_i \times U_i$ daher abgeschlossen in $U_i \times U_i$. Somit ist

$$\Delta_X \quad \subseteq \quad \bigcup_{i=1}^{r} U_i \times U_i$$

eine abgeschlossene Teilmenge. Folglich ist die Diagonale Δ_X lokal abgeschlossen in $X \times X$. Weiter hat man einen Isomorphismus

$$X \ \to \ \Delta_X, \qquad x \ \mapsto \ (x,x).$$

Da $X \times X$ im allgemeinen nicht durch die $U_i \times U_i$ überdeckt wird — man benötigt auch $U_i \times U_j$ — ist Δ_X im allgemeinen nur lokal abgeschlossen in $X \times X$.

Satz 3.2.11. *Es seien X, X' Prävarietäten, und es seien $\varphi\colon X \to Y$ sowie $\varphi'\colon X' \to Y$ Morphismen. Dann hat man einen lokal abgeschlossenen Unterraum*

$$X \times_Y X' \ := \ \{(x,x') \in X \times X';\ \varphi(x) = \varphi(x')\} \ = \ X \times X'.$$

Zusammen mit den beiden Projektionen $\pi\colon X \times_Y X' \to X$ und $\pi\colon X \times_Y X' \to X$ ist $X \times_Y X'$ ein Faserprodukt für $\varphi\colon X \to Y$ und $\varphi'\colon X' \to Y$.

Beweis. Um zu sehen, dass $X \times_Y X'$ lokal abgeschlossen ist in $X \times X'$ ist betrachten wir den Morphismus

$$\kappa\colon X \times X' \ \to \ Y \times Y, \qquad (x,x') \ \mapsto \ (\varphi(x), \varphi(x')).$$

Nach Satz 3.2.10 ist Δ_Y lokal abgeschlossen. Somit ist auch $X \times_Y X' = \kappa^{-1}(\Delta_Y)$. lokal abgechlossen.

Die universelle Eigenschaft des Faserproduktes ergibt sich dann sofort aus der universellen Eigenschaft des Produktes. □

Satz 3.2.12. *Es seien X und Y Prävarietäten, und es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus. Dann ist der Graph*

$$\Gamma_\varphi \ := \ \{(x, \varphi(x));\ x \in X\} \ \subseteq \ := \ \{(x,y) \in X \times Y;\ y = \varphi(x)\} \ \subseteq \ X \times Y$$

lokal abgeschlossen in $X \times Y$ und die Projektion $\Gamma_\varphi\colon (x,y) \mapsto x$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wir betrachten den Morphismus $\psi\colon X \times Y \to Y \times Y$, $(x,y) \mapsto (\varphi(x), y)$. Dann erhalten wir

$$\Gamma_\varphi \ = \ \{(x, \varphi(y));\ x \in X\} \ = \ \psi^{-1}(\Delta_Y).$$

Da Δ_Y nach Satz 3.2.10 lokal abgeschlossen ist, erhalten wir, dass Γ_φ lokal abgeschlossen ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $\Gamma_\varphi\colon (x,y) \mapsto x$ ein Isomorphismus ist. Dazu geben wir einen Umkehrmorphismus an: $X \to \Gamma_\varphi$, $x \mapsto (x, \varphi(x))$. □

Aufgaben zu Abschnitt 3.2.

Aufgabe 3.2.13. Es seien X und Y zwei Prävarietäten. Zeige: Die Projektionen

$$\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \ \to\ X, \qquad \mathrm{pr}_Y\colon X \times Y \ \to\ Y.$$

sind offene Morphismen, jedoch im allgemeinen keine abgeschlossenen Morphismen.

Aufgabe 3.2.14. Es seien X und Y Prävarietäten. Beweise folgende Aussagen:

(i) Sind $X_1, \ldots, X_r$ bzw. $Y_1, \ldots, Y_s$ die irreduziblen Komponenten von X bzw. Y, so sind $X_i \times Y_j$, $1 \le i \le r$, $1 \le j \le s$, die irreduziblen Komponenten von $X \times Y$.
(ii) Man hat $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.

Aufgabe 3.2.15. Es seien X und Y irreduzible Prävarietäten und $(x, y) \in X \times Y$. Zeige: Es gilt

$$T_{(x,y)}(X \times Y) \ \cong\ T_x(X) \ \oplus\ T_y(Y), \qquad (X \times Y)^{\mathrm{reg}} \ =\ X^{\mathrm{reg}} \times Y^{\mathrm{reg}}.$$

Aufgabe 3.2.16. Beweise die Aussagen in Konstruktion 3.2.4 (Verkleben von Prävarietäten).

Aufgabe 3.2.17. Es seien $X_1 = X_2 = \mathbb{K}$ und $X_{12} = X_{21} = \mathbb{K}^*$. Wir haben verschiedene Möglichkeiten zu verkleben:

(i) Vermöge $\varphi_{12}\colon X_{12} \to X_{21}$, $z \mapsto z$. Die resultierende Prävarietät $X := (X_1 \sqcup X_2)/\sim$ nennt man die *Gerade mit dem doppelten Nullpunkt*. Bezeichnen $0_i \in X$ die Restklassen der Nullpunkte in $0 \in X_i$, so ist X als Menge gegeben durch

$$X = \mathbb{K}^* \cup \{0_1\} \cup \{0_2\}.$$

Beweise folgende Aussagen:
(a) Man hat einen Morphismus

$$\pi\colon \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} \ \to\ X, \qquad (z, w) \ \mapsto\ \begin{cases} zw & z \ne 0 \ne w, \\ 0_1 & w = 0 \ne z, \\ 0_2 & z = 0 \ne w. \end{cases}$$

(b) Man hat einen Isomorphismus $\varphi\colon X \to X$ mit

$$\varphi_{|\mathbb{K}^*} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^*} \qquad \varphi(0_1) = 0_2, \qquad \varphi(0_2) = 0_1.$$

(c) Die Prävarietät X ist glatt und irreduzibel.
(d) Die Prävarietät X ist nicht affin.
(e) Die Diagonale Δ_X ist nicht abgeschlossen in $X \times X$.

(ii) Vermöge $\varphi_{12}\colon X_{12} \to X_{21}$, $z \mapsto z^{-1}$. Zeige: Die resultierende Prävarietät $X := (X_1 \sqcup X_2)/\sim$ ist isomorph zur projektiven Geraden $\mathbb{P}_1$.

Aufgabe 3.2.18. Es seien $m, n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$. Zeige: $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_m$ ist nicht isomorph zu $\mathbb{P}_{n+m}$.

Aufgabe 3.2.19. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus von Prävarietäten und $B \subseteq Y$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge. Zeige: Man hat zueinander inverse Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} X \times_Y B & \longleftrightarrow & \varphi^{-1}(B) \\ (x, y) & \mapsto & x \\ (x, \varphi(x)) & \leftarrow\!\shortmid & x. \end{array}$$

Aufgabe 3.2.20. Es seien $\varphi\colon X \to Y$, $\varphi'\colon X' \to Z$ und $\psi\colon Z \to Y$ Morphismen von Prävarietäten. Zeige: Man hat zueinander inverse Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} (X \times_Y Z) \times_Z X' & \longleftrightarrow & X \times_Y X' \\ (x, z, x') & \mapsto & (x, x') \\ (x, x') & \leftarrow\!\shortmid & (x, \varphi'(x'), x'). \end{array}$$

3.3. **Separiertheit.**

Definition 3.3.1. Eine Pävarietät X heisst *separiert* bzw. man nennt sie eine *Varietät*, falls ihre Diagonale Δ_X abgeschlossen in $X \times X$ ist.

Beispiel 3.3.2. Jede affine Varietät ist separiert.

Satz 3.3.3. *Es seien X eine Prävarietät, $U_1, \ldots, U_r$ eine Überdeckung von X durch affine offene Mengen $U_i \subseteq X$ und $U_{ij} := U_i \cap U_j$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Prävarietät X ist separiert.*
(ii) *Für je zwei i, j ist $\Delta_X \cap (U_i \times U_j)$ abgeschlossen in $U_i \times U_j$.*
(iii) *Für je zwei i, j ist U_{ij} affin und man hat eine Surjektion*

$$\mathcal{O}(U_i) \otimes \mathcal{O}(U_j) \ \to \ \mathcal{O}(U_{ij}), \qquad f \otimes g \ \mapsto \ f_{|U_{ij}} g_{|U_{ij}}.$$

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist offensichtlich. Für die Äquivalenz von (ii) und (iii) betrachten wir den Isomorphismus

$$\imath \colon U_{ij} \ \to \ \Delta_X \cap (U_i \times U_j), \qquad x \ \mapsto \ (x, x).$$

Aussage (ii) besagt genau, dass $\imath$ stets eine abgeschlossene Einbettung nach $U_i \times U_j$ definiert. Letzteres ist äquivalent zu (iii). □

Satz 3.3.4. *Lokal abgeschlossene Unterräume von Varietäten sind Varietäten.*

Beweis. Es sei X eine Varietät, und es sei $Y \subseteq X$ ein lokal abgeschlossener Unterraum. Dann gilt

$$\Delta_Y \quad = \quad (Y \times Y) \cap \Delta_X.$$

Dabei ist $Y \times Y$ ein (lokal abgeschlossener) Unterraum von $X \times X$, siehe Lemma 3.2.3. Damit folgt die Behauptung. □

Satz 3.3.5. *Produkte von Varietäten sind Varietäten, d.h., in der Kategorie der Varietäten existieren Produkte.*

Beweis. Es seien X und Y Varietäten. Mit der universellen Eigenschaft des Produktes erhält man einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} (X \times Y) \times (X \times Y) \ &\to \ (X \times X) \times (Y \times Y), \\ (x, y, x', y') \ &\mapsto \ (x, x', y, y'). \end{aligned}$$

Dieser bildet $\Delta_{X \times Y}$ auf $\Delta_X \times \Delta_Y$ ab. Da letztere Menge in $(X \times X) \times (Y \times Y)$ abgeschlossen ist, folgt die Behauptung. □

Sprechweise 3.3.6. Eine *Kurve* ist eine irreduzible eindimensionale Varietät. Eine *Kurve in einer Prävarietät* X ist ein Morphismus $\gamma \colon C \to X$ mit einer Kurve C.

Satz 3.3.7. *Es sei X eine Prävarietät. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *X ist separiert.*
(ii) *Für jede Prävarietät Y und je zwei Morphismen $\varphi, \psi \colon Y \to X$ ist die Menge $\{y \in Y;\ \varphi(y) = \psi(y)\}$ abgeschlosssen in Y.*
(iii) *Jeder Morphismus $C \setminus \{c_0\} \to X$ mit einer Kurve C besitzt höchstens eine Fortsetzung $C \to X$.*

Lemma 3.3.8 (Kurvenlemma)**.** *Es seien X eine Prävarietät, $U \subseteq X$ eine dichte offene Teilmenge und $x_0 \in X$. Dann gibt es eine Kurve $\gamma\colon C \to X$ in X und ein $c_0 \in C$ mit*

$$\gamma(C \setminus \{c_0\}) \ \subseteq \ U, \qquad\qquad \gamma(c_0) \ = \ x_0.$$

Beweis. Wir wählen eine irreduzible Komponente $X_0 \subseteq X$ mit $x_0 \in X_0$. Da U dicht in X liegt, ist $U_0 := U \cap X_0$ nicht leer. Es sei $Z_0 \subseteq X_0$ eine affine offene Teilmenge mit $x_0 \in Z_0$. Dann ist $V_0 := U_0 \cap Z_0$ nicht leer. Das Noethersche Normalisierungslemma liefert einen endlichen surjektiven Morphismus $\varphi\colon Z_0 \to \mathbb{K}^n$, wobei $n = \dim(Z_0)$. Die Menge $B := \varphi(Z_0 \setminus V_0)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{K}^n$ und höchstens $(n-1)$-dimensional.

Wir wählen ein $\varphi(x_0) \neq y \in \mathbb{K}^n \setminus B$ und betrachten die Gerade L durch y und $\varphi(x_0)$. Wir betrachten das Urbild $A := \varphi^{-1}(L)$ und zeigen, dass jede irreduzible Komponente von A eindimensional ist. Dazu schreiben wir

$$L \ = \ V(f_1, \ldots, f_{n-1})$$

mit $f_1, \ldots, f_{n-1} \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Dann gilt

$$A \ = \ V_{Z_0}(\varphi^*(f_1), \ldots, \varphi^*(f_{n-1})).$$

Nach dem Krullschen Hauptidealsatz ist daher jede irreduzible Komponente von A mindestens eindimensional. Da $\varphi\colon A \to L$ endlich ist kann andererseits keine irreduzible Komponente eine Dimension größer als Eins besitzen.

Wir wählen nun eine irreduzible Komponente $C \subseteq A$ mit $x_0 \in C$. Die Einschränkung $\alpha := \varphi_{|C}\colon C \to \mathbb{K}^n$ ist endlich und somit ist $\alpha(C)$ abgeschlossen in $\mathbb{K}^n$ und eindimensional. Das impliziert $\alpha(C) = L$. Indem wir die (endliche) Menge $\alpha^{-1}(B) \setminus \{x_0\}$ aus C entfernen, erhalten wir die gewünschte Kurve. □

Beweis von Satz 3.3.7. Zu "(i)⇒(ii)". Wir betrachten den kanoniscen Morphismus

$$\Phi\colon Y \ \to \ X \times X, \qquad y \ \mapsto \ (\varphi(y), \psi(y)).$$

Die Abgeschlossenheit der Menge $\{y \in Y;\ \varphi(y) = \psi(y)\}$ in Y ergibt sich dann mit

$$\{y \in Y;\ \varphi(y) = \psi(y)\} \quad = \quad (\varphi \times \psi)^{-1}(\Delta_X).$$

Die Implikation "(ii)⇒(iii)" ist klar; hier wenden wir einfach Bedingung (ii) auf je zwei mögliche Fortsetzungen $C \to X$ von $C \setminus \{c_0\} \to X$ an.

Zu "(iii)⇒(i)". Nehmen wir an, X sei nicht separiert. Dann ist die Diagonale Δ_X nicht abgeschlossen in $X \times X$. Also gibt es einen Punkt

$$(x, x') \quad \in \quad \overline{\Delta_X} \setminus \Delta_X.$$

Insbesondere haben wir $x \neq x'$. Nach dem Kurvenlemma 3.3.8 gibt es eine Kurve $\gamma\colon C \to \overline{\Delta_X}$ und einen Punkt $c_0 \in C$ mit

$$\gamma(c_0) = (x, x'), \qquad\qquad \gamma(C \setminus \{c_0\}) \subseteq \Delta_X.$$

Die Projektionen $\pi_1, \pi_2\colon X \times X \to X$ liefern Kurven $\gamma_i := \pi_i \circ \gamma\colon C \to X$, die auf $C \setminus \{c_0\}$ übereinstimmen, aber $\gamma_1(c_0) = x \neq x' = \gamma_2(c_0)$ erfüllen. Widerspruch. □

Folgerung 3.3.9 (Identitätssatz)**.** *Es seien X eine irreduzible Prävarietät, Y eine Varietät und $\varphi, \psi\colon X \to Y$ Morphismen. Gilt $\varphi|_U = \psi|_U$ mit einer nicht leeren offenen Teilmenge $U \subseteq X$, so folgt $\varphi = \psi$.*

Beweis. Die Aussage ergibt sich sofort aus der Charakterisierung 3.3.7 (ii) der Separiertheit. □

Beispiel 3.3.10. Die Gerade mit dem doppelten Nullpunkt ist nicht separiert: Für die kanonischen Morphismen $\varphi_i \colon \mathbb{K} \to X$ gilt $\{z \in \mathbb{K};\ \varphi_1(z) = \varphi_2(z)\} = \mathbb{K}^*$.

Satz 3.3.11. *Es seien X, X' und Y Prävarietäten, und es seien $\varphi \colon X \to Y$ sowie $\varphi' \colon X \to Y$ ein Morphismen. Ist Y separiert, so gelten folgende Aussagen:*

(i) *Das Faserproukt $X \times_Y X'$ ist ageschlossen in $X \times X'$.*
(ii) *Der Graph Γ_φ ist abgeschlossen in $X \times Y$.*

Beweis. Für (i) betrachten wir den Morphismus $\psi \colon X \times X' \to Y \times Y$, $(x, x') \mapsto (\varphi(x), \varphi'(x'))$. Dann erhalten wir

$$X \times_Y X' \ = \ \{(x, x') \in X \times X';\ \varphi(x) = \varphi'(x')\} \ = \ \psi^{-1}(\Delta_Y).$$

Zu (ii). Wir betrachten den Morphismus $\psi \colon X \times Y \to Y \times Y$, $(x, y) \mapsto (\varphi(x), y)$. Dann erhalten wir

$$\Gamma_\varphi \ = \ \{(x, \varphi(y));\ x \in X\} \ = \ \psi^{-1}(\Delta_Y).$$

□

Konstruktion 3.3.12 (Segre-Einbettung)**.** Wir betrachten zunächst die folgende Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\Phi} \colon \mathbb{K}^{m+1} \times \mathbb{K}^{n+1} & \mapsto & \mathbb{K}^{mn+m+n+1} \\ (z, w) & \mapsto & z^T \cdot w \ = \ \begin{pmatrix} z_0 w_0 & \dots & z_0 w_n \\ \vdots & & \vdots \\ z_m w_0 & \dots & z_m w_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Es sei $W_k := \mathbb{K}^{k+1} \setminus \{0\}$, und es bezeichne $\pi_k \colon W_k \to \mathbb{P}_k$ die Restklassenabbildung. Die Abbildung $\widehat{\Phi}$ definiert ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} W_m \times W_n \arrow[r, "\widehat{\Phi}"] \arrow[d, "\pi_m \times \pi_n"'] & W_{mn+m+n} \arrow[d, "\pi_{mn+m+n}"] \\ \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n \arrow[r, "\Phi"'] & \mathbb{P}_{mn+m+n} \end{tikzcd}$$

Dabei ist die Abbildung $\Phi \colon \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_m \to \mathbb{P}_{mn+m+n}$ eine abgeschlossene Einbettung.

Beweis. Zunächst müssen wir zeigen, dass Φ ein Morphismus von Prävarietäten ist. Dies prüfen wir lokal nach. Wir verwenden die affinen Kartenumgebungen

$$U_{k,l} \ := \ \{[u_{ij}] \in \mathbb{P}_{mn+m+n};\ u_{kl} \neq 0\} \ \subseteq \ \mathbb{P}_{mn+m+n}.$$

Das Urbild dieser Menge unter Φ ist gerade das Produkt $U_k \times U_l \subseteq \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_m$ der Kartenumgebungen U_k und U_l. Weiter ist Φ bezüglich zugehörigen Karten von der Gestalt

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{k,l} \circ \Phi \circ (\varphi_k \times \varphi_l)^{-1} \colon \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^{mn+m+n} \\ (z_1, \dots, z_m; w_1, \dots, w_m) & \mapsto & \begin{pmatrix} z_0 w_0 & \dots & z_0 & \dots & z_0 w_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ w_0 & \dots & \cancel{1} & \dots & w_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ z_m w_0 & \dots & z_m & \dots & z_m w_n \end{pmatrix} \end{array}$$

wobei der Eintrag an der Stelle k, l gestrichen ist. Insbesondere sind alle Einschränkungen von Φ auf Produkte $U_k \times U_l$ von Kartenumgebenungen ein Morphismen. Folglich ist Φ ein Morphismus.

Das Bild von $\widehat{\Phi}$ besteht gerade aus allen Matrizen vom Rang höchstens eins in $\mathbb{K}^{mn+m+n+1}$ und ist somit eine algebraische Menge. Weiter ist es offenbar ein affiner Kegel. Folglich ist

$$X \;:=\; \Phi(\mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n) \;=\; \pi_{mn+m+n}(\widehat{\Phi}(\mathbb{K}^{m+1} \times \mathbb{K}^{n+1}) \setminus \{0\})$$

abgeschlossen in $\mathbb{P}_{mn+m+n+1}$. Es bleibt zu zeigen, dass die Φ einen Isomorphismus von $\mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n$ nach X definiert. Dazu setzen wir

$$W_r(k) \;:=\; \{z \in \mathbb{K}^{r+1};\; z_k \neq 0\} \;=\; \pi_r^{-1}(U_k), \quad r = m, n,$$
$$W(k,l) \;:=\; \{z \in \mathbb{K}^{m+1} \times \mathbb{K}^{n+1};\; z_{kl} \neq 0\} \;=\; \pi_r^{-1}(U_{k,l}).$$

Es gilt stets $\Phi^{-1}(U_{k,l}) = U_k \times U_l$ und entsprechend $\widehat{\Phi}^{-1}(W(k,l)) = W_m(k) \times W_n(l)$. Wir betrachten die Abbildungen

$$\widehat{\Psi}_{kl} \colon W(k,l) \;\to\; W_m(k) \times W_n(l), \qquad [u_{ij}] \;\mapsto\; (u_{0l}, \ldots, u_{ml}; u_{k0}, \ldots, u_{kn}).$$

Man beachte, dass die Einschränkungen von $\widehat{\Phi}$ auf $W_m(k) \times W_n(l)$ und Ψ_{kl} auf den Durchschnitt von $W(k,l)$ und dem Bild von $\widehat{\Phi}$ bis auf skalare Faktoren invers zueinander sind. Folglich induzieren die Abbildungen $\widehat{\Psi}_{kl}$ die gewünschte Umkehrabbildung $\Psi \colon X \to \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_n$ zu Φ. $\square$

Satz 3.3.13. *Der projektive Raum $\mathbb{P}_n$ ist separiert.*

Beweis. Wir betrachten die Segre-Einbettung $\imath \colon \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n^2+2n}$. Dann haben wir

$$\imath(\Delta_{\mathbb{P}_n}) \;=\; \imath(\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n) \;\cap\; \{[z_{ij}] \in \mathbb{P}_{n^2+2n};\; z_{ij} = z_{ji}\}.$$

Diese Menge ist abgeschlosssen in $\mathbb{P}_{n^2+2n}$. Somit ist die Diagonale $\Delta_{\mathbb{P}_n}$ abgeschlossen in $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$. Folglich ist $\mathbb{P}_n$ separiert. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 3.3.

Aufgabe 3.3.14. Es sei X ein topologischer Raum. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) X ist hausdorffsch, d.h., je zwei verschiedenen Punkte $x, x' \in X$ besitzen disjunkte offene Umgebungen $x \in U \subseteq X$ und $x' \in U' \subseteq X$.
(ii) Die Diagonale $\Delta_X \subseteq X \times X$ ist abgeschlossen bezüglich der Produkttopologie.

Aufgabe 3.3.15. Es sei X Prävarietät. Zeige: Besitzen je zwei Punkte von X eine gemeinsame affine offene Umgebung, so ist X separiert. Kombiniere dies mit Aufgabe 1.3.26 zu einem Beweis der Separiertheit von $\mathbb{P}_n$.

Aufgabe 3.3.16. Es sei G eine Prävarietät mit einer Gruppenstruktur, sodass $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto g^{-1}g'$ ein Morphismus ist. Zeige: G ist separiert.

Aufgabe 3.3.17. Es sei X eine Quadrik vom Rang 4 in $\mathbb{P}_3$. Zeige: Es gilt $X \cong \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. *Hinweis:* Betrachte die Segre-Einbettung.

4. Torische Varietäten

4.1. Grundbegriffe.

Definition 4.1.1. Eine *(affin) algebraische Gruppe* ist eine Varietät G zusammen mit einer Gruppenstruktur, sodass die folgenden Abbildungen Morphismen algebraischer Varietäten sind:

$$G \times G \to G, \qquad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2,$$
$$G \to G, \qquad g \mapsto g^{-1}.$$

Ein *Homomorphismus* (auch *Morphismus*) algebraischer Gruppen G und H ist ein Gruppenhomomorphismus $G \to H$, der zudem ein Morphismus von Varietäten ist.

Beispiel 4.1.2. Der *Standard-n-Torus* ist die affine Varietät $\mathbb{T}^n := \mathbb{K}^n_{T_1 \cdots T_n}$ zusammen mit der komponentenweisen Multiplikation

$$tt' \ := \ (t_1 t'_1, \ldots, t_n t'_n).$$

Der Standard-n-Torus $\mathbb{T}^n$ ist eine affin-algebraische Gruppe. Neutrales Element und Inversenbildung sind gegeben durch

$$e_{\mathbb{T}^n} \ = \ \mathbf{1}_n \ = \ (1, \ldots, 1), \qquad t^{-1} \ = \ (t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}).$$

Man hat einen kanonischen Isomorphismus $\mathbb{T}^n \cong \mathbb{K}^* \times \ldots \times \mathbb{K}^*$ von algebraischen Gruppen.

Erinnerung 4.1.3 (Homomorphismen von Standardtori; siehe Konstruktion 2.1.8 aus der kommutativen Algebra)**.** Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ definiert einen Homomorphismus algebraischer Gruppen

$$\varphi_A \colon \mathbb{T}^n \ \to \ \mathbb{T}^m, \qquad (t_1, \ldots, t_n) \ \mapsto \ (t_1^{a_{11}} \cdots t_n^{a_{1n}}, \ldots, t_1^{a_{m1}} \cdots t_n^{a_{mn}}).$$

Für je zwei Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ und $B \in \mathrm{Mat}(n, k; \mathbb{Z})$ gilt dabei $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{A \cdot B}$. Insbesondere gilt $\varphi_{A^{-1}} = \varphi_A^{-1}$, falls $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{Z})$ invertierbar ist.

Satz 4.1.4. *Es sei $\varphi \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ ein Homomorphismus algebraischer Gruppen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ mit $\varphi = \varphi_A$.*

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $m = n = 1$. Dann ist φ eine reguläre Funktion auf $\mathbb{T}^1 = \mathbb{K}^*$ und somit, für geeignete $l, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $\beta_i \in \mathbb{K}$, gegeben durch

$$\varphi(t) \ = \ \frac{\beta_r t^r + \ldots + \beta_1 t + \beta_0}{t^l}.$$

Da $\varphi \colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}^*$ keine Nullstellen besitzt, erhalten wir $\varphi(t) = \beta t^a$ mit einem eindeutig bestimmten $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Mit $\varphi(1) = 1$ ergibt sich $\beta = 1$. Wir haben also $\varphi(t) = t^a$.

Wir behandeln nun den Fall, dass $m = 1$ gilt und n beliebig ist. Dazu betrachten wir die Homomorphismen

$$\lambda_i \colon \mathbb{K}^* \ \to \ \mathbb{T}^n, \qquad s \ \mapsto \ (1, \ldots, 1, s, 1, \ldots, 1).$$

Mit dem Fall $n = m = 1$ ergibt sich $\varphi \circ \lambda_i(t) = t^{a_i}$ mit eindeutig bestimmten $a_i \in \mathbb{Z}$. Folglich erhalten wir

$$\varphi(t) \ = \ \varphi(\lambda_1(t) \cdots \lambda_n(t)) \ = \ \varphi \circ \lambda_1(t) \cdots \varphi \circ \lambda_n(t)) \ = \ t^{a_1} \cdots t^{a_n}.$$

Sind nun n und m beliebig, so wissen wir bereits, dass die Komponentenfunktionen folgende Gestalt besitzen:

$$\varphi_i(t) \ = \ t^{a_{i1}} \cdots t^{a_{in}}$$

mit eindeutig bestimmten $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Die $(m \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Zeilen $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ hat dann die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Bemerkung 4.1.5. Es sei $\varphi = \varphi_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ der zu $A \in \mathrm{Mat}(n,m;\mathbb{Z})$ gehörige Homomorphismus von Standardtori. Gilt $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) = 0$, so hat man

$$A \;=\; \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial T_j}\right)(\mathbf{1}_n).$$

Definition 4.1.6. Ein *algebraischer Torus* ist eine algebraische Gruppe, die isomorph zu einem Standard-n-Torus ist.

Definition 4.1.7. Es seien X eine Prävarietät und G eine algebraische Gruppe. Wir nennen eine Operation $\mu\colon G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto g \cdot x$ *algebraisch*, falls die Abbildung μ ein Morphismus von Prävarietäten ist.

Definition 4.1.8. Eine *torische Varietät* ist eine irreduzible Varietät X mit einer algebraischen Operation $T \times X \to X$ eines algebraischen Torus T und einem Basispunkt $x_0 \in X$, sodass die Bahnabbildung $T \to X$, $t \mapsto t \cdot x_0$ eine offene Einbettung ist. Wir schreiben auch (X, T, x_0) für eine torische Varietät.

Beispiel 4.1.9. Der Standard-n-Torus $T := \mathbb{T}^n$ operiert auf $X := \mathbb{T}^n$ durch Linkstranslation:

$$t \cdot z \;:=\; tz \;=\; (t_1 z_1, \ldots, t_n z_n).$$

Mit dem Basispunkt $x_0 = \mathbf{1}_n := (1, \ldots, 1)$ ist das Tripel $(X, T, x_0) = (\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n, \mathbf{1}_n)$ eine affine torische Varietät.

Beispiel 4.1.10. Der Standard-n-Torus $T := \mathbb{T}^n$ operiert auf der affinen Varietät $X := \mathbb{K}^n$ durch

$$t \cdot z \;:=\; tz \;=\; (t_1 z_1, \ldots, t_n z_n).$$

Mit dem Basispunkt $x_0 = \mathbf{1}_n := (1, \ldots, 1)$ ist das Tripel $(X, T, x_0) = (\mathbb{K}^n, \mathbb{T}^n, \mathbf{1}_n)$ eine affine torische Varietät.

Für $n = 1$ besitzt $X = \mathbb{K}$ die beiden Bahnen $\{0\} = \mathbb{T}^1 \cdot 0$ und $\mathbb{K}^* = \mathbb{T}^1 \cdot 1$. Für $n = 1$ ist die Bahnzerlegung von $\mathbb{K}^2$ gegeben durch

$$\mathbb{K}^2 \;=\; \mathbb{T}^2 \cdot (1,1) \cup \mathbb{T}^2 \cdot (1,0) \cup \mathbb{T}^2 \cdot (0,1) \cup \mathbb{T}^2 \cdot (0,0)$$

Es gibt in diesem Fall also vier Bahnen. Allgemein besitzt $\mathbb{K}^n$ genau 2^n verschiedene $\mathbb{T}^n$-Bahnen:

$$\mathbb{T}^n \cdot z, \qquad \text{wobei } z \in \{0,1\}^n.$$

Beispiel 4.1.11. Wir betrachten die affine Varietät $X = V(T_0 T_1 - T_2^2) \subseteq \mathbb{K}^3$. Der Torus $T := \mathbb{T}^2$ operiert algebraisch auf $\mathbb{K}^3$ durch

$$(t_1, t_2) \cdot (z_0, z_1, z_2) \;:=\; \left(t_1 z_0, \frac{t_2^2}{t_1} z_1, t_2 z_2\right).$$

Die Menge $X \subseteq \mathbb{K}^3$ ist invariant und somit operiert T auch algebraisch auf X. Für $x_0 := (1,1,1)$ ist die Bahnabbildung

$$T \;\to\; X, \qquad t \;\mapsto\; t \cdot x_0$$

eine offene Einbettung: Wir haben $T \cdot x_0 = X \cap \mathbb{T}^3$ und dort ist der Umkehrmorphismus gegeben durch

$$X \cap \mathbb{T}^3 \;\to\; T, \qquad (z_0, z_1, z_2) \;\mapsto\; (z_0, z_2).$$

Somit ist (X, T, x_0) eine affine torische Varietät. Man beachte, dass X der affine Kegel über dem Bild der Veronese-Einbettung $\imath\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ ist. Insbesondere haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^2 \arrow[r, "(z_0,z_1)\mapsto(z_0^2,z_1^2,z_0z_1)", "\bar{\imath}"'] & X & \subseteq & \mathbb{K}^3 \\
\cup\!\vert & \cup\!\vert & & \cup\!\vert \\
\mathbb{K}^2\setminus\{0\} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & X\setminus\{0\} \arrow[d] & \subseteq & \mathbb{K}^3\setminus\{0\} \arrow[d, "\pi_2"] \\
\mathbb{P}_1 \arrow[r, "\imath", "{[z_0,z_1]\mapsto[z_0^2,z_1^2,z_0z_1]}"'] & \imath(\mathbb{P}_2) & \subseteq & \mathbb{P}_2
\end{tikzcd}$$

Beispiel 4.1.12. Wir betrachten die affine Varietät $X = V(T_0T_1 - T_2T_3) \subseteq \mathbb{K}^4$. Der Torus $T := \mathbb{T}^3$ operiert auf X durch

$$(t_1,t_2,t_3)\cdot(z_1,z_2,z_3,z_4) \ := \ \left(t_1z_1, t_2z_2, t_3z_3, \frac{t_1t_2}{t_3}z_4\right).$$

Die Menge $X \subseteq \mathbb{K}^4$ ist invariant und somit operiert T auch algebraisch auf X. Für $x_0 := (1,1,1,1)$ ist die Bahnabbildung

$$T \ \to \ X, \qquad t \ \mapsto \ t\cdot x_0$$

eine offene Einbettung: Wir haben $T\cdot x_0 = X \cap \mathbb{T}^4$ und dort ist der Umkehrmorphismus gegeben durch

$$X\cap\mathbb{T}^4 \ \to \ T, \qquad (z_0,z_1,z_2,z_3) \ \mapsto \ (z_0,z_1,z_2).$$

Somit ist (X,T,x_0) eine affine torische Varietät. Man beachte, dass X der affine Kegel über dem Bild der Segre-Einbettung $\imath\colon \mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_3$ ist. Insbesondere haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^2\times\mathbb{K}^2 \arrow[r, "(z_0,z_1,w_0,w_1)\mapsto(z_0w_0,z_0w_1,z_1w_0,z_1w_1)", "\bar{\imath}"'] & X & \subseteq & \mathbb{K}^4 \\
\cup\!\vert & \cup\!\vert & & \cup\!\vert \\
\mathbb{K}^2\setminus\{0\}\times\mathbb{K}^2\setminus\{0\} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1\times\pi_1"'] & X\setminus\{0\} \arrow[d] & \subseteq & \mathbb{K}^4\setminus\{0\} \arrow[d, "\pi_3"] \\
\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1 \arrow[r, "\imath", "{([z_0,z_1],[w_0,w_1])\mapsto[z_0w_0,z_0w_1,z_1w_0,z_1w_1]}"'] & \imath(\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1) & \subseteq & \mathbb{P}_2
\end{tikzcd}$$

Definition 4.1.13. Es seien (X,T,x_0) und (X',T',x_0') torische Varietäten. Ein *torischer Morphismus* von (X,T,x_0) nach (X',T',x_0') ist ein Paar $(\varphi,\widetilde{\varphi})$, wobei

- $\varphi\colon X \to X'$ ein Morphismus von Varietäten ist,
- $\widetilde{\varphi}\colon T \to T'$ ein Homomorphismus algebraischer Tori ist,

sodass $\varphi(x_0) = x_0'$ gilt und man $\varphi(t\cdot x) = \widetilde{\varphi}(t)\cdot\varphi(x)$ für jedes $x \in X$ und jedes $t \in T$ hat.

Beispiel 4.1.14. Wir betrachten zwei Standardtori $\mathbb{T}^n$ und $\mathbb{T}^m$ sowie die zugehörigen torischen Varietäten $(\mathbb{T}^n,\mathbb{T}^n,\mathbf{1}_n)$ und $(\mathbb{T}^m,\mathbb{T}^m,\mathbf{1}_m)$. Dann haben wir eine Bijektion zwischen den zugehörigen Morphismenmengen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mor}(\mathbb{T}^n,\mathbb{T}^m) \ &\to \ \mathrm{Mor}((\mathbb{T}^n,\mathbb{T}^n,\mathbf{1}_n),(\mathbb{T}^m,\mathbb{T}^m,\mathbf{1}_m)), \\
\varphi \ &\to \ (\varphi,\varphi).
\end{aligned}$$

Konstruktion 4.1.15. Wir betrachten die affinen torische Varietäten $(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n, \mathbf{1}_n)$ und $(\mathbb{T}^m, \mathbb{T}^m, \mathbf{1}_m)$. Zu jeder Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z}_{\geq 0})$ erhalten wir Morphismen

$$\begin{aligned} \varphi_A \colon \mathbb{T}^n &\to \mathbb{T}^m, & (t_1, \ldots, t_n) &\mapsto (t_1^{a_{11}} \cdots t_n^{a_{1n}}, \ldots, t_1^{a_{m1}} \cdots t_n^{a_{mn}}), \\ \widetilde{\varphi}_A \colon \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^m, & (z_1, \ldots, z_n) &\mapsto (z_1^{a_{11}} \cdots z_n^{a_{1n}}, \ldots, z_1^{a_{m1}} \cdots z_n^{a_{mn}}). \end{aligned}$$

Das Paar $(\varphi_A, \widetilde{\varphi}_A)$ ist ein torischer Morphismus von $(\mathbb{K}^n, \mathbb{T}^n, \mathbf{1}_n)$ nach $(\mathbb{K}^m, \mathbb{T}^m, \mathbf{1}_m)$.

Satz 4.1.16. *Es sei $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ ein torischer Morphismus von $(\mathbb{K}^n, \mathbb{T}^n, \mathbf{1}_n)$ nach $(\mathbb{K}^m, \mathbb{T}^m, \mathbf{1}_m)$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z}_{\geq 0})$ mit $(\varphi, \widetilde{\varphi}) = (\varphi_A, \widetilde{\varphi}_A)$.*

Beweis. Nach Satz 4.1.4 gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$, die den Homomorphismus $\widetilde{\varphi} \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ beschreibt, d.h., wir haben

$$\widetilde{\varphi}(t) \;=\; \widetilde{\varphi}_A(t) \;=\; (t_1^{a_{11}} \cdots t_n^{a_{1n}}, \ldots, t_1^{a_{m1}} \cdots t_n^{a_{mn}}).$$

Für jedes $z \in \mathbb{T}^n$ haben wir

$$\varphi(z) \;=\; \varphi(z \cdot \mathbf{1}_n) \;=\; \widetilde{\varphi}(z) \cdot \varphi(\mathbf{1}_n) \;=\; \widetilde{\varphi}(z) \cdot \mathbf{1}_m \;=\; \widetilde{\varphi}_A(z).$$

Wir zeigen nun, dass A keine negativen Einträge besitzt. Dazu betrachten wir die Funktionen $\varphi^*(T_i)$ für $1 \leq i \leq m$. Es gilt

$$\varphi^*(T_i) \;=\; T_1^{a_{i1}} \cdots T_n^{a_{in}} \in \mathcal{O}(\mathbb{T}^n) \;\subseteq\; \mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n).$$

Andererseits haben wir $\varphi^*(T_i) \in \mathcal{O}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Das bedeutet $a_{ij} \geq 0$ für alle j. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 4.1.

Aufgabe 4.1.17. Bestimme sämtliche Bahnen der beiden affinen torischen Varietäten $V(T_0T_1 - T_2^2) \subseteq \mathbb{K}^3$ und $V(T_0T_1 - T_2T_3) \subseteq \mathbb{K}^4$.

Aufgabe 4.1.18. Es seien G, G' algebraische Gruppen. Zeige $G \times G'$ wird eine algebraische Gruppe durch $(g_1, g_1')(g_1, g_1') := (g_1g_1', g_2g_2')$ zu einer algebraischen Gruppe. Mit den Projektionen π, π' von $G \times G'$ auf G bzw. G' ist $G \times G'$ ein Produkt in der Kategorie der algebraischen Gruppen.

Aufgabe 4.1.19. Es seien (X, T, x_0) und (X', T', x_0') (affine) torische Varietäten. Zeige:

(i) Die algebraische Gruppe $T \times T'$ ist ein algebraischer Torus.
(ii) Durch $(t, t') \cdot (x, x') := (t \cdot x, t' \cdot x')$ wird eine algebraische Operation von $T \times T'$ auf $X \times X'$ definiert.
(iii) Das Tripel $(X \times X', T \times T', (x_0, x_0'))$ ist eine (affine) torische Varietät.
(iv) Zusammen mit den kanonischen Projektionen auf X, X' und T, T' ist das Tripel $(X \times X', T \times T', (x_0, x_0'))$ ein Produkt in der Kategorie der (affinen) torischen Varietäten.

4.2. **Torische Varietäten und Binomialideale.**

Bemerkung 4.2.1. Die affine torische Varietät $V(T_0T_1 - T_2^2) \subseteq \mathbb{K}^3$ ist der Abschluss des Bildes von

$$\varphi\colon \mathbb{T}^2 \ \to\ \mathbb{T}^3, \qquad (t_1, t_2) \ \mapsto\ (t_1^2, t_2^2, t_1t_2).$$

Unser Ziel ist es, diese Beobachtung zu verallgmeinern und torische Varietäten als Abschlüsse von Bildern unter Homomorphismen algebraischer Tori zu konstruieren.

Bemerkung 4.2.2. Es seien X eine Prävarietät, G eine algebraische Gruppe, $G \times X \to X$ eine algebraische Operation und $Y \subseteq X$ eine G-invariante Menge, d.h., es gilt $g{\cdot}y \in Y$ für alle $g \in G$ und $x \in X$. Dann ist der Abschluss $\overline{Y} \subseteq X$ ebenfalls G-invariant, denn für jedes $g \in G$ ist $x \mapsto g \cdot x$ ein Homöomorphismus von X und somit haben wir $g \cdot \overline{Y} = \overline{g{\cdot}Y} = \overline{Y}$.

Satz 4.2.3. *Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ und $\varphi_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ der zugehörige Homomorphismus von Standard-Tori. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^n \arrow[rr, "\varphi_A"] \arrow[dr, "\varphi_B"'] & & \mathbb{T}^m \\ & \mathbb{T}^k \arrow[ur, "\varphi_C"'] & \end{tikzcd}$$

mit Matrizen $B \in \mathrm{Mat}(k, n; \mathbb{Z})$ und $C \in \mathrm{Mat}(m, k; \mathbb{Z})$ vom Rang $k := \mathrm{rg}(A)$, sodass $\varphi_B\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^k$ surjektiv und $\varphi_C\colon \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^m$ eine abgeschlossene Einbettung ist.

Beweis. Es seien $T \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{Z})$ und $S \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{Z})$ ganzahlig invertierbare Matrizen mit

$$S \cdot A \cdot T \ =\ D \ =\ \begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sodass D_k eine $(k{\times}k)$-Diagonalmatrix mit nichtverschwindenden Diagonaleinträgen ist. Dann erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^n \arrow[r, "\varphi_A"] & \mathbb{T}^m \arrow[d, "\varphi_S"] \\ \mathbb{T}^n \arrow[u, "\varphi_T"] \arrow[r, "\varphi_D"'] & \mathbb{T}^m \arrow[d, shift right, "\varphi_P"'] \\ & \mathbb{T}^k \arrow[u, shift right, "\varphi_Q"'] \end{tikzcd}$$

wobei $P = (E_k, 0)$ die Projektion auf die ersten k Koordinaten beschreibt und $Q = P^t$ gilt. Das obere Quadrat des Diagrammes ist kommutativ und wir haben

$$\varphi_Q \circ \varphi_P \circ \varphi_D \ =\ \varphi_D.$$

Wir setzen $B := P \circ D \circ T^{-1}$ und $C := S^{-1} \circ Q$. Dann ist φ_B surjektiv, da dies für $\varphi_{T^{-1}}$ und $\varphi_P \circ \varphi_D$ gilt. Weiter ist φ_C eine abgeschlossene Einbettung, da dies für φ_Q und $\varphi_{S^{-1}}$ gilt. Somit sind B und C die gesuchten Matrizen. $\square$

Folgerung 4.2.4. *Es sei $\varphi\colon T \to T'$ ein Homomorphismus algebraischer Tori. Dann ist das Bild $\varphi(T) \subseteq T'$ ein abgeschlossener Untertorus.*

Konstruktion 4.2.5. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ und es sei $\varphi_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ der zugehörige Homomorphismus von Standard-Tori. Weiter sei $\varphi_A = \varphi_C \circ \varphi_B$ eine Zerlegung wie in Satz 4.2.3. Wir betrachten

$$X_A \ :=\ \overline{\varphi_A(\mathbb{T}^n)} \ :=\ \overline{\varphi_C(\mathbb{T}^k)} \ \subseteq\ \mathbb{K}^m.$$

Dann operiert der Torus $\mathbb{T}^k$ auf X_A vermöge $t*x = \varphi_C(t)\cdot x$ und mit $\mathbf{1}_n := (1,\dots,1)$ ist das Tripel $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_n)$ eine affine torische Varietät.

Beweis. Nach Satz 4.2.3 haben wir $\varphi_A(\mathbb{T}^n) = \varphi_C(\mathbb{T}^k)$. Als Bild der irreduziblen Varietät $\mathbb{T}^k$ ist $\varphi_A(\mathbb{T}^n)$ irreduzibel und somit ist auch $X_A = \overline{\varphi_A(\mathbb{T}^n)}$ irreduzibel. Weiter operiert $\mathbb{T}^k$ auf $\mathbb{K}^m$ durch $t*z = \varphi_C(t)\cdot z$, wobei $s\cdot z = (s_1z_1,\dots,s_nz_n)$ die übliche Operation von $\mathbb{T}^m$ auf $\mathbb{K}^m$ bezeichnet. Dabei gilt

$$\mathbb{T}^k * \mathbf{1}_n \ = \ \varphi_C(\mathbb{T}^k)\cdot \mathbf{1}_n \ = \ \varphi_C(\mathbb{T}^k).$$

Nach Bemerkung 4.2.2 ist X_A als Abschluss einer Bahn invariant unter $\mathbb{T}^k$, d.h., $\mathbb{T}^k$ operiert auf X_A. Weiter ist die Bahnabbildung $t \mapsto t*\mathbf{1}_n = \varphi_C(t)$ eine offene Einbettung, da $\varphi_C\colon \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^m$ eine abgeschlossene Einbettung ist und $\varphi_C(\mathbb{T}^k) = X_A \cap \mathbb{T}^m$ offen in X ist. □

Satz 4.2.6 (Ohne Beweis)**.** *Jede affine torische Varietät ist (torisch) isomorph zu einer torischen Varietät $(X_A, T_A, \mathbf{1}_n)$.*

Satz 4.2.7. *Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{Z})$. Dann ist das Verschwindungsideal der zugehörigen affinen Varietät $X_A \subseteq \mathbb{K}^m$ gegeben durch*

$$I(X_A) \ = \ \langle T^\mu - T^\nu;\ \nu,\mu \in \mathbb{Z}^m_{\ge 0},\ \mu-\nu \in \mathrm{Kern}(A^t)\rangle \ \subseteq \ \mathbb{K}[T_1,\dots,T_m].$$

Lemma 4.2.8. *Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{Z})$ und $\varphi_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ der zugehörige Homomorphismus. Für jedes Laurent-Polynom $f = \sum a_\mu T^\mu$ aus $\mathbb{K}[T_1^{\pm 1},\dots,T_m^{\pm 1}]$ gilt*

$$\varphi_A^*(f) \ = \ \sum a_\mu S^{A^t\cdot\mu} \ \in \ \mathbb{K}[S_1^{\pm 1},\dots,S_n^{\pm 1}].$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung für ein Monom $f = T^\mu$ zu beweisen. Für jedes $z \in \mathbb{T}^n$ gilt:

$$f(\varphi_A(z)) \ = \ \left(z^{A_{1*}}\right)^{\mu_1}\cdots\left(z^{A_{m*}}\right)^{\mu_m} \ = \ z^{\mu_1A_{1*}+\ldots+\mu_mA_{m*}} \ = \ z^{A^t\cdot\mu}.$$

□

Beweis von Satz 4.2.7. Wir betrachten den zu A gehörigen Homomorphismus algebraischer Tori $\varphi_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$. Das Verschwindungsideal von X_A ist

$$I(X_A) \ = \ I(\varphi_A(\mathbb{T}^n)) \ = \ \mathrm{Kern}(\varphi_A^*)\cap\mathbb{K}[T_1,\dots,T_n] \ \subseteq \ \mathbb{K}[T_1,\dots,T_n].$$

Sind $\mu,\nu \in \mathbb{Z}^m_{\ge 0}$ mit $\mu-\nu \in \mathrm{Kern}(A^t)$ gegeben, so gilt $A^t\cdot\mu = A^t\cdot\nu$ und Lemma 4.2.8 liefert

$$\varphi_A^*(T^\mu - T^\nu) \ = \ S^{A^t\cdot\mu} - S^{A^t\cdot\nu} \ = \ 0.$$

Also ist das von den Binomen $T^\nu - T^\mu$ mit $\mu-\nu \in \mathrm{Kern}(A^t)$ erzeugte Ideal $\mathfrak{a}$ in $I(X_A) = \mathrm{Kern}(\varphi_A^*)$ enthalten.

Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion sei $f = \sum a_\mu T^\mu \in I(X_A)$ gegeben. Nach Lemma 4.2.8 haben wir

$$\varphi^*(f) \ = \ \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^m_{\ge 0}} a_\mu S^{A^t\cdot\mu} \ = \ \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n_{\ge 0}}\ \sum_{A^t\cdot\mu=\kappa} a_\mu S^{A^t\cdot\mu} \ = \ \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n_{\ge 0}}\left(\sum_{A^t\cdot\mu=\kappa} a_\mu\right)S^\kappa \ = \ 0.$$

Folglich verschwinden die Faktoren $\sum a_\mu$ vor jedem S^κ. Gibt es unterschiedliche μ_1,μ_2 mit $A^t\cdot\mu_i = \kappa$, so erhalten wir ein Polynom

$$f' \ := \ f - a_{\mu_1}(T^{\mu_1} - T^{\mu_2}) \ \in \ \mathrm{Kern}(\varphi_A^*)$$

mit weniger Termen, das sich von f um ein Element aus $\mathfrak{a}$ unterscheidet. Dies wiederholen wir, bis f modulo Summanden aus $\mathfrak{a}$ auf 0 reduziert ist. □

Bemerkung 4.2.9. Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^m$ ein Untermodul sodass $\mathbb{Z}^m/L$ torsionsfrei ist. Dann definiert L ein *torisches Ideal*:

$$I_L \ := \ \langle T^\nu - T^\mu;\ \nu, \mu \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0},\ \mu - \nu \in L \rangle \ \subseteq \ \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_m].$$

Ist $B \in \mathrm{Mat}(n, m; \mathbb{Z})$ mit $L = \ker(B)$, so gilt $I_L = I(X_A)$ für $A = B^t$. Insbesondere ist I_L ein Primideal und $X_A = V(I_L)$ besitzt die Struktur einer torischen Varietät.

Beispiel 4.2.10. Der Standard-n-Torus $\mathbb{T}^n$ operiert auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}_n$ durch

$$t \cdot [z] \ := \ [z_0, t_1 z_1, \ldots, t_n z_n].$$

Für $[\mathbf{1}_{n+1}] = [1, \ldots, 1]$ ist die Bahnabbildung $\mathbb{T}^n \to \mathbb{P}_n$, $t \mapsto t \cdot [\mathbf{1}_{n+1}]$ eine offene Einbettung. Somit ist $(\mathbb{P}_n, \mathbb{T}^n, [\mathbf{1}_{n+1}])$ eine torische Varietät.

Bemerkung 4.2.11. Die Konstruktion von $\mathbb{P}_n$ als Quotient von $W_n = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{K}^*$ ist torisch:

- Die offene Untervarietät $W_n \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ ist invariant unter $\mathbb{T}^{n+1}$ und somit ist $(W_n, \mathbb{T}^{n+1}, \mathbf{1}_{n+1})$ eine torische Varietät.
- Man hat einen torischen Morphismus $(\pi, \widetilde{\pi})$ von $(W_n, \mathbb{T}^{n+1}, \mathbf{1}_{n+1})$ nach $(\mathbb{P}_n, \mathbb{T}^n, [\mathbf{1}_{n+1}])$, wobei

$$\pi(z_0, \ldots, z_n) \ = \ [z_0, \ldots, z_n], \qquad \widetilde{\pi}(t_0, \ldots, t_n) \ = \ \left(\frac{t_1}{t_0}, \ldots, \frac{t_n}{t_0}\right).$$

Konstruktion 4.2.12. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ und es sei $\varphi_A = \varphi_C \circ \varphi_B$ eine Zerlegung wie in Satz 4.2.3. Wir betrachten den projektiven Abschluss

$$\overline{X_A} \ = \ \overline{\varphi_C(\mathbb{T}^k) \cdot [\mathbf{1}_{n+1}]} \ \subseteq \ \mathbb{P}_m.$$

Dann operiert $\mathbb{T}^k$ auf $\overline{X_A}$ durch $t * x := \varphi_C(t) \cdot x$, wobei "$\cdot$" die übliche $\mathbb{T}^m$-Operation auf $\mathbb{P}_m$ bezeichnet. Dadurch wird $(\overline{X_A}, \mathbb{T}^k, [\mathbf{1}_{n+1}])$ zu einer torischen Varietät.

Bemerkung 4.2.13. Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ und $\overline{X_A} \subseteq \mathbb{P}_m$ wie in Konstruktion 4.2.12. Dann ist der affine Kegel über X gegeben durch $X_{\overline{A}} \subseteq \mathbb{K}^{m+1}$, wobei

$$\overline{A} \ := \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \ \in \ \mathrm{Mat}(m+1, n+1; \mathbb{Z}).$$

Weiter lässt sich der torische Morphismus $(\pi, \widetilde{\pi})$ aus Bemerkung 4.2.11 zu einem torischen Morphismus von $(X_{\overline{A}}, \mathbb{T}^{k+1}, \mathbf{1}_{n+1})$ auf $(\overline{X_A}, \mathbb{T}^k, [\mathbf{1}_{n+1}])$ einschränken.

Definition 4.2.14. Eine Prävarietät X heisst *normal*, falls jeder Halm $\mathcal{O}_{X,x}$, wobei $x \in X$, ein normaler Ring ist, d.h. ein Integritätsring ist und ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist.

Definition 4.2.15. Eine Prävarietät heisst *projektive Varietät*, wenn sie isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum eines projektiven Raumes ist.

Satz 4.2.16 (Ohne Beweis)**.** *Jede normale projektive torische Varietät ist (torisch) isomorph zu einer torischen Varietät* $(\overline{X_A}, \mathbb{T}^k, [\mathbf{1}_{n+1}])$.

Aufgaben zu Abschnitt 4.2.

Aufgabe 4.2.17. Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ und $A = B \cdot C$ sowie $A = B' \cdot C'$ Zerlegungen wie in Satz 4.2.3. Zeige: Es gibt einen Isomorphismus $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ und einen torischen Isomorphismus $(\mathrm{id}_{X_A}, \widetilde{\varphi})$ zwischen den durch $A = B \cdot C$ bzw. $A = B' \cdot C'$ definierten affinen torischen Varietäten.

Aufgabe 4.2.18. Betrachte Beispiele 4.1.11 und 4.1.12.

(i) Beschreibe die auftauchenden affinen torischen Varietäten X als $X = X_A$ mit geeigneten ganzzahligen Matrizen A.
(ii) Bestimme die Verschwindungsideale von X_A jeweils gemäß Satz 4.2.7.
(iii) Zeige, dass alle an den Diagrammen aus beteiligten Abbildungen zu torischen Morphismen gehören.

Aufgabe 4.2.19. Es seien $0 \neq \mu, \nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Das Binom $T^\nu - T^\mu \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist prim.
(ii) T^ν, T^μ sind teilerfremd und $(\nu_1 - \mu_1, \ldots, \nu_n - \mu_n)$ sind teilerfremd.

Aufgabe 4.2.20. Es seien $0 \neq \mu, \nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mit $T^\nu - T^\mu \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ prim und $X := V(T^\nu - T^\mu)$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $0 \in X$ ist ein glatter Punkt.
(ii) Es gilt $X \cong \mathbb{K}^{n-1}$.

Aufgabe 4.2.21. Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^m$ ein beliebiger Untermodul. Dann definiert L ein *Gitterideal*:

$$I_L \ := \ \langle T^\mu - T^\nu;\ \mu, \nu \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0},\ \mu - \nu \in L \rangle \ \subseteq \ \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_m].$$

Zeige: Das Gitterideal I_L ist genau dann ein Primideal, wenn der Faktormodul $\mathbb{Z}^m/L$ torsionsfrei ist.

Aufgabe 4.2.22. Beweise die Aussagen aus Bemerkung 4.2.13.

4.3. **Polyedrische Kegel.**

Vereinbarung 4.3.1. In diesem Abschnitt seien U und V zwei zueinander duale endlichdimensionale $\mathbb{Q}$-Vektorräume, d.h., wir haben eine bilineare Abbildung

$$U \times V \ \to \mathbb{Q} \qquad (u,v) \ \mapsto \ \langle u,v\rangle =: u(v) =: v(u),$$

sodass

$$U \to \operatorname{Hom}(V,\mathbb{Q}), \quad u \mapsto [v \mapsto \langle u,v\rangle], \qquad V \to \operatorname{Hom}(U,\mathbb{Q}), v \mapsto [u \mapsto \langle u,v\rangle]$$

jeweils Isomorphismen von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen sind. Ein wichtiges Beispiel für diese Situation ist $U = V = \mathbb{Q}^n$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle u,v\rangle \ := \ u_1v_1 + \ldots + u_nv_n.$$

Definition 4.3.2. Ein *konvexer Kegel* in V ist eine Teilmenge $\sigma \subseteq V$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $v \in \sigma \Rightarrow \alpha v \in \sigma$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$,
(ii) $v, v' \in \sigma \Rightarrow v + v' \in \sigma$.

Beispiel 4.3.3. (i) Sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegeben, so ist der von diesen Vektoren erzeugte Kegel definiert als

$$\operatorname{Kegel}(v_1,\ldots,v_n) \ := \ \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i;\ \alpha_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\right\}.$$

(ii) Sind $u_1, \ldots, u_m \in U$ gegeben, so ist der durch diese Linearformen beschriebene Kegel definiert als

$$\operatorname{POrt}(u_1,\ldots,u_m) \ := \ \{v \in V;\ u_j(v) \geq 0,\ j = 1,\ldots,m\}.$$

Beispiel 4.3.4. Der *positive Orthant* $\delta^n \subseteq \mathbb{Q}^n$ ist ein konvexer Kegel in $\mathbb{Q}^n$; er ist gegeben durch

$$\delta^n \ = \ \operatorname{Kegel}(e_1,\ldots,e_n) \ = \ \operatorname{POrt}(e^1,\ldots,e^n),$$

wobei $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{Q}^n$ die kanonische Basis und $e^1, \ldots, e^n \in \mathbb{Q}^n$ die dazu duale Basis bezeichnen.

Satz 4.3.5. *Es sei $\sigma \subseteq V$ ein konvexer Kegel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) *Es gibt eine lineare Abbildung $P\colon \mathbb{Q}^n \to V$ mit $\sigma = P(\delta^n)$, d.h., mit $v_i := P(e_i) \in V$ gilt*

$$\sigma \ = \ \operatorname{Kegel}(v_1,\ldots,v_n)$$

(ii) *Es gibt eine lineare Abbildung $Q\colon V \to \mathbb{Q}^m$ mit $\sigma = Q^{-1}(\delta^m)$, d.h., mit $u_i := Q^*(e^i) \in U$ gilt*

$$\sigma \ = \ \operatorname{POrt}(u_1,\ldots,u_m).$$

Definition 4.3.6. Ein konvexer Kegel $\sigma \subseteq V$ heißt *polyedrisch*, falls er eine der beiden äquivalenten Bedingungen aus Satz 4.3.5 erfüllt.

Bemerkung 4.3.7. Es seien $\sigma \subseteq V$ und $\tau \subseteq V$ polyedrische konvexe Kegel. Dann sind $\sigma \cap \tau$ und $\sigma + \tau$ wieder polyedrische konvexe Kegel.

Beweis. Gilt $\sigma = \operatorname{POrt}(B)$ und $\tau = \operatorname{POrt}(B')$ mit endlichen Mengen $B, B' \subseteq U$, so erhalten wir

$$\sigma \cap \tau \ = \ \operatorname{POrt}(B \cup B').$$

Gilt $\sigma = \mathrm{Kegel}(A)$ und $\tau = \mathrm{Kegel}(A')$ mit endlichen Mengen $A, A' \subseteq V$, so erhalten wir

$$\sigma + \tau \quad = \quad \mathrm{Kegel}(A \cup A').$$

□

Definition 4.3.8. Es sei $\sigma \subseteq V$ ein konvexer Kegel. Der zugehörige *duale Kegel*, auch *Dualkegel!* genannt, ist der konvexe Kegel

$$\sigma^\vee \; := \; \left\{ u \in U; \; u_{|\sigma} \geq 0 \right\} \; \subseteq \; U.$$

Bemerkung 4.3.9. Der Übergang zum Dualkegel ist inklusionsumkehrend, d.h., sind $\sigma \subseteq V$ und $\tau \subseteq V$ konvexe Kegel, so gilt

$$\tau \subseteq \sigma \quad \Rightarrow \quad \tau^\vee \supseteq \sigma^\vee.$$

Satz 4.3.10 (Hahn-Banach)**.** *Es sei $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Ist $v \in V \setminus \sigma$ so gibt es eine Linearform $u \in \sigma^\vee$ mit $u(v) < 0$.*

Beweis. Die Aussage gilt offensichtlich, falls σ ein positiver Orthant ist. Für den allgemeinen Fall wählen wir eine lineare Abbildung $Q \colon V \to \mathbb{Q}^m$ mit $\sigma = Q^{-1}(\delta^m)$. Dann gilt $Q(v) \notin \delta^m$. Folglich gibt es eine Linearform u' auf $\mathbb{Q}^m$, die keine negativen Werte auf δ^m annimmt und $u'(Q(v)) < 0$ erfüllt. Die zurückgeholte Linearform $u := u' \circ Q$ besitzt also die gewünschten Eigenschaften. □

Folgerung 4.3.11 (Dualitätssatz)**.** *Es sei $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann gilt*

$$(\sigma^\vee)^\vee \quad = \quad \sigma.$$

Beweis. Die Inklusion $(\sigma^\vee)^\vee \supseteq \sigma$ ist offensichtlich. Der Nachweis der Inklusion $(\sigma^\vee)^\vee \subseteq \sigma$ erfolgt indirekt: Nehmen wir an, es existiere ein $v \in (\sigma^\vee)^\vee$ mit $v \notin \sigma$. Dann gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein Element $u \in \sigma^\vee$ mit $u(v) < 0$. Mit anderen Worten, es gilt $v(u) < 0$ und somit $v \notin (\sigma^\vee)^\vee$, Widerspruch. □

Folgerung 4.3.12. *Es sei $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann ist der Dualkegel $\sigma^\vee \subseteq U$ ebenfalls ein polyedrischer konvexer Kegel.*

Beweis. Es seien $u_1, \ldots, u_m$ beschreibende Linearformen für σ. Dann dürfen wir schreiben:

$$\sigma \quad = \quad \{v \in V; \; v(u_i) \geq 0, \; i = 1, \ldots, m\}.$$

Dies bedeutet $\sigma = \mathrm{Kegel}(u_1, \ldots, u_m)^\vee$. Dualisieren ergibt $\sigma^\vee = \mathrm{Kegel}(u_1, \ldots, u_m)$. Somit ist $\sigma^\vee$ polyedrisch. □

Folgerung 4.3.13. *Es seien $\sigma, \tau \subseteq V$ polyedrische konvexe Kegel. Dann gilt:*

(i) $(\sigma \cap \tau)^\vee = \sigma^\vee + \tau^\vee$.
(ii) $(\sigma + \tau)^\vee = \sigma^\vee \cap \tau^\vee$.

Beweis. Zu (i). Die Inklusion "$\supseteq$" ist leicht einzusehen: Ist $u \in \sigma^\vee$ und $u' \in \tau^\vee$, so gilt offensichtlich

$$u_{|\sigma \cap \tau} \; \geq \; 0, \qquad u'_{|\sigma \cap \tau} \; \geq \; 0.$$

Für den Nachweis der Inklusion "$\subseteq$" verwenden wir den Dualitätssatz: Wir müssen lediglich

$$\sigma \cap \tau \quad \supseteq \quad (\sigma^\vee + \tau^\vee)^\vee$$

nachweisen. Es sei $v \in (\sigma^\vee + \tau^\vee)^\vee$. Dann gilt $u(v) \geq 0$ für jedes $u \in \sigma^\vee$ und $u'(v) \geq 0$ für jedes $u' \in \tau^\vee$. Das impliziert bereits

$$v \ \in \ (\sigma^\vee)^\vee \cap (\tau^\vee)^\vee \ = \ \sigma \cap \tau.$$

Zu (ii). Wir schreiben $\sigma = \alpha^\vee$ und $\tau = \beta^\vee$ mit polyedrischen konvexen Kegeln α und β. Wie wir bereits gezeigt haben gilt

$$(\alpha \cap \beta)^\vee \quad = \quad \alpha^\vee + \beta^\vee.$$

Dualisiert man diese Gleichung und setzt dann $\sigma = \alpha^\vee$ und $\tau = \beta^\vee$ wieder ein, so steht die gewünschte Gleichung da. $\square$

Lemma 4.3.14 (Fourier-Motzkin-Elimination)**.** *Es sei $B \subseteq \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q})$ eine endliche Menge von Linearformen auf $\mathbb{Q}^n$, und es sei*

$$\sigma \quad := \quad \{v \in \mathbb{Q}^n;\ u(v) \geq 0 \textit{ für alle } u \in B\}$$

der durch B beschriebene konvexe Kegel. Für jedes $u \in B$ setzen wir $u_n := u(e_n)$ und betrachten

$$B_n \quad := \quad \{u \in B;\ u_n = 0\} \ \cup \ \{u_n^+ u^- - u_n^- u^+;\ u^+, u^- \in B,\ u_n^+ > 0,\ u_n^- < 0\}.$$

Die Menge $B_n \subseteq \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q})$ beschreibt den aus σ durch "Elimination der n-ten Koordinate" erhaltenen konvexen Kegel:

$$\sigma + \mathbb{Q}e_n \quad = \quad \{v \in \mathbb{Q}^n;\ u(v) \geq 0 \textit{ für alle } u \in B_n\}.$$

Beweis. Zur Inklusion "$\subseteq$". Die Elemente von $\sigma + \mathbb{Q}e_n$ sind von der Gestalt $v + \alpha e_n$ mit $v \in \sigma$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$. Nach Konstruktion ist jedes $u \in B_n$ eine positive Linearkombination von Linearformen aus B, und es gilt stets $u_n = 0$. Somit gilt für jedes $u \in B_n$:

$$u(v + \alpha e_n) \ = \ u(v) + \alpha u_n \ = \ u(v) \ \geq \ 0.$$

Zur Inklusion "$\supseteq$". Es sei $v \in V$ ein Vektor mit $u(v) \geq 0$ für alle $u \in B_n$. Dann erhalten wir

$$u_n^+ u^-(v) \quad \geq \quad u_n^- u^+(v)$$

für je zwei Linearformen $u^+, u^- \in B$ mit $u_n^+ > 0$ und $u_n^+ < 0$. Diese Bedingung lässt sich äquivalent umformulieren zu

$$\frac{u^-(v)}{u_n^-} \quad \leq \quad \frac{u^+(v)}{u_n^+}$$

für je zwei Linearformen $u^+, u^- \in B$ mit $u_n^+ > 0$ und $u_n^+ < 0$. Wir wählen nun ein $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit

$$\max\left(\frac{u^-(v)}{u_n^-};\ u^- \in B,\ u_n^- < 0\right) \ \leq \ \alpha \ \leq \ \min\left(\frac{u^+(v)}{u_n^+};\ u^+ \in B,\ u_n^+ > 0\right)$$

und betrachten $v' := v - \alpha e_n$. Dieser Vektor erfüllt $u(v') \geq 0$ für alle $u \in B$ mit $u_n = 0$. Für $u^+, u^- \in B$ mit $u_n^+ > 0$ bzw. $u_n^- < 0$ erhalten wir weiter

$$u^-(v') \ = \ u^-(v) - u_n^- \alpha \ \geq \ 0, \qquad u^+(v') \ = \ u^+(v) - u_n^+ \alpha \ \geq \ 0.$$

Wir haben also gesehen, dass $u(v') \geq 0$ für alle $u \in B$ gilt. Mit anderen Worten, es gilt $v' \in \sigma$. Somit ist $v = v' + \alpha e_n$ ein Element aus $\sigma + \mathbb{Q}e_n$. $\square$

Lemma 4.3.15 (Noitanimile-Nikztom-Rierouf)**.** *Es sei $A \subseteq \mathbb{Q}^n$ eine endliche Menge, und es sei*

$$\sigma \quad := \quad \left\{\sum_{v \in A} \alpha_v v;\ \alpha_v \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\right\}$$

der von den Vektoren aus A erzeugte konvexe Kegel. Wir betrachten die folgende Menge von Vektoren in $\mathbb{Q}^n$:

$$A_n \;:=\; \{v \in A;\; v_n = 0\} \;\cup\; \{v_n^+ v^- - v_n^- v^+;\; v^+, v^- \in A,\; v_n^+ > 0,\; v_n^- < 0\}.$$

Dann erzeugt diese Menge den Durschnitt von σ mit der Hyperebene $v_n = 0$ als Kegel:

$$\sigma \cap \mathbb{Q}^{n-1} \;=\; \left\{ \sum_{v \in A_n} \alpha_v v;\; \alpha_v \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \right\}.$$

Beweis. Da die Vektoren aus A_n positive Linearkombinationen von Vektoren aus A sind und $v_n = 0$ für jedes $v \in A_n$ gilt, ergibt sich die Inklusion "$\supseteq$".

Für den Nachweis der Inklusion "$\subseteq$" betrachten wir ein Element $w \in \sigma \cap \mathbb{Q}^{n-1}$. Dieses ist von der Gestalt

$$w \;=\; \sum_{v \in A} \alpha_v v$$

mit $\alpha_v \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, und es gilt $w_n = 0$. Wir schreiben $A = A^0 \cup A^+ \cup A^-$, wobei $v \in A^0$ falls $v_n = 0$ etc. und setzen

$$\alpha \;:=\; \sum_{A^+} \alpha_{v^+} v_n^+ \;=\; \sum_{A^-} -\alpha_{v^-} v_n^-.$$

Falls $\alpha = 0$ gilt, liegt w offensichtlich in dem von A_n erzeugten Kegel. Falls $\alpha \neq 0$ gilt erhalten wir

$$\begin{aligned} w \;&=\; \sum_{A^0} \alpha_v v \;+\; \sum_{A^+} \alpha_{v^+} v^+ \;+\; \sum_{A^-} \alpha_{v^-} v^- \\ &=\; \sum_{A^0} \alpha_v v \;+\; \frac{1}{\alpha} \sum_{A^+} \left(\sum_{A^-} -\alpha_{v^-} v_n^- \right) \alpha_{v^+} v^+ \;+\; \frac{1}{\alpha} \sum_{A^-} \left(\sum_{A^+} \alpha_{v^+} v_n^+ \right) \alpha_{v^-} v^- \\ &=\; \sum_{A^0} \alpha_v v \;+\; \sum_{A^+, A^-} \frac{\alpha_{v^+} \alpha_{v^-}}{\alpha} (-v_n^- v^+ + v_n^+ v^-). \end{aligned}$$

Damit haben wir w explizit al nichtnegative Linearkombination von Vektoren aus A_n dargestellt. □

Beweis von Satz 4.3.5. Zur Implikation "(i) $\Rightarrow$ (ii)". Da man $\sigma \subseteq V$ als Bild des Orthanten $\delta^n \subseteq \mathbb{Q}^n$ unter einer linearen Abbildung erhält und $\delta^n \subseteq \mathbb{Q}^n$ durch Linearformen beschrieben wird, genügt es, folgende Aussage zu zeigen: *Wird ein Kegel $\sigma' \subseteq V'$ durch Linearformen beschrieben, und ist $F\colon V' \to V$ eine lineare Abbildung, so wird auch $F(\sigma) \subseteq V$ durch Linearformen beschrieben.*

Für den Nachweis dieser Aussage darf man annehmen, dass $F\colon V' \to V$ eine Surjektion ist. Dann erreicht man durch Wahl geeigneter Koordinaten, dass F die Projektion $\mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^m$ auf die ersten m Komponenten ist. Diesen Fall kann man schrittweise auf $n = m - 1$ zurückführen. Jetzt kann man Fourier-Motzkin-Elimination anwenden: Es sei $\sigma = \mathrm{POrt}(B)$. Dann gilt $\sigma + \mathbb{Q}e_n = \mathrm{POrt}(B_n)$ und es folgt

$$F(\sigma) \;=\; \sigma + \mathbb{Q}e_n \cap \mathrm{POrt}(e_n^*, -e_n^*) \;=\; \mathrm{POrt}(B_n \cup \{e_n^*, -e_n^*\}).$$

Zum Nachweis der Implikation "(ii)$\Rightarrow$(i)" betrachten wir den Untervektorraum

$$\Gamma_Q \;:=\; \{(v, -Q(v));\; v \in V\} \;\subseteq\; V \times \mathbb{Q}^m$$

und den Kegel $\eta := \Gamma_Q + \{0\} \times \delta^m$. Dieser leistet

$$\eta \cap (V \times \{0\}) \;=\; \{(v, 0);\; v \in V,\; Q(v) \in \delta^m\} \;=\; \sigma \times \{0\}.$$

Wir müssen daher zeigen, dass der Kegel $\eta \cap (V \times \{0\})$ durch endlich viele Vektoren erzeugt ist. Das ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Lemma 4.3.15. $\square$

Aufgaben zu Abschnitt 4.3.

Aufgabe 4.3.16. Bestimme Erzeugende für den Dualkegels des von den folgenden Vektoren in $\mathbb{Q}^3$ erzeugten Kegels:

$$v_1 := (1,0,0), \qquad v_2 := (0,1,0), \qquad v_3 := (1,0,1), \qquad v_4 := (0,1,1).$$

4.4. **Konvergenzkegel.**

Definition 4.4.1. Es sei G eine algebraische Gruppe. Eine *(multiplikative) Einparametergruppe* von G ist ein Homomorphismus $\mathbb{K}^* \to G$ algebraischer Gruppen.

Konstruktion 4.4.2. Es sei G eine abelsche algebraische Gruppe und es bezeichne $\Lambda(G)$ die Menge aller Einparametergruppen von G. Dann wird $\Lambda(G)$ zu einer abelschen Gruppe durch

$$(\lambda + \lambda')(t) \;:=\; \lambda(t)\lambda'(t).$$

Bemerkung 4.4.3. Für den Standard-n-Torus $\mathbb{T}^n$ hat man einen Isomorphismus abelscher Gruppen:

$$\mathbb{Z}^n \;\to\; \Lambda(\mathbb{T}^n), \qquad v \;\mapsto\; \lambda_v \colon t \mapsto (t^{v_1}, \ldots, t^{v_n}).$$

Konstruktion 4.4.4. Es seien T und T' algebraische Tori und $\varphi\colon T \to T'$ ein Homomorphismus algebraischer Gruppen. Dann hat man einen Homomorphismus der zugehörigen Einparametergruppen:

$$\varphi_*\colon \Lambda(T) \;\to\; \Lambda(T'), \qquad \lambda \;\mapsto\; \varphi \circ \lambda.$$

Ist $\psi\colon T' \to T''$ ein weiterer Homomorphismus algebraischer Gruppen, so erhalten wir $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

Bemerkung 4.4.5. Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ und $\varphi_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ der zugehörige Homomorphismus von Standard-Tori. Ist $v \in \mathbb{Z}^n$ und $\lambda_v\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^n$ die zugehörige Einparametergruppe, so gilt

$$(\varphi_A)_*(\lambda_v) \;=\; \lambda_{A \cdot v}.$$

Definition 4.4.6. Unter einem *Gitter* verstehen wir eine endlich erzeugten freien $\mathbb{Z}$-Modul. Ein *Homomorphismus von Gittern* ist ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln.

Satz 4.4.7. *Die Zuordnungen $T \mapsto \Lambda(T)$ und $\varphi \mapsto \varphi_*$ liefern einen kovarianten Funktor von der Kategorie der algebraischen Tori in die Kategorie der Gitter.*

Beweis. Nach Konstruktion 4.4.4 liefern die Zuordnungen einen kovarianten Funktor von der Kategorie der algebraischen Tori in die Kategorie der abelschen Gruppen. Ist T ein algebraischer Torus, so gibt es einen Isomorphismus $\varphi\colon T \to \mathbb{T}^n$. Damit hat man einen Isomorphismus $\varphi_*\colon \Lambda(T) \to \Lambda(\mathbb{T}^n)$. Nach Bemerkung 4.4.3 gilt $\Lambda(\mathbb{T}^n) \cong \mathbb{Z}^n$. Insbesondere ist $\Lambda(T)$ ein Gitter. □

Definition 4.4.8. Es sei (X, T, x_0) eine torische Varietät. Wir nennen eine Einparametergruppe $\lambda\colon \mathbb{K}^* \to T$ *konvergent in* X, falls der Morphismus

$$\lambda_{x_0}\colon \mathbb{K}^* \;\to\; X, \qquad t \;\mapsto\; \lambda(t) \cdot x_0.$$

eine Fortsetzung zu einem Morphismus $\overline{\lambda}_{x_0}\colon \mathbb{K} \to X$ erlaubt. In diesem Falle nennen wir $\overline{\lambda}_{x_0}(0)$ den *Grenzwert* von λ und schreiben

$$\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot x_0 \quad := \quad \overline{\lambda}_{x_0}(0).$$

Beispiel 4.4.9. Wir betrachten $X = \mathbb{C}^n$ mit dem Basispunkt $x_0 = (1, \ldots, 1)$ und der kanonischen Wirkung von $T = \mathbb{T}^n$:

$$\mathbb{T}^n \times \mathbb{K}^n \;\to\; \mathbb{T}^n, \qquad t \cdot z \;:=\; (t_1 z_1, \ldots, t_n z_n).$$

Die Einparametergruppen von $\mathbb{T}^n$ sind von der Gestalt $\lambda_v\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^n$, $t \mapsto (t^{v_1}, \ldots, t^{v_n})$. Für ein solches λ_v haben wir

$$\lambda_v(t) \cdot x_0 \;=\; (t^{v_1} z_1, \ldots, t^{v_n} z_n)$$

Mit dem positiven Orthanten $\delta^n = \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$ gilt: Die Einparametergruppe λ_v ist genau dann konvergent in $\mathbb{K}^n$, wenn

$$v \quad \in \quad \delta^n \cap \mathbb{Z}^n.$$

Die möglichen Grenzwerte der Einparametergruppen λ_v sind genau die Punkte $(z_1, \ldots, z_n) \in \{0,1\}^n$. Es gibt 2^n dieser Grenzwerte in $X = \mathbb{K}^n$.

Beispiel 4.4.10. Wir betrachten $X = V(T_0T_1 - T_2^2) \subseteq \mathbb{K}^3$ mit dem Basispunkt $x_0 = (1,1,1)$ und der Operation

$$\mathbb{T}^2 \times X \ \to \ X, \qquad t \cdot z \ = \ \left(t_1 z_0, \frac{t_2^2}{t_1} z_1, t_2 z_2\right).$$

Für eine Einparametergruppe der Gestalt $\lambda_v \colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^2$, $t \mapsto (t^{v_1}, t^{v_2})$ erhalten wir also

$$\lambda_v(t) \cdot x_0 \ = \ (t^{v_1}, t^{2v_2 - v_1}, t^{v_2}).$$

Für das Konvergenzverhalten der Einparametergruppen $\lambda_v \colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^2$ in X ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \lambda_v \text{ konvergent in } X \quad &\iff \quad v_1 \geq 0, \ 2v_2 \geq v_1, \ v_2 \geq 0 \\ &\iff \quad v \ \in \ \operatorname{Kegel}\big((0,1),(2,1)\big). \end{aligned}$$

Erinnerung 4.4.11. Es sei $A \in \operatorname{Mat}(m,n;\mathbb{Z})$ gegeben. Dann haben wir den zugehörigen Homomorphismus algebraischer Gruppen

$$\varphi_a \colon \mathbb{T}^n \ \to \ \mathbb{T}^m, \qquad t \ \mapsto \ (t^{A_{1*}}, \ldots, t^{A_{m*}})$$

Der Abschluss des Bildes von φ_A definiert eine affine Varietät:

$$X_A \ := \ \overline{\varphi_A(\mathbb{T}^n)} \ \subseteq \ \mathbb{K}^m.$$

Mit $k := \operatorname{rg}(A)$ und einer geeigneten Zerlegung $A = C \cdot B$ hat man $\varphi_A = \varphi_C \circ \varphi_B$, wobei $\varphi_B \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^k$ surjektiv und $\varphi_C \colon \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^m$ eine abgeschlossene Einbettung ist. Damit erhält man eine Operation von $\mathbb{T}^k$ auf X_A:

$$\mathbb{T}^k \times X_A \ \to \ X_A, \qquad (t,z) \ \mapsto \ t * z := \varphi_C(t) \cdot z,$$

wobei " $\cdot$ " die übliche Operation von $\mathbb{T}^m$ auf $\mathbb{K}^m$ bezeichnet. Dadurch wird $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m)$ zu einer affinen torischen Varietät. Man kann zeigen, dass jede affine torische Varietät torisch ismorph zu einem $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m)$ ist.

Definition 4.4.12. Der zum Gitter $\Lambda(T)$ der Einparametergruppen eines algebraischen Torus T gehörige rationale Vektorraum ist

$$\Lambda_{\mathbb{Q}}(T) \quad := \quad \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda(T).$$

Der *Konvergenzkegel* einer affinen torischen Varietät (X, T, x_0) ist der konvexe Kegel $\sigma(X) \subseteq \Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$ der durch die in X konvergenten Einparametergruppen erzeugt wird.

Beispiel 4.4.13. Für einen Standardtorus $T = \mathbb{T}^k$ haben wir die natürlichen Identifikationen

$$\Lambda(T) \ \cong \ \mathbb{Z}^k, \qquad \Lambda_{\mathbb{Q}}(T) \ \cong \ \mathbb{Q}^k$$

vermöge $v \mapsto \lambda_v$. Der Konvergenzkegel der affinen torischen Varietät $(\mathbb{K}^n, \mathbb{T}^n, \mathbf{1}_n)$ ist der positive Orthant

$$\sigma(\mathbb{K}^n) \ = \ \delta^n \ = \ \mathbb{Q}^n_{\geq 0}.$$

Definition 4.4.14. Ein konvexer Kegel σ in einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum V heisst *spitz*, falls er keine Gerade enthält.

Satz 4.4.15. *Es seien $A \in Mat(m,n;\mathbb{Z})$ und $A = C\cdot B$ eine Zerlegung wie in Satz 4.2.3 und es sei $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m)$ die zugehörige affine torische Varietät. Für $v \in \mathbb{Z}^k$ sei $\lambda_v\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^k$ die zugehörige Einparametergruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Einparametergruppe λ_v ist konvergent in X_A.*
(ii) *Es gilt $C\cdot v \in \delta^n$.*

Der Konvergenzkegel der affinen torischen Varietät $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m)$ ist somit durch $\sigma(X_A) = C^{-1}(\delta^n)$ gegeben. Insbesondere ist $\sigma(X_A)$ ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel.

Beweis. Wir setzen $w := C\cdot v$. Nach Definition der Operation von $\mathbb{T}^k$ auf $X_A \subseteq \mathbb{K}^m$ und Bemerkung 4.4.5 gilt

$$\lambda_v(t) * \mathbf{1}_m \ = \ (\varphi_C \circ \lambda_v)(t)\cdot \mathbf{1}_m \ = \ \lambda_w(t)\cdot\mathbf{1}_m \ = \ (t^{w_1}, \dots, t^{w_m}).$$

Der Morphismus $\lambda_{x_0}\colon \mathbb{K}^* \to X_A$, $t \mapsto \lambda_v(t) * \mathbf{1}_m$ lässt sich genau dann zu einem Morphismus $\mathbb{K} \to X_A$ fortsetzen, wenn er sich zu einem Morphismus $\mathbb{K} \to \mathbb{K}^m$ fortsetzen lässt. Letzteres ist nach obiger Überlegung äquivalent zu $w_1, \dots, w_m \geq 0$, und somit nach Definition von w zu $C\cdot v \in \delta^m$.

Damit ist $C^{-1}(\delta^n)$ der Konvergenzkegel von $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m)$. Insbesondere ist dieser Kegel polyedrisch. Da C trivialen Kern besitzt und δ^n keine Geraden enthält, kann $C^{-1}(\delta^n)$ auch keine Geraden enthalten. □

Beispiel 4.4.16. Wir betrachten die torische Varietät $(\mathbb{P}_1, \mathbb{T}^1, x_0)$ mit $x_0 := [1,1]$ und der $\mathbb{T}^1$-Operation

$$t\cdot[z_0, z_1] \ := \ [z_0, tz_1] \ = \ [t^{-1}z_0, z_1].$$

Die möglichen Einparametergruppen $\mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^1$ sind von der Gestalt $\lambda_v\colon t \mapsto t^v$ mit $v \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\lambda_v(t)\cdot x_0 \ = \ [1, t^v] \ = \ [t^{-v}, 1].$$

Die Einparametergruppe λ_v ist immer konvergent in $\mathbb{P}_1$; für den Grenzwert ergeben sich folgende Möglichkeiten:

$$\lim_{t\to 0} \lambda_v(t)\cdot x_0 \ = \ \begin{cases} [1,0], & \text{falls } v > 0, \\ [1,1], & \text{falls } v = 0, \\ [0,1], & \text{falls } v < 0. \end{cases}$$

Definition 4.4.17. Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Eine Teilmenge $\tau \subseteq \sigma$ heisst *Seite* von σ, geschrieben $\tau \preceq \sigma$, falls es eine Linearform u auf V gibt mit

$$u_{|\sigma} \ \geq \ 0, \qquad\qquad \tau \ = \ \sigma \cap \ker(u).$$

Definition 4.4.18. Es sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Ein *Fächer* in V ist eine endliche Menge Σ spitzer polyedrischer Kegel in V mit folgenden Eigenschaften:

(i) Gilt $\sigma \in \Sigma$ und $\tau \preceq \sigma$, so gilt $\tau \in \Sigma$.
(ii) Gilt $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, so gilt $\sigma \cap \sigma' \preceq \sigma, \sigma'$.

Beispiel 4.4.19. Es seien $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Q}^n$ die kanonischen Basisvektoren und es sei $e_0 := -e_1 - \ldots - e_n$. Dann haben wir spitze konvexe polyedrische Kegel

$$\delta_i \ := \ \mathrm{Kegel}(e_j;\ j \neq i) \subseteq \ \mathbb{Q}^n, \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Die Menge $\Delta_n := \{\tau \subseteq \mathbb{Q}^n;\ \tau \preceq \delta_i \text{ für ein } 0 \leq i \leq n\}$ aller Seiten dieser Kegel ist ein Fächer in $\mathbb{Q}^n$.

Satz 4.4.20. *Wir betrachten die torische Varietät* $(\mathbb{P}_n, \mathbb{T}^n, [\mathbf{1}_n])$ *und die offenen Mengen* $U_i := \mathbb{P}_n \setminus V_{\mathbb{P}_n}(T_i)$. *Dann ist jedes* U_i *invariant unter der* $\mathbb{T}^n$*-Operation und definiert eine affine torische Varietät* $(U_i, \mathbb{T}^n, [\mathbf{1}_n])$ *mit Konvergenzkegel* $\sigma(U_i) = \delta_i$. *Die Menge aller Seiten dieser Konvergenzkegel ist der Fächer* Δ_n.

Beweis. Wir bestimmen den Konvergenzkegel von $(U_i, \mathbb{T}^n, [\mathbf{1}_n])$. Für $v \in \mathbb{Z}^n$ und die zugehörige Einparametergruppe $\lambda_v \colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^n$ haben wir

$$\lambda_v(t)\cdot[1,\ldots,1] \ = \ [1, t^{v_1}, \ldots, t^{v_n}] \ = \ [t^{-v_i}, t^{v_1-v_i}, \ldots, t^{v_n-v_i}].$$

Die Einparametergruppe λ_v konvergiert also genau dann in U_i, wenn $-v_i \geq 0$ und $v_j - v_i \geq 0$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt. Letzteres ist äquivalent zu $v \in \delta_i$. □

Satz 4.4.21. *Es seien* $A \in Mat(m, n; \mathbb{Z})$ *und* $A = C \cdot B$ *eine Zerlegung wie in Satz 4.2.3 und es sei* $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m)$ *die zugehörige affine torische Varietät. Weiter sei* $\overline{X_A} \subseteq \mathbb{P}_m$ *der projektive Abschluss von* $X_A \subseteq \mathbb{K}^m$.

(i) *Für jedes* $U_i := \mathbb{P}_n \setminus V_{\mathbb{P}_n}(T_i)$ *ist* $(\overline{X_A} \cap U_i, \mathbb{T}^k, [\mathbf{1}_{m+1}])$ *eine affine torische Varietät und es gilt*

$$\overline{X_A} \ = \ \overline{X_A} \cap U_0 \cup \ldots \cup \overline{X_A} \cap U_m.$$

(ii) *Der Konvergenzkegel der affinen torischen Varietät* $(\overline{X_A} \cap U_i, \mathbb{T}^k, [\mathbf{1}_{m+1}])$ *ist gegeben durch*

$$\sigma(\overline{X_A} \cap U_i) \ = \ C^{-1}(\delta_i) \ \subseteq \ \mathbb{Q}^k.$$

Die Menge aller Seiten der Konvergenzkegel $\sigma(\overline{X_A} \cap U_i)$, *wobei* $i = 0, \ldots, m$, *bildet einen Fächer* $\Sigma(\overline{X_A})$ *in* $\mathbb{Q}^k$.

Beweis. Aussage (i) ist offensichtlich. Für Aussage (ii) beachte man, dass eine Einparametergruppe $\lambda_v \colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^k$ genau dann in $\overline{X_A} \cap U_i$ konvergiert, wenn $\lambda_{C\cdot v} \colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^m$ in U_i konvergiert. Die Kegel von $\Sigma(\overline{X_A})$ sind genau die Urbilder der Kegel von Δ_m unter der durch C definierten injektiven linearen Abbildung $\mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}^m$. Damit sieht man, dass $\Sigma(\overline{X_A})$ ein Fächer ist. □

Aufgaben zu Abschnitt 4.4.

Aufgabe 4.4.22. Betrachte den Standard-Torus $\mathbb{T}^n$ und die folgenden Einparametergruppen:

$$\lambda_i := \lambda_i \colon \mathbb{K}^* \ \to \ \mathbb{T}^k, \qquad t \ \mapsto \ (1, \ldots, 1, t, 1, \ldots, 1),$$

wobei t jeweils an der i-ten Stelle steht. Zeige, dass $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Basis des Gitters $\Lambda(\mathbb{T}^n)$ ist.

Aufgabe 4.4.23. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ und $\varphi_A \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ der zugehörige Homomorphismus algebraischer Gruppen. Beweise folgende Aussagen:

(i) A ist die darstellende Matrix von $(\varphi_A)_*$ bezüglich der Basen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ von $\mathbb{T}^n$ bzw. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ von $\mathbb{T}^m$ aus Aufgabe 4.4.22.
(ii) Die Abbildung $\mathrm{Mor}(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^m) \to \mathrm{Hom}(\Lambda(\mathbb{T}^n), \Lambda(\mathbb{T}^m))$, $\varphi \mapsto \varphi_*$ ist bijektiv.

Aufgabe 4.4.24. Zeige: Der kovariante Funktor $T \mapsto \Lambda(T)$ und $\varphi \mapsto \varphi_*$ von der Kategorie der algebraischen Tori in die Kategorie der Gitter aus Satz 4.4.7 ist wesentlich surjektiv und volltreu. *Hinweis:* Verwende Aufgabe 4.4.23 (ii).

Aufgabe 4.4.25. Weise die Fächereigenschaften für Δ_n aus Beispiel 4.4.19 explizit nach.

Aufgabe 4.4.26. Es sei $F \colon V' \to V$ eine injektive lineare Abbildung endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorräume. Zeige: Ist Σ ein Fächer in V, so ist $\Sigma' := \{F^{-1}(\sigma);\ \sigma \in \Sigma\}$ ein Fächer in V.

Aufgabe 4.4.27. Bestimme den von den Konvergenzkegeln $\sigma(\overline{X_A} \cap U_i)$ erzeugten Fächer $\Sigma(\overline{X_A})$ aus Satz 4.4.21 explizit für die Matrizen

$$A \ = \ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad\qquad A \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Geometrie projektiver Varietäten

5.1. **Rationale Abbildungen und Aufblasungen.**

Konstruktion 5.1.1. Es seien X und Y irreduzible Varietäten. Wir betrachten die Menge

$$\mathfrak{R}(X,Y) \quad := \quad \{(U,\varphi);\ \emptyset \neq U \subseteq X \text{ offen},\ \varphi\colon U \to Y \text{ Morphismus}\}$$

und darauf die Äquivalenzrelation

$$(U,\varphi) \ \sim \ (V,\psi) \quad :\Longleftrightarrow \quad \varphi_{|U\cap V} \ = \ \psi_{|U\cap V}.$$

Wir setzen $\mathrm{Rat}(X,Y) := \mathfrak{R}/\sim$. Die Elemente von $\mathrm{Rat}(X,Y)$ nennt man *rationale Abbildungen* von X nach Y und bezeichnet sie mit $[U,\varphi]\colon X \dashrightarrow Y$ oder kurz $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$

Beispiel 5.1.2. Es sei X eine irreduzible Varietät. Dann ist jede rationale Funktion auf X eine rationale Abbildung $X \dashrightarrow \mathbb{K}$.

Definition 5.1.3. Es seien X, Y irreduzible Varietäten und $[U,\varphi]\colon X \dashrightarrow Y$ eine rationale Abbildung.

(i) Man nennt $[U,\varphi]$ *definiert in* $x \in X$, falls es ein $(V,\psi) \in \mathfrak{R}(X,Y)$ gibt mit $[U,\varphi] = [V,\psi]$ und $x \in V$.
(ii) Der *Definitionsbereich* von $[U,\varphi]$ ist die Vereinigung $\mathrm{Def}\,[U,\varphi]$ aller $V \subseteq X$, wobei $(V,\psi) \in \mathfrak{R}(X,Y)$ mit $[U,\varphi] = [V,\psi]$.
(iii) Man nennt die rationale Abbildung $[U,\varphi]$ *dominant*, falls die Menge $\varphi(U)$ dicht in Y liegt.
(iv) Man nennt $[U,\varphi]\colon X \dashrightarrow Y$ *birational*, falls es eine rationale Abbildung $[V,\psi]\colon Y \dashrightarrow X$ und nichtleere offene Mengen $U_0 \subseteq U$ sowie $V_0 \subseteq V$ gibt mit

$$\begin{aligned} \varphi(U_0) \ &= \ V_0, & \psi(V_0) \ &= \ U_0, \\ \psi_{|V_0} \circ \varphi_{|U_0} \ &= \ \mathrm{id}_{U_0}, & \varphi_{|U_0} \circ \psi_{|V_0} \ &= \ \mathrm{id}_{V_0}. \end{aligned}$$

Beispiel 5.1.4. Es sei $W_n := \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Dann definiert die kanonische Abbildung

$$\pi_n\colon W_n \ \to \ \mathbb{P}_n, \qquad z \ \mapsto \ [z]$$

eine dominante rationale Abbildung $[W_n,\pi_n]\colon \mathbb{K}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{P}_n$. Ihr Definitionsbereich ist gegeben durch

$$\mathrm{Def}\,[W_n,\pi_n] \ = \ \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \ \subsetneq \ \mathbb{K}^n.$$

Tatsächlich lässt sich π_n nicht stetig nach 0 fortsetzen, denn sonst hätte man $\pi_n(0) = \pi_n(w)$ für jedes $w \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$; man nennt $0 \in \mathbb{K}^{n+1}$ auch eine *Unbestimmtheitsstelle* von $[W_n,\pi_n]$.

Bemerkung 5.1.5. Es seien X, Y irreduzible Varietäten und $[U,\varphi]\colon X \dashrightarrow Y$ eine dominante rationale Abbildung. Dann hat man einen wohldefinierten Komorphismus

$$\varphi^*\colon \mathbb{K}(Y) \ \to \ \mathbb{K}(X), \qquad [V,g] \ \mapsto \ [\varphi^{-1}(V), g \circ \varphi].$$

Die Abbildung $[U,\varphi]\colon X \dashrightarrow Y$ ist genau dann birational, wenn ihr Komorphismus $\varphi^*\colon \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Definition 5.1.6. Es seien X, Y irreduzible Varietäten und $[U,\varphi]\colon X \dashrightarrow Y$ eine rationale Abbildung mit $U = \mathrm{Def}\,[U,\varphi]$. Der *Graph* von $[U,\varphi]$ ist die abgeschlossene Untervarietät

$$\overline{\Gamma_\varphi} \ = \ \overline{\{(x,\varphi(x));\ x \in U\}} \ \subseteq \ X \times Y.$$

Bemerkung 5.1.7. Es seien X, Y irreduzible Varietäten und $[U, \varphi]\colon X \dashrightarrow Y$ eine rationale Abbildung mit $U = \mathrm{Def}\,[U, \varphi]$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_\varphi \arrow[d, "\mathrm{pr}_X"] & \subseteq & \overline{\Gamma_\varphi} \arrow[d, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"] & \\
U \arrow[u, bend left, "x \mapsto (x,\varphi(x))"] \arrow[rrr, bend right, "\varphi"'] & \subseteq & X \arrow[r, dashed] & Y
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Dabei ist der Morphismus $U \to \overline{\Gamma_\varphi}$, $x \mapsto (x, \varphi(x))$ eine offene Einbettung.

Konstruktion 5.1.8. Wir betrachten $\mathbb{K}^n$ mit den Koordinaten $z = (z_1, \ldots, z_n)$ und $\mathbb{P}_{n-1}$ mit den homogenen Koordinaten $[w] = [w_1, \ldots, w_n]$. Dann ist

$$\mathrm{Bl}(n) \ := \ \{(z, [w]);\ z_i w_j = z_j w_i,\ 1 \le i, j \le n\} \ \subseteq \ \mathbb{K}^n \times \mathbb{P}_{n-1}$$

eine glatte n-dimensionale abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{K}^n \times \mathbb{P}_{n-1}$. Für jedes $1 \le k \le n$ hat man eine affine offene Menge

$$V_k \ := \ \{(z, [w]) \in \mathrm{Bl}(n);\ w_k \ne 0\} \ \subseteq \ \mathrm{Bl}(n).$$

Diese Mengen überdecken $\mathrm{Bl}(n)$ und man hat für jedes $1 \le k \le n$ zueinander inverse Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_k\colon \mathbb{K}^n & \to & V_k \\
u & \mapsto & (u_k(u_1, \ldots, u_{k-1}, 1, u_{k+1}, \ldots u_n),\ [u_1, \ldots, u_{k-1}, 1, u_{k+1}, \ldots u_n]),
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\psi_k\colon V_k & \to & \mathbb{K}^n \\
(z, [w]) & \mapsto & \left(\dfrac{w_1}{w_k}, \ldots, \dfrac{w_{k-1}}{w_k}, z_k, \dfrac{w_{k+1}}{w_k}, \ldots, \dfrac{w_n}{w_k} \right).
\end{array}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathrm{Bl}(n)$ abgeschlossen in $\mathbb{K}^n \times \mathbb{P}_{n-1}$ ist. Dies prüfen wir lokal nach. Die affinen offenen Mengen

$$W_k \ := \ \{(z, [w]) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{P}_{n-1} \in;\ w_j \ne 0\} \ \subseteq \ \mathbb{K}^n \times \mathbb{P}_{n-1}$$

überdecken $\mathbb{K}^n \times \mathbb{P}_{n-1}$ und man hat für jedes $1 \le k \le n$ einen kanonischen Isomorphismus

$$\eta_k\colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{n-1} \ \to \ W_k, \qquad (z, [w]) \ \mapsto \ (z, [w_1, \ldots, w_{k-1}, 1, w_k, \ldots, w_{n-1}]).$$

Die Abgeschlossenheit von $V_k = \mathrm{Bl}(n) \cap W_k$ in W_k ergibt sich dann durch Zurückholen der definierenden Gleichungen: Mit $w' := (w_1, \ldots, w_{k-1}, 1, w_k, \ldots, w_{n-1})$ gilt

$$\begin{array}{rcl}
\eta_k^{-1}(V_k) & = & V(z_i w_j' = z_j w_i';\ i \ne k \ne j) \ \cap \ V(z_k w_j' = z_j) \\
& \subseteq & \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{n-1}.
\end{array}$$

Die Tatsache, dass die Abbildungen $\varphi_k\colon \mathbb{K}^n \to V_k$ und $\psi_k\colon V_k \to \mathbb{K}^n$ zueinander inverse Morphismen sind, ist offensichtlich. □

Beispiel 5.1.9. Für $n = 2$ ist die Varietät $\mathrm{Bl}(2)$ aus Konstruktion 5.1.8 gegeben durch

$$\mathrm{Bl}(2) \ := \ \{((x, y), [z, w]);\ xw = yz\} \ \subseteq \ \mathbb{K}^2 \times \mathbb{P}_1.$$

Weiter sind die Isomorphismen $\varphi_k\colon \mathbb{K}^2 \to V_k$ und $\psi_k\colon X_k \to \mathbb{K}^2$ für $k = 1, 2$ gegeben durch

$$\begin{array}{ll}
\varphi_1(u, v) = ((u, uv), [1, v]), & \varphi_2(u, v) = ((uv, v), [u, 1]), \\
\psi_1((x, y), [z, w]) = \left(x, \dfrac{w}{z} \right), & \psi_2((x, y), [z, w]) = \left(\dfrac{z}{w}, y \right).
\end{array}$$

Konstruktion 5.1.10. Es sei $\mathrm{Bl}(n) \subseteq \mathbb{K}^n \times \mathbb{P}_{n-1}$ wie in Konstruktion 5.1.8. Dann hat man kanonische Morphismen

$$\begin{array}{rclcrcl} \pi\colon \mathrm{Bl}(n) & \to & \mathbb{K}^n, & & (z,[w])) & \mapsto & z, \\ \lambda\colon \mathrm{Bl}(n) & \to & \mathbb{P}_{n-1}, & & (z,[w])) & \mapsto & [w]. \end{array}$$

Wir nennen $\pi\colon \mathrm{Bl}(n) \to \mathbb{K}^n$ die *Aufblasung* von $\mathbb{K}^n$ im Nullpunkt. Über $W := \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ist $\pi\colon \pi^{-1}(W) \to W$ ein Isomorphismus mit Umkehrmorphismus

$$W \ \to \ \pi^{-1}(W), \qquad w \ \mapsto \ (w,[w]).$$

Weiter hat man $\pi^{-1}(0) \cong \mathbb{P}_{n-1}$; hier definiert Einschränken von λ auf $\pi^{-1}(0)$ einen expliziten Isomorphismus mit Umkehrmorphismus

$$\sigma\colon \mathbb{P}_{n-1} \ \to \ \mathrm{Bl}(n), \qquad [w] \ \mapsto \ (0,[w]).$$

Der Morphismus $\lambda\colon \mathrm{Bl}(n) \to \mathbb{P}_{n-1}$ ist *lokal trivial mit typischer Faser* $\mathbb{K}$: Mit $U_k = \{[w] \in \mathbb{P}_{n-1};\ w_k \neq 0\}$ hat man $V_k = \lambda^{-1}(U_k)$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bl}(n) \arrow[d, "\lambda"'] & V_k \arrow[l, "\supseteq"'] \arrow[rr, "{(z,[w])\mapsto([w],z_k)}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & U_k \times \mathbb{K} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{U_k}"] \\ \mathbb{P}_{n-1} & & U_k \arrow[ll, "\supseteq"] & \end{tikzcd}$$

Dabei ist $V_k \to U_k \times \mathbb{K}$ ein Isomorphismus. Für $[w] \in \mathbb{P}_{n-1}$ ist die Faser $\lambda^{-1}([w])$ konkret gegeben durch

$$\lambda^{-1}([w]) \ = \ \{(tw,[w];\ t \in \mathbb{K}\}.$$

Satz 5.1.11. *Die Varietät* $\mathrm{Bl}(n)$ *ist irreduzibel.*

Beweis. Zunächst beachte man, dass $\pi^{-1}(\mathbb{K}^n \setminus \{0\})$ irreduzibel ist. Weiter liegt jeder Punkt $(0,[w])$ in $\lambda^{-1}([w])$ und somit im Abschluss von $\pi^{-1}(\mathbb{K}^n \setminus \{0\})$. Mit anderen Worten, die Menge $\pi^{-1}(\mathbb{K}^n \setminus \{0\})$ liegt dicht in $\mathrm{Bl}(n)$. □

Folgerung 5.1.12. *Für die rationale Abbildung* $[W_n,\pi_n]\colon \mathbb{K}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{P}_n$ *haben wir* $\mathrm{Bl}(n+1) = \overline{\Gamma_{\pi_n}}$.

Konstruktion 5.1.13. Es sei $Y \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Untervarietät mit $0 \in Y$, und es sei $\pi\colon \mathrm{Bl}(n) \to \mathbb{K}^n$ die Aufblasung im Nullpunkt. Die *eigentliche* (auch *strikte*) *Transformierte* von Y ist die Untervarietät

$$\widetilde{Y} \ := \ \overline{\pi^{-1}(Y \setminus \{0\})} \ \subseteq \ \mathrm{Bl}(n).$$

Man hat einen kanonischen Morphismus $\kappa := \pi_{|\widetilde{Y}}\colon \widetilde{Y} \to Y$. Die Einschränkung $\kappa\colon \kappa^{-1}(Y \setminus \{0\}) \to Y \setminus \{0\}$ ist ein Isomorphismus.

Beispiel 5.1.14. Es sei $w \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Die strikte Transformierte der Ursprungsgeraden Y_w durch w ist

$$\widetilde{Y}_w \ = \ \{(tw,[w];\ t \in \mathbb{K}\} \ \subseteq \ \mathrm{Bl}(n).$$

Beispiel 5.1.15. Für $a \in \mathbb{K}$ betrachten wir die Kubik $Y = V(y^2 - x^3 - ax^2) \subseteq \mathbb{K}^2$. Zunächst vermerken wir

$$Y^{\mathrm{sing}} \ = \ \{(0,0\} \ \subseteq \ Y.$$

Die eigentliche Transformierte $\widetilde{Y} \subseteq \mathrm{Bl}(n)$ bestimmen wir lokal: In den Bezeichnungen von Beispiel 5.1.9 haben wir

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1^{-1}(\widetilde{Y}) & = & V(u^2v^2 - u^3 - au^2) \ = \ V(u^2) \cup V(v^2 - u - a). \\ \varphi_2^{-1}(\widetilde{Y}) & = & V(v^2 - u^3v^3 - au^2v^2) \ = \ V(v^2) \cup V(1 - u^3v - au^2). \end{array}$$

Dabei beschreiben $V(u^2)$ bzw. $V(v^2)$ gerade die Faser $\pi^{-1}(0)$. Folglich erhalten wir für die eigentliche Transformierte

$$\varphi_1^{-1}(\widetilde{Y}) \ = \ V(v^2 - au), \qquad \varphi_2^{-1}(\widetilde{Y}) \ = \ V(1 - u^3 v - au^2).$$

Insbesondere sehen wir, dass $\widetilde{Y}$ glatt ist. Weiter erhalten wir, dass $\widetilde{Y} \cap \pi^{-1}(0)$ genau aus den Punkten $((0,0),[1,\pm\sqrt{a}])$ besteht.

Konstruktion 5.1.16. Es seien X eine affine Varietät und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Untervarietät mit Verschwindungsideal $I_X(Y) = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$. Dann hat man einen rationalen Morphismus

$$\varphi\colon X \ \to \ \mathbb{P}_{n-1}, \qquad x \ \mapsto \ [f_1(x), \ldots, f_n(x)].$$

Die *Aufblasung* von X in Y ist der Graph $\widetilde{X} := \overline{\Gamma_\varphi}$ zusammen mit der Projektion $\pi := \mathrm{pr}_X \colon \widetilde{X} \to X$ Über dem Definitionsbereich $W := X \backslash Y$ von φ ist $\pi\colon \pi^{-1}(W) \to W$ ein Isomorphismus.

Aufgaben zu Abschnitt 5.1.

Aufgabe 5.1.17. Zeige: Die Aufblasung $\mathrm{Bl}(n)$ von $\mathbb{K}^n$ im Nullpunkt wird zu einer torischen Varietät $(\mathrm{Bl}(n), \mathbb{T}^n, \mathbf{1})$ durch

$$t \cdot (z, [w]) \ := \ ((t_1 z_1, \ldots, t_n z_n), [t_1 w_1, \ldots, t_n w_n]), \qquad \mathbf{1} \ := \ ((1, \ldots, 1), [1, \ldots, 1]).$$

Bestimme die Konvergenzfächer für $\mathrm{Bl}(2)$ und $\mathrm{Bl}(3)$. Stelle eine Vermutung für den allgemeinen Fall $\mathrm{Bl}(n)$ auf.

Aufgabe 5.1.18. Beweise Folgerung 5.1.12: Für die rationale Abbildung $[W_n, \pi_n] \colon \mathbb{K}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{P}_n$ haben wir $\mathrm{Bl}(n+1) = \overline{\Gamma_{\pi_n}}$.

Aufgabe 5.1.19. Es sei $Y := V(T_1T_2 - T_3^2) \subseteq \mathbb{K}^3$. Zeige: Es gilt $Y^{\mathrm{sing}} = \{0\}$. Untersuche die eigentliche Transformierte $\widetilde{Y} \subseteq \mathrm{Bl}(3)$ von Y auf Singularitäten.

Aufgabe 5.1.20. Es sei $Y := V(T_1^4 - T_2^3) \subseteq \mathbb{K}^2$. Zeige: Es gilt $Y^{\mathrm{sing}} = \{0\}$. Untersuche die eigentliche Transformierte $\widetilde{Y} \subseteq \mathrm{Bl}(2)$ von Y auf Singularitäten.

Aufgabe 5.1.21. Es gelte $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) = 0$. Dann ist jeder bijektive Morphismus irreduzibler Prävarietäten birational.

Aufgabe 5.1.22. Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Beweise folgende Aussagen:

(i) Die irreduziblen $\mathbb{K}$-Varietäten bilden zusammen mit den dominanten rationalen Morphismen eine Kategorie $\mathfrak{V}_{\mathrm{rat}}$.

(ii) Die endlich erzeugten Körpererweiterungen $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ bilden eine Kategorie $\mathfrak{E}_{\mathbb{K}}$, wobei ein Morphismus von $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ nach $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}'$ ein Homomorphismus $\alpha \colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}'$ mit $\alpha_{|\mathbb{K}} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ ist.

(iii) Man hat einen kontravarianten, volltreuen, wesentlich surjektiven Funktor

$$\mathfrak{V}_{\mathrm{rat}} \ \to \ \mathfrak{E}_{\mathbb{K}}, \qquad X \ \mapsto \ \mathbb{K}(X), \qquad \varphi \ \mapsto \ \varphi^*.$$

5.2. Projektive Varietäten und Vollständigkeit.

Definition 5.2.1. Es sei X eine Prävarietät.

(i) Man nennt X eine *projektive Varietät*, falls X isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum eines $\mathbb{P}_n$ ist.
(ii) Man nennt X eine *quasiprojektive Varietät*, falls X isomorph zu einem offenen Unterraum einer projektiven Varietät ist.
(iii) Man nennt X eine *quasiaffine Varietät*, falls X isomorph zu einem offenen Unterraum einer affinen Varietät ist.

Beispiel 5.2.2. Der projektive Raum $\mathbb{P}_n$ ist eine projektive Varietät. Quadriken in $\mathbb{P}_n$ sind projektive Varietäten.

Beispiel 5.2.3. Die Varietät $\mathbb{P}_2 \setminus \{[1,0,0]\}$ ist quasiprojektiv, aber weder projektiv noch quasiaffin.

Beispiel 5.2.4. Die Varietät $\mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist quasiaffin aber nicht affin.

Satz 5.2.5. *Projektive, quasiprojektive und quasiaffine Varietäten sind separiert.*

Beweis. Eine Varietät X der o.g. Typen ist isomorph zu einem lokal abgeschlossenen Unterraum eines $\mathbb{P}_n$. Dieser ist separiert. Somit ist auch X separiert. □

Bemerkung 5.2.6. Abgeschlossene Unterräume projektiver Varietäten sind projektiv. Lokal abgeschlossene Unterräume quasiprojektiver (quasuiaffiner) Varietäten sind quasiprojektiv (quasiaffin).

Satz 5.2.7. *Produkte sowie Faserprodukte projektiver, (quasiprojektiver, quasiaffiner) Varietäten sind projektiv (quasiprojektiv, quasiaffin).*

Beweis. Es seien X und Y projektive Varietäten. Dann ist X isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum $X' \subseteq \mathbb{P}_n$ und Y zu einem abgeschlossenen Unterraum $Y' \subseteq \mathbb{P}_m$. Mit der Segre-Einbettung erhalten wir

$$X' \times Y' \ \subseteq\ \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_m \ \cong\ Z \subseteq \mathbb{P}_{nm+n+m}$$

wobei die Inklusionen jeweils abgeschlossene Unterräume darstellen. Somit ist $X \times Y \cong X' \times Y'$ eine projektive Varietät.

Sind X und Y quasiprojektiv, so hat man Isomorphismen $X \cong U$ und $Y \cong V$ mit offenen Unterräumen $U \subseteq X'$ und $V \subseteq Y'$ projektiver Varietäten X' bzw. Y'. Es gilt dann $X \times Y \cong U \times V$ und $U \times V$ ist ein offener Unterraum der projektiven Varietät $X' \times Y'$. Im Fall quasiaffiner Varietäten X und Y argumentiert man analog.

Die Aussagen über Faserprodukte ergeben sich aus der Tatsache, dass ein Faserprodukt $X \times_Z Y$ von projektiven (quasiprojektiven, quasiaffinen) Varietäten X und Y stets als abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$ realisiert werden kann. □

Definition 5.2.8. Eine Varietät X heisst *vollständig*, falls für jede Prävarietät Y und jede abgeschlossene Menge $Z \subseteq X \times Y$ das Bild $\mathrm{pr}_Y(Z) \subseteq Y$ abgeschlossen ist.

Beispiel 5.2.9. Jede endliche Menge ist eine vollständige Varietät.

Beispiel 5.2.10. Die affine Varietät $\mathbb{K}$ ist nicht vollständig. Für $Z := V(T_1T_2-1) \subseteq \mathbb{K}^2$ ist $\mathrm{pr}_2(Z) = \mathbb{K}^*$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{K}$.

Satz 5.2.11. *Abgeschlossene Untervarietäten vollständiger Varietäten sind vollständig.*

Beweis. Es seien X eine vollständige Varietät und $X' \subseteq X$ eine abgeschlossene Untervarietät. Ist $Z \subseteq X' \times Y$ abgeschlossen, so ist Z auch abgeschlossen in $X \times Y$ und somit ist $\mathrm{pr}_Y(Z) \subseteq Y$ abgeschlossen. □

Satz 5.2.12. *Produkte sowie Faserprodukte vollständiger Varietäten sind vollständig.*

Beweis. Es seien X, X' vollständig, Y eine Prävarietät und $Z \subseteq (X \times X') \times Y$ abgeschlossen. Dann ist Z abgeschlossen in $X \times (X' \times Y)$. Wegen der Vollständigkeit von X ist $\mathrm{pr}_{X' \times Y}(Z)$ abgeschlossen in $X' \times Y$. Wegen der Vollständigkeit von X' ist $\mathrm{pr}_Y(\mathrm{pr}_{X' \times Y}(Z)) = \mathrm{pr}_Y(Z)$ abgeschlossen in Y. □

Satz 5.2.13. *Es sei X eine irreduzible vollständige Varietät. Dann ist jede Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ konstant.*

Beweis. Es sei eine Funktion $0 \neq f \in \mathcal{O}(X)$ gegeben. Wir betrachten die abgeschlossene Menge

$$Z \ := \ \{(x,t) \in X \times \mathbb{K};\ f(x)t = 1\} \ \subseteq \ X \times \mathbb{K}.$$

Wegen der Vollständigkeit von X erhalten wir eine dann abgeschlossene Menge

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{\mathbb{K}}(Z) &= \{t \in \mathbb{K}^*;\ t = f(x)^{-1} \text{ mit einem } x \in X\} \\ &= \{f(x)^{-1};\ x \in X \setminus V_X(f)\} \\ &\subseteq \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{pr}_{\mathbb{K}}(Z) \subseteq \mathbb{K}^*$ ist $\mathrm{pr}_{\mathbb{K}}(Z)$ endlich. Also nimmt f^{-1} auf $U := X \setminus V_X(f)$ nur endlich viele Werte an. Da U irreduzibel ist, muss f^{-1} und somit auch f auf U konstant sein. Folglich ist $f \in \mathcal{O}(X)$ konstant. □

Folgerung 5.2.14. *Für jede algebraische Varietät $(X, \mathcal{O}_X)$ sind äquivalent:*

(i) *$(X, \mathcal{O}_X)$ ist quasiaffin und vollständig.*
(ii) *X ist endlich.*

Beweis. Die Implikation „(ii)⇒(i)“ ist trivial. Zu „(i)⇒(ii)“: Es sei X zunächst irreduzibel. Da X quasiaffin ist, trennen die Funktionen $\mathcal{O}_X(X)$ die Punkte von X. Nach Satz 5.2.13 muss X einpunktig sein. Für reduzibles X erhält man die Aussage durch Zerlegen von X in irreduzible Komponenten. □

Satz 5.2.15. *Es sei X eine vollständige Varietät, und es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus in eine Varietät Y. Dann ist das Bild $\varphi(X)$ eine abgeschlossene Teilmenge in Y.*

Beweis. Da Y separiert ist, ist der Graph $\Gamma_\varphi \subseteq X \times Y$ eine abgeschlossene Teilmenge. Da X vollständig ist, muss $\mathrm{pr}_Y(\Gamma_\varphi)$ abgeschlossen in Y sein. Die Behauptung ergibt sich nun mit $\varphi(X) = \mathrm{pr}_Y(\Gamma_\varphi)$. □

Satz 5.2.16. *Projektive Varietäten sind vollständig.*

Lemma 5.2.17. *Es seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ homogene Polynome, und es sei $d_i := \deg(f_i)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt $V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \{0\}$.*
(ii) *Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, für das die folgende lineare Abbildung surjektiv ist:*

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]_{k-d_i} \ \to \ \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]_k, \qquad (g_1, \ldots, g_r) \ \mapsto \ \sum_{j=1}^{r} g_i f_i.$$

Beweis. Zu “(i)⇒(ii)”. Da jedes T_i in 0 verschwindet, liefert der Hilbertsche Nullstellensatz ein d mit $T_1^d, \ldots, T_n^d \in \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$. Für $k := nd$ gilt also $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]_k \subseteq \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$. Damit ergibt sich (ii).

Zu “(ii)⇒(i)”: Nach (ii) gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $T_i^k \in \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Das impliziert $V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \{0\}$. □

Lemma 5.2.18. *Es sei $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Dann erhält man eine $\mathbb{K}^*$-Wirkung auf $\mathbb{K}^n$ durch*

$$T \cdot z \quad := \quad (t^{a_1} z_1, \ldots, t^{a_n} z_n).$$

Weiter erhält man eine $\mathbb{Z}$-Graduierung $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]_d$ des Polynomringes durch

$$K[T_1, \ldots, T_n]_d \quad := \quad \mathrm{Lin}(T^\nu;\ \nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0},\ a_1\nu_1 + \ldots + a_n\nu_n = d).$$

Dabei gelten folgende Aussagen:

(i) *Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist genau dann homogen vom Grad d, wenn $f(t \cdot z) = t^d f(z)$ für alle $t \in \mathbb{K}^*$ und alle $z \in \mathbb{K}^n$ gilt.*

(ii) *Eine abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq \mathbb{K}^n$ ist genau dann $\mathbb{K}^*$-invariant, wenn ihr Verschwindungsideal $I(X)$ homogen ist.*

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich aus der Tatsache, dass man für jedes $f = \sum a_\nu T^\nu$ erhält

$$\begin{aligned} f(t \cdot z) &= \sum a_\nu (t^{a_1} z_1)^{\nu_1} \cdots (t^{a_n} z_n)^{\nu_n} \\ &= \sum a_\nu t^{a_1\nu_1 + \ldots + a_n\nu_n} z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n} \\ &= \sum_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} t^d \left(\sum_{a_1\nu_1 + \ldots + a_n\nu_n = d} a_\nu z^\nu \right). \end{aligned}$$

Der Nachweis von (ii) verläuft genau wie in Satz 1.3.19. Es sei zunächst X invariant. Ist dann $f \in I(X)$ gegeben, so betrachten wir die Zerlegung $f = \sum_k f_k$ in homogene Polynome f_k vom Grad k. Wir haben zu zeigen, dass jedes f_k auf X verschwindet. Ist $z \in X$ gegeben, so gilt

$$0 \;=\; f(t \cdot z) \;=\; \sum_k f_k(t \cdot z) \;=\; \sum_k t^k f_k(z)$$

für alle $t \in \mathbb{K}^*$. Der letzte Ausdruck in der obigen Gleichung ist ein Polynom in t, das für alle $t \in \mathbb{K}^*$ verschwindet. Folglich müssen alle Koeffizienten $f_k(z)$ dieses Polynoms verschwinden. Damit ergibt sich $f_k \in I(X)$.

Es sei nun $I(X)$ homogen. Wir haben zu zeigen, dass mit $z \in X$ auch alle $t \cdot z$, $t \in \mathbb{K}^*$, in X liegen. Für jedes $f \in I(X)$ betrachten wir seine Zerlegung $f = \sum_k f_k$ in homogene Polynome. Die Behauptung ergibt sich dann mit

$$f(t \cdot z) \;=\; \sum_k f_k(t \cdot z) \;=\; \sum_k t^k f_k(z) \;=\; 0.$$

□

Beweis von Satz 5.2.16. Da abgeschlossene Untervarietäten vollständiger Varietäten vollständig sind, genügt es zu zeigen, dass $\mathbb{P}_n$ vollständig ist. Es seien also eine Prävarietät Y und eine abgeschlossene Menge $Z \subset \mathbb{P}_n \times Y$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $\mathrm{pr}_Y(Z)$ abgeschlossen in Y ist.

Fall 1: Es gilt $Y = \mathbb{K}^m$. Der Vektor $v := (1,\dots,1;0,\dots,0) \in \mathbb{Z}^{n+1+m}$ definiert gemäß Lemma 5.2.18 die $\mathbb{K}^*$-Operation $t\cdot(z,w) := (tz,w)$ auf $\mathbb{K}^{n+1+m}$. Die Menge

$$B \ := \ \{(z;w);\ ([z],w) \in Z\} \ \subseteq \ (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{K}^m$$

ist offenbar $\mathbb{K}^*$-invariant. Der Abschluss $C := \overline{B} \subseteq \mathbb{K}^{n+1+m}$ ist damit ebenfalls $\mathbb{K}^*$-invariant; siehe Bemerkung 4.2.2. Nach Lemma 5.2.18 wird das Verschwindungsideal $I(C)$ erzeugt durch (v-)homogene Polynome

$$f_1,\dots,f_r \ \in \ \mathbb{K}[T,S] \ := \ \mathbb{K}[T_0,\dots,T_n,S_1,\dots,S_m].$$

Es bezeichne d_i den Grad des Polynomes $f_i \in \mathbb{K}[T,S]$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ hat man dann eine $\mathbb{K}[S]$-lineare Abbildung

$$\mu_k\colon \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{K}[T,S]_{k-d_i} \ \to \ \mathbb{K}[T,S]_k, \qquad (g_1,\dots,g_r) \ \mapsto \ \sum_{i=1}^r g_i f_i.$$

Fixiert man auf beiden Seiten $\mathbb{K}[S]$-Basen $\mathfrak{B}_k$ bzw. $\mathfrak{C}_k$, jeweils bestehend aus Monomen von $\mathbb{K}[T]$, so erhält man Darstellungen der μ_k durch Matrizen A_k mit Koeffizienten in $\mathbb{K}[S]$. Für jeden Punkt $w \in \mathbb{K}^m$ erhalten wir eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung

$$\mu_k(w)\colon \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{K}[T]_{k-d_i} \ \to \ \mathbb{K}[T]_k, \qquad (g_1,\dots,g_r) \ \mapsto \ \sum_{i=1}^r g_i f_i(T,w).$$

Man beachte hierbei, dass $\mathbb{K}[T]_k$ die im üblichen Sinne homogenen Polynome vom Grad k bezeichnet. Weiter wird $\mu_k(w)$ bezüglich der $\mathbb{K}$-Basen $\mathfrak{B}_k$ bzw. $\mathfrak{C}_k$ durch die Matrix $A_k(w)$ dargestellt. Vermöge Auswertung in $w \in \mathbb{K}^m$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I(C) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(\mu_k) \arrow[d] & \subseteq & \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{K}[T,S]_k \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{K}[T,S] \arrow[d, "f(T,S)\mapsto f(T,w)"] \\
\mathfrak{a}_w \arrow[r, equal] & \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(\mu_k(w)) & \subseteq & \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{K}[T]_k \arrow[r, equal] & \mathbb{K}[T]
\end{tikzcd}$$

Da die senkrechten Abbildungen Epimorphismen sind, muss $\mathfrak{a}_w$ ein homogenes Ideal in $\mathbb{K}[T]$ sein; es wird von den Polynomen $f_1(T,w),\dots,f_r(T,w)$ erzeugt. Für jeden Punkt $w \in \mathbb{K}^m$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
w \in \mathrm{pr}_Y(Z) \quad &\iff \quad \text{es ex. } z \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\} \text{ mit } ([z],w) \in Z \\
&\iff \quad \text{es ex. } z \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\} \text{ mit } (z,w) \in C \\
&\iff \quad \text{es ex. } z \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\} \text{ mit } f(z,w) = 0 \text{ f. alle } f \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(\mu_k) \\
&\iff \quad \text{es ex. } z \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\} \text{ mit } f(z) = 0 \text{ f. alle } f \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(\mu_k(w)) \\
&\iff \quad \text{kein } \mu_k(w) \text{ ist surjektiv} \\
&\iff \quad \text{es gilt } \mathrm{rg}(A_k(w) < \dim(\mathbb{K}[T]_k].
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die vorletzte Äquivalenz mit Lemma 5.2.17. Die letzte Bedingung definiert jedoch eine algebraische Menge in $\mathbb{K}^m$.

Fall 2: Y ist eine beliebige Prävarietät. Wir überdecken Y durch offene affine Untervarietäten $V_1,\dots,V_r$. Die Menge ist $\mathrm{pr}_Y(Z)$ genau dann abgeschlossen in Y, wenn jede Menge $\mathrm{pr}_Y(Z) \cap V_i$ abgeschlossen in V_i ist. Es gilt

$$\mathrm{pr}_Y(Z) \cap V_i \quad = \quad \mathrm{pr}_{V_i}(Z \cap (\mathbb{P}_n \times V_i)).$$

Wir dürfen somit annehmen, dass Y affin ist. Dann können wir Y als algebraische Menge in einem $\mathbb{K}^m$ realisieren, und Z ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}_n \times \mathbb{K}^m$. Damit ist der allgemeine Fall auf Fall 1 zurückgeführt. □

Aufgaben zu Abschnitt 5.2.

Aufgabe 5.2.19. Es seien X eine affine Varietät und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Zeige: $\mathrm{Bl}_X(Y)$ ist quasiprojektiv.

Aufgabe 5.2.20. Es sei X eine quasiprojektive Varietät. Zeige: Zu jeder endlichen Menge $M \subseteq X$ gibt es eine affine offene Menge $U \subseteq X$ mit $M \subseteq U$.

Aufgabe 5.2.21. Es seien X und X' irreduzible Varietäten. Beweise die beiden folgenden Aussagen:

(i) Ist X vollständig und $X \subseteq X'$ eine offene Inklusion, so gilt bereits $X = X'$.
(ii) Ist $\emptyset \neq X \subseteq X'$ eine offene Inklusion mit $X \neq X'$, so ist X keine vollständige Varietät.

Gelten die beiden Aussagen auch noch, falls X' eine Prävarietät, d.h. nicht notwendig separiert ist?

5.3. **Graßmannvarietäten I.**

Bemerkung 5.3.1. Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zu $0 \le k \le n$ betrachten wir die Menge aller k-dimensionalen Untervektorräume von V:

$$G(k,V) \quad = \quad \{U \le V;\ \dim(U) = k\}.$$

Man beachte, dass wir eine Bijektion $G(1,\mathbb{K}^n) \cong \mathbb{P}_{n-1}$ haben. Unser Ziel ist es, $G(k,V)$ zu einer projektiven Varietät zu machen.

Satz 5.3.2. *Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann besitzt V eine eindeutig bestimmte Struktur als affine Varietät, sodass für jede Basis $\mathfrak{B}$ von V die Abbildung*

$$\varphi_{\mathfrak{B}} \colon V \ \to\ \mathbb{K}^n, \qquad v \ \mapsto\ x_{\mathfrak{B}}(v)$$

ein Isomorphismus affiner Varietäten ist; dabei bezeichnet $x_{\mathfrak{B}}(V) \in \mathbb{K}^n$ den Koordinatenvektor von $v \in V$ bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$.

Beweis. Zum Nachweis der Existenz wählen wir eine Basis $\mathfrak{A}$ von V und definieren wie folgt eine Topologie und eine Strukturgarbe auf V:

- Die offenen Mengen von V sind genau die Mengen der Form $\varphi_{\mathfrak{A}}^{-1}(U)$ mit $U \subseteq \mathbb{K}^n$ offen.
- Die regulären Funktionen auf einer offenen Menge $\varphi_{\mathfrak{A}}^{-1}(U)$ sind genau die Funktionen der Form $f = \varphi^*(g)$ mit $g \in \mathcal{O}(U)$.

Damit wird $\varphi_{\mathfrak{A}} \colon V \to \mathbb{K}^n$ zu einem Isomorphismus affiner Varietäten. Ist $\mathfrak{B}$ eine weitere Basis für V, so haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\varphi_{\mathfrak{A}}"', "\cong"] \arrow[dr, "\varphi_{\mathfrak{B}}"] & \\ \mathbb{K}^n \arrow[rr, "\cong", "\varphi_{\mathfrak{B}} \circ \varphi_{\mathfrak{A}}^{-1}"'] & & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

Der Basiswechsel $\varphi_{\mathfrak{B}} \circ \varphi_{\mathfrak{A}}^{-1}$ ist von der Form $z \mapsto S \cdot z$ mit einer Matrix $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ und somit ein Isomorphismus affiner Varietäten. Folglich gilt dies auch für $\varphi_{\mathfrak{B}}$.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei eine weitere Struktur einer affinen Varietät auf V mit den obigen Eigenschaften gegeben. Dann ist zu zeigen, dass $\mathrm{id}_V \colon V \to V$ ein Isomorphimus bezüglich dieser Strukturen ist. Das ergibt sich jedoch unmittelbar aus $\mathrm{id}_V = \varphi_{\mathfrak{B}}^{-1} \circ \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \circ \varphi_{\mathfrak{B}}$. □

Bemerkung 5.3.3. Wir versehen von nun an jeden endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit der Struktur einer affinen Varietät wie in Satz 5.3.2. Man beachte, dass damit die Vektorraumoperationen

$$V \times V \ \to\ V, \qquad (v,v') \ \mapsto\ v + v', \qquad\qquad \mathbb{K} \times V \ \to\ V, \qquad (a,v') \ \mapsto\ a \cdot v$$

Morphismen affiner Varietäten sind. Weiter ist jede lineare Abbildung endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume ein Morphismus affiner Varietäten.

Konstruktion 5.3.4. Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann wirkt die Gruppe $\mathbb{K}^*$ durch Skalarmultiplikation auf $V \setminus \{0_V\}$. Wir setzen

$$\mathbb{P}(V) \quad := \quad (V \setminus \{0_V\}) \,/\, \mathbb{K}^*$$

und versehen die Menge $\mathbb{P}(V)$ mit der Quotiententopologie bezüglich der Restklassenabbildung

$$\pi_V \colon V \setminus \{0_V\} \ \to\ \mathbb{P}(V), \qquad v \ \mapsto\ \pi(v) =: [v],$$

d.h., eine Menge $U \subseteq V$ ist genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in $V \setminus \{0_V\}$ ist. Weiter definieren wir eine Strukturgarbe auf $\mathbb{P}(V)$ durch

$$f \in \mathcal{O}(U) \quad :\Longleftrightarrow \quad f \circ \pi \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)).$$

Dadurch werden $\mathbb{P}(V)$ zu einem Raum mit Funktionen und π_V zu einem Morphismus. Jede Basis $\mathfrak{B}$ für V liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \setminus \{0_V\} \arrow[r, "v \mapsto \varphi_{\mathfrak{B}}(v)", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_V"'] & \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi_n"] \\ \mathbb{P}(V) \arrow[r, "\cong", "{[v] \mapsto [\varphi_{\mathfrak{B}}(v)]}"'] & \mathbb{P}_{n-1} \end{tikzcd}$$

Erinnerung 5.3.5 (Äußere Produkte)**.** Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die r-fache äußere Potenz von V wird in drei Schritten konstruiert:

Schritt 1. Man bildet den freien $\mathbb{K}$-Vektorraum $F(V^r)$ über der Menge V^r, d.h.:

$$F(V^r) \quad := \bigoplus_{(v_1,\ldots,v_r)\in V^r} \mathbb{K}\cdot(v_1, \ldots, v_r).$$

Schritt 2. Es sei $R^a(V^r) \leq_{\mathbb{K}} F(V^r)$ der Aufspann von allen Elementen der Form

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{K}}\cdot(v_1,\ldots,v_{i-1}, v_i + v_i', v_{i+1},\ldots,v_r) \quad &- \quad 1_{\mathbb{K}}\cdot(v_1,\ldots,v_{i-1}, v_i, v_{i+1},\ldots,v_r) \\ &- \quad 1_{\mathbb{K}}\cdot(v_1,\ldots,v_{i-1}, v_i', v_{i+1},\ldots,v_r), \end{aligned}$$

$$1_{\mathbb{K}}\cdot(v_1,\ldots,v_{i-1}, av_i, v_{i+1},\ldots,v_r) \quad - \quad a\cdot(v_1,\ldots,v_{i-1}, v_i, v_{i+1},\ldots,v_r),$$
$$1_{\mathbb{K}}\cdot(v_1,\ldots,v_{i-1}, v, v_{i+1},\ldots,v_{j-1}, v, v_{j+1},\ldots,v_r).$$

Schritt 3. Die *r-fache äußere Potenz* von V ist der Quotientenvektorraum

$$\bigwedge^r V \quad := \quad F(V^r)/R^a(V^r).$$

Für $1_{\mathbb{K}} \cdot (v_1, \ldots, v_r) \in F(V^r)$ bezeichnet $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \in V^r$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Die Restklassenabbildung ist dann festgelegt durch

$$\pi^a\colon F(V^r) \ \to \ \bigwedge^r V, \qquad 1_{\mathbb{K}}\cdot(v_1, \ldots, v_r) \ \to \ v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$$

Die Elemente der Form $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ heissen total zerlegbar; sie erzeugen $\bigwedge^r V$. Man hat eine kanonische alternierende multilineare Abbildung

$$\Pi^a\colon V^r \ \to \ \bigwedge^r V, \qquad (v_1, \ldots, v_r) \ \mapsto \ v_1 \wedge \ldots \wedge v_r.$$

Zu jeder weiteren alternierenden multilinearen Abbildung $\Phi\colon V^r \to W$ gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\Pi^a"'] & & W \\ & \bigwedge^r V \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

mit einer linearen Abbildung $\psi\colon \bigwedge^r V \to W$; diese Abbildung ist eindeutig bestimmt, und sie ist gegeben durch

$$\psi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) \quad = \quad \Phi(v_1, \ldots, v_r).$$

Besitzt der Vektorraum eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ und ist $1 \leq r \leq n$ gegeben, so ist

$$(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r};\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n).$$

eine Basis für die r-fache äußere Potenz $\bigwedge^r V$. Insbesondere ist dessen Dimension gegeben durch

$$\dim\left(\bigwedge^r V\right) \quad = \quad \binom{n}{r}.$$

Konstruktion 5.3.6. Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, und es sei $G(k,V)$ die Menge aller k-dimensionalen Untervektorräume von V. Dann hat man eine wohldefinierte injektive Abbildung

$$\begin{aligned} \imath\colon G(k,V) &\to \mathbb{P}(\bigwedge^k V), \\ U &\mapsto [u_1, \wedge \ldots \wedge, u_k], \text{ wobei } (u_1,\ldots,u_k) \quad \text{Basis für } U. \end{aligned}$$

Das Bild $\imath(G(k,V))$ ist eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$. Dies macht $G(k,V)$ zu einer projektiven Varietät, der *Graßmannvarietät* und $\imath\colon G(k,V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ zu einer abgeschlossenen Einbettung, der *Plückereinbettung*.

Lemma 5.3.7. *Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und es sei $0 \neq \omega \in \bigwedge^k V$. Dann ist*

$$\kappa_\omega\colon V \;\to\; \bigwedge^{k+1} V, \qquad v \;\mapsto\; \omega \wedge v$$

eine lineare Abbildung vom Rang $\mathrm{rg}(\kappa_\omega) \geq n-k$. *Weiter sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt* $\mathrm{rg}(\kappa_\omega) = n-k$.
(ii) *Es gilt* $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ *mit* $v_1,\ldots,v_k \in V$.

Beweis. Offensichtlich ist κ_ω eine lineare Abbildung. Weiter wählen wir eine Basis $(u_1,\ldots,u_n)$ von V, sodass $(u_1,\ldots,u_l)$ eine Basis für $\mathrm{Kern}(\kappa_\omega)$ ist. Entwickeln von ω nach der induzierten Basis von $\bigwedge^k V$ liefert eine Darstellung

$$\omega \quad = \quad \sum a_{i_1,\ldots,i_k} u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_k}, \quad \text{mit } a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{K}.$$

Für jedes $1 \leq i \leq l$ haben wir $\omega \wedge u_i = 0$. Wann immer $a_{i_1,\ldots,i_k} \neq 0$ gilt, hat man daher $i \in \{i_1,\ldots,i_k\}$ für alle $1 \leq i \leq l$. Mit anderen Worten, wir erhalten

$$\{1,\ldots,l\} \quad \subseteq \quad \{i_1,\ldots,i_k\} \text{ sobald } a_{i_1,\ldots,i_k} \neq 0.$$

Insbesondere muss $l \leq k$ gelten. Das impliziert $\mathrm{rg}(\kappa_\omega) \geq n-k$. Gilt $\mathrm{rg}(\kappa_\omega) = n-k$, so haben wir $l = k$ und es folgt $\omega = \alpha u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$ mit einem $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{rg}(\kappa_\omega) = n-k$ gilt, falls ω von der Form $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ ist. Wegen $\omega \neq 0$ ist $(v_1,\ldots,v_k)$ linear unabhängig. Wir finden also eine Basis der Form $(v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n)$ für V. Entwickelt man ein gegebenes $v \in V$ nach dieser Basis, so sieht man

$$\omega \wedge v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v \in \mathrm{Lin}(v_1,\ldots,v_k).$$

□

Beweis von Konstruktion 5.3.6. Die Abbildung $\imath\colon G(k,V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ ist wohldefiniert, da sich $u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$ und $u_1' \wedge \ldots \wedge u_k'$ für zwei Basen $(u_1,\ldots,u_k)$ und $(u_1',\ldots,u_k')$ eines Untervektorraumes $U \leq V$ nur um einen Faktor aus $\mathbb{K}^*$ unterscheiden.

Zur Injektivität. Sind zwei verschiedene Untervektorräume $U, U' \leq V$ gegeben, so finden wir eine Basis $(u_1,\ldots,u_n)$ von V, sodass U von $u_1,\ldots,u_k$ erzeugt wird, $U \cap U'$ von $u_l,\ldots,u_k$ und U' von $u_l,\ldots,u_{l+k-1}$, wobei $1 < l \leq k+1$. Es folgt, dass $u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$ und $u_l \wedge \ldots \wedge u_{l+k-1}$ linear unabhängig sind. Das bedeutet $\imath(U) \neq \imath(U')$.

Zum Nachweis der Abgeschlossenheit von $\imath(G(k,V)$ betrachten wir das Urbild unter der Restklassenabbildung $\bigwedge^k V \to \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$; es ist gegeben durch

$$B \ := \ \pi^{-1}_{\bigwedge^k V}(\imath(G(k,V))) \ = \ \{0 \neq \omega \in \bigwedge\nolimits^k V;\ \omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k\}$$

Es ist dann zu zeigen, dass die Menge B abgeschlossen in $\bigwedge^k V \setminus 0$ ist. In den Bezeichnungen von Lemma 5.3.7 haben wir eine lineare Abbildung

$$\Phi\colon \bigwedge^k V \ \to \ \mathrm{Hom}(V, \bigwedge^{k+1} V), \qquad \omega \ \mapsto \ \kappa_\omega.$$

Für die Menge B der nichttrivialen total zerlegbaren Elemente ω in $\bigwedge^k V$ erhalten wir mit Lemma 5.3.7:

$$\begin{aligned} B &= \{0 \neq \omega \in \bigwedge\nolimits^k V;\ \mathrm{rg}(\kappa_\omega) = n-k\} \\ &= \Phi^{-1}(\{\kappa \in \mathrm{Hom}(V, \bigwedge\nolimits^{k+1} V);\ \mathrm{rg}(\kappa) = n-k\}). \end{aligned}$$

Letztere Menge ist Urbild einer abgeschlossenen Menge eines Vektorraumes unter einer linearen Abbildung und somit abgeschlossen. □

Aufgaben zu Abschnitt 5.3.

Aufgabe 5.3.8. Jeder endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum V sei mit der Struktur einer affinen Varietät wie in Satz 5.3.2 versehen. Beweise Bemerkung 5.3.3: Die Vektorraumoperationen

$$V \times V \;\to\; V, \qquad (v, v') \;\mapsto\; v + v', \qquad\qquad \mathbb{K} \times V \;\to\; V, \qquad (a, v') \;\mapsto\; a \cdot v$$

sind Morphismen affiner Varietäten. Weiter ist jede lineare Abbildung endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume ein Morphismus affiner Varietäten.

Aufgabe 5.3.9. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ und es bezeichne $\mathcal{C} = (e_I)$ die induzierte Basis von $\bigwedge^k V$, d.h., $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ durchläuft die k-elementigen Teilmengen von $N = \{1, \ldots, n\}$ und man setzt $e_I := e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$. Dann hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V^k \arrow[r, "(v_1,\ldots,v_k) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_k"] \arrow[d, "\alpha\colon (v_1,\ldots,v_k) \mapsto (x_{\mathcal{B}}(v_1),\ldots,x_{\mathcal{B}}(v_k))"'] & \bigwedge^k V \arrow[d, "w \mapsto x_{\mathcal{C}}(w)"] \\
\mathrm{Mat}(n,k;\mathbb{K}) \arrow[r, "\psi"'] & \mathbb{K}^{\binom{n}{k}}
\end{tikzcd}$$

wobei $x_{\mathcal{B}}(v)$ und $x_{\mathcal{C}}(w)$ die Koordinatenvektoren bezüglich der Basen $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}$ sind. Die *Plückerkoordinaten* eines Untervektorraumes $U \in G(k, V)$ mit Basis $(u_1, \ldots, u_k)$ sind die Einträge des Vektors $x_{\mathcal{C}}(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k)$. Bestimme diese in Abhängigkeit von der Matrix $\alpha(u_1, \ldots, u_k)$.

Aufgabe 5.3.10. Es sei $V := \mathbb{K}^n$. Dann erhält man eine Wirkung von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ auf $G(k, V)$ durch

$$\mu\colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \times G(k, V) \;\to\; G(k, V), \qquad (A, U) \;\mapsto\; A \cdot U := \{A \cdot u;\; u \in U\}.$$

Zeige: Die Abbildung μ ist ein Morphismus und $G(k, V)$ ist ein homogener Raum, d.h., von der Form G/H mit einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subseteq G$.

5.4. **Graßmannvarietäten II.**

Konstruktion 5.4.1. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $(w_1, \ldots, w_n)$ und $1 \le k \le n$. Die induzierte Basis von $W := \bigwedge^k V$ besteht aus den Vektoren

$$w_I \ := \ w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_k}, \qquad \text{wobei} \quad I = \{i_1, \ldots, i_k\} \ \subseteq \ N := \{1, \ldots, n\}.$$

Zu gegebenem $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq N$ betrachten wir die zugehörige affine offene Menge in $\mathbb{P}(W)$ und ihren Durchschnitt mit $G(k, V)$:

$$U_I \ = \ \{[\textstyle\sum a_J w_J];\ a_I \neq 0\}, \qquad\qquad G(k,V)_I \ := \ U_I \cap G(k,V).$$

Weiter setzen wir $V_{N\setminus I} := \mathrm{Lin}(w_{j_l};\ j_l \in N \setminus I)$. Dann hat man einen Isomorphismus affiner Varietäten

$$\varphi_I \colon (V_{N\setminus I})^k \ \to \ G(k,V)_I, \qquad (v_1, \ldots, v_k) \ \mapsto \ [(w_{i_1} + v_1) \wedge \ldots \wedge (w_{i_k} + v_k)].$$

Folgerung 5.4.2. *Es seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $1 \le k \le n$. Dann ist die Graßmannvarietät $G(k, V)$ glatt, und es gilt*

$$\dim(G(k,V)) \ = \ k(n-k).$$

Beweis von Konstruktion 5.4.1. Es sei $\widehat{W} := W \setminus \{0\}$ und $\pi_W \colon \widehat{W} \to \mathbb{P}(W)$ die Restklassenabbildung. Wir betrachten zunächst die Zuordnung

$$\widehat{\varphi}_I \colon (V_{N\setminus I})^k \ \to \ \widehat{W}, \qquad (v_1, \ldots, v_k) \ \mapsto \ (w_{i_1} + v_1) \wedge \ldots \wedge (w_{i_k} + v_k).$$

Die Entwicklungen $v_j = \sum a_{jl} w_{j_l}$ der einzelnen v_j nach der Basis $(w_{j_1}, \ldots, w_{j_{n-k}})$ von $V_{N\setminus I}$ liefern Darstellungen

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_I(v_1, \ldots, v_k) \ &= \ (w_{i_1} + \sum_{l=1}^{n-k} a_{1l} w_{j_l}) \wedge \ldots \wedge (w_{i_k} + \sum_{l=1}^{n-k} a_{kl} w_{j_l}) \\
&= \ w_I \ + \ \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{n-k} w_{i_1} \wedge \ldots \wedge \underbrace{a_{jl} w_{j_l}}_{j\text{-te Stelle}} \wedge \ldots \wedge w_{i_k} \ + \ w' \\
&= \ w_I \ + \ \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{n-k} \varepsilon(j,l) a_{jl} w_{I(j,l)} \ + \ w',
\end{aligned}$$

wobei w' eine Summe von total zerlegbaren Elementen mit jeweils mindestens zwei Faktoren der Form w_{j_l}, $1 \le l \le n-k$ ist, der Faktor $\varepsilon(j,l) = \pm 1$ durch die dritte Gleichung bestimmt ist und die Indexmenge $I(j,l)$ gegeben ist durch

$$I(j,l) \ := \ \{w_{i_1}, \ldots, \cancel{w}_{i_j}, \ldots, w_{i_k}, w_{j_l}\} \ \subseteq \ N$$

Vollständiges Ausmultiplizieren der ersten Darstellung zeigt, dass $\widehat{\varphi}_I$ ein Morphismus ist und der zweiten Darstellung entnehmen wir, dass die Bilder von $\widehat{\varphi}_I$ alle die Koordinate $a_I = 1$ besitzen. Das bedeutet

$$\widehat{\varphi}_I((V_{N\setminus I})^k) \ \subseteq \ \pi_W^{-1}(G(k,V)_I)$$

und somit ist $\varphi_I = \pi_W \circ \widehat{\varphi}_I$ ein wohldefinierter Morphismus. Umgekehrt definiert die Vorschrift

$$\widehat{\psi}_I \colon \pi_W^{-1}(U_I) \ \to \ (V_{N\setminus I})^k, \qquad \textstyle\sum a_J w_J \ \mapsto \ a_I^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{n-k} \varepsilon(1,l) a_{I(1,l)} w_{1_l} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{n-k} \varepsilon(n(k,l) a_{I(k,l)} w_{k_l} \end{pmatrix}$$

einen eindeutig bestimmten Morphismus $\psi_I \colon G(k,V)_I \to (V_{N\setminus I})^k$ mit $\widehat{\psi}_I = \psi_I \circ \pi$. Nach Konstruktion gilt $\psi_I \circ \varphi_I = \mathrm{id}$. Weiter ist φ_I surjektiv. Somit sind φ_I und ψ_I invers zueinander. $\square$

Lemma 5.4.3. *Es seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $1 \le k \le n$ und $\alpha\colon \bigwedge^n V \to \mathbb{K}$ ein Isomorphismus. Dann hat man einen Isomorphismus*

$$\delta\colon \bigwedge^k V \ \to \ \left(\bigwedge^{n-k} V\right)^*, \qquad \omega \ \mapsto \ [\eta \mapsto \alpha(\omega \wedge \eta)]$$

Ist $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis für V und bezeichnet $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ die zugehörige duale Basis für V, so gilt

$$\delta(e_I) \ = \ \pm\alpha(e_N)e^*_{N\setminus I},$$

wobei $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq N = \{1, \ldots, N\}$ die Basisvektoren e_I, $e_{N\setminus I}$ und e_N mit $N \setminus I = \{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$ gegeben sind durch

$$e_I := e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, \qquad e_{N\setminus I} := e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n-k}}, \qquad e_N := e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Beweis. Es ist klar, dass δ eine wohldefinierte lineare Abbildung ist. Die weiteren Behauptungen ergeben sich aus

$$(\delta(e_I))(e_J) \ = \ \alpha(e_I \wedge e_J) \ = \ \pm 1\alpha(e^*_{N\setminus I}(e_J)).$$

□

Lemma 5.4.4. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und es sei $1 \le k \le n$. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus*

$$\jmath\colon \bigwedge^k V^* \ \to \ \left(\bigwedge^k V\right)^*, \qquad u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \ \mapsto \ [v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mapsto u_1(v_1) \cdots u_k(v_k)].$$

Für jede Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von V ist der Isomorphismus $\jmath$ gegeben durch

$$(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k})^* \ \mapsto \ e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_k}.$$

Beweis. Die Zuordnungen $\jmath$ sowie $(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k})^* \mapsto e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_k}$ definieren lineare Abbildungen, und es genügt zu zeigen dass diese übereinstimmen. Das ergibt sich durch einen Vergleich der Werte auf den Basisvektoren. □

Bemerkung 5.4.5. Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann definiert jedes $\omega \in \bigwedge^k$ lineare Abbildungen

$$\kappa_\omega\colon V \ \to \ \bigwedge^{k+1} V, \qquad v \ \mapsto \ \omega \wedge v,$$

$$\lambda_\omega\colon V^* \ \to \ \bigwedge^{n-k+1} V^*, \qquad u \ \mapsto \ \jmath(\delta(\omega)) \wedge u.$$

Konstruktion 5.4.6 (Plückerrelationen)**.** Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$\Phi\colon \bigwedge^k V \ \to \ \mathrm{Hom}(\bigwedge^{k+1} V^*, V^*), \qquad \omega \ \mapsto \ \kappa^t_\omega \circ \jmath^{-1}.$$

$$\Psi\colon \bigwedge^k V \ \to \ \mathrm{Hom}(\bigwedge^{n-k+1} V, V), \qquad \omega \ \mapsto \ \lambda^t_\omega \circ \jmath^{-1}.$$

Je zwei Vektoren $v \in \bigwedge^{n-k+1} V$ und $u \in \bigwedge^{k+1} V^*$ definieren dann eine quadratische Form auf $\bigwedge^k V$, nämlich

$$\Xi_{u,v}\colon \bigwedge^k V \ \to \ \mathbb{K}, \qquad \omega \ \mapsto \ \langle \kappa^t_\omega(\jmath^{-1}(u)), \lambda^t_\omega(\jmath^{-1}(v)) \rangle$$

Die Gleichungen $\Xi_{u,v}(\bullet) = 0$, wobei $v \in \bigwedge^{n-k+1} V$ und $u \in \bigwedge^{k+1} V^*$, nennt man die *Plückerrelationen* auf $\bigwedge^k V$.

Satz 5.4.7. *Es sei $G(k,V) \subseteq \mathbb{P}_N$ die Plückereinbettung. Dann ist der affine Kegel über $G(k,n)$ durch die Plückerrelationen definiert: Es gilt*

$$I(C(G(k,V))) \quad = \quad \langle \Xi_{u,v}(\bullet);\ u \in \bigwedge^{k+1} V^*,\ v \in \bigwedge^{n-k+1} V\rangle$$

Beweis. Wir zeigen lediglich, dass $C(G(k,V))$ das Nullstellengebilde der Plückerrelationen ist. Dazu ist zu zeigen, dass ein Element $\omega \in \bigwedge V^k$ genau dann total zerlegbar ist, wenn es die Plückerrelationen erfüllt.

Es sei zunächst $\omega \in \bigwedge V^k$ total zerlegbar. Dann gibt es eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V mit

$$\omega \ = \ e_1 \wedge \ldots \wedge e_k, \qquad \mathrm{Kern}(\kappa_\omega) \ = \ \mathrm{lin}(e_1, \ldots, e_k),$$

Mit Lemmas 5.4.3 und 5.4.4 erhalten wir weiter

$$\jmath(\delta(\omega)) \ = \ e_{k+1}^* \wedge \ldots \wedge e_n^*, \qquad \mathrm{Kern}(\lambda_\omega) \ = \ \mathrm{lin}(e_{k+1}^*, \ldots, e_n^*).$$

Damit sehen wir bereits, dass das Element ω die Plückerrelationen erfüllt, denn es gilt

$$\mathrm{Bild}(\kappa_\omega^t) \ = \ (\mathrm{Kern}(\kappa_\omega))^\perp \ = \ \mathrm{Kern}(\lambda_\omega) \ = \ \mathrm{Bild}(\lambda_\omega^t)^\perp,$$

wobei wir den Isomorphismus $\jmath^{-1}$ jeweils nicht hinschreiben. Erfüllt das Element $\omega \in \bigwedge V^k$ die Plückerrelationen, so erhalten wir

$$\mathrm{Kern}(\lambda_\omega) \ = \ \mathrm{Bild}(\lambda_\omega^t)^\perp. \ = \ \mathrm{Bild}(\kappa_\omega^t) \ = \ (\mathrm{Kern}(\kappa_\omega))^\perp$$

Es folgt

$$n \ = \ \dim(\mathrm{Kern}(\lambda_\omega)) + \dim(\mathrm{Kern}(\kappa_\omega))$$

Nach Lemma 5.3.7 ist der erste Term durch $n-k$ beschränkt und der zweite durch k. Es folgt $\dim(\mathrm{Kern}(\kappa_\omega)) = k$. Wiederum nach Lemma 5.3.7 ist ω total zerlegbar. □

Konstruktion 5.4.8. Die Menge der k-dimensionalen linearen Unterräume im projektiven Raum ist

$$\mathbb{G}(k,n) \quad = \quad G(k+1, n+1).$$

Dabei identifizieren wir eine $(k+1)$-dimensionale Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ mit dem k-dimensionalen linearen Unterraum $\pi_n(U) \subseteq \mathbb{P}_n$.

Konstruktion 5.4.9. In $\mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}_n$ betrachten wir die Menge der inzidenten Paare:

$$\mathbb{X}(k,n) \quad := \quad \{(U,u) \in \mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}_n;\ u \in U\}.$$

Die Menge $\mathbb{X}(k,n) \subseteq \mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}_n$ ist eine abgeschlossene Untervarietät, und man hat die Projektionsmorphismen

$$\pi_1 \colon \mathbb{X}(k,n) \to \mathbb{G}(k,n), \quad (U,u) \mapsto U, \qquad \pi_1 \colon \mathbb{X}(k,n) \to \mathbb{P}_n, \quad (U,u) \mapsto u.$$

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass die Menge $\mathbb{X}(k,n) \subseteq \mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}_n$ abgeschlossen ist. Das ergibt sich jedoch sofort mit

$$\mathbb{X}(k,n) \ = \ \{([v_1 \wedge \ldots \wedge v_{k+1}], [w]);\ v_1 \wedge \ldots \wedge v_{k+1} \wedge w = 0\} \ \subseteq \ \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^k \mathbb{K}^n) \times \mathbb{P}_n.$$

□

Konstruktion 5.4.10. Es sei $X \subseteq \mathbb{G}(k,n)$ eine abgeschlossene Untervarietät. Dann erhält man eine abgeschlossene Untervarietät

$$\bigcup_{U \in X} U \quad \subseteq \quad \mathbb{P}_n.$$

Beweis. Mit der Varietät $\mathbb{X}(k,n)$ der inzidenten Paare in $\mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}_n$ und den Projektionen π_1, π_2 erhalten wir

$$\bigcup_{U \in X} U \quad = \quad \pi_2(\pi_1^{-1}(X)).$$

Da $\mathbb{X}(k,n)$ als projektive Varietät vollständig ist, erhalten wir, dass $\pi_2(\pi_1^{-1}(X))$ abgeschlossen in $\mathbb{P}_n$ ist. □

Konstruktion 5.4.11. Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_n$ eine abgeschlossene Untervarietät, und es sei $1 \le k \le n$. Dann erhält man eine abgschlossene Untervarietät

$$U(k,X) \ := \ \{U \in \mathbb{G}(k,n);\ U \cap X \neq \emptyset\} \ \subseteq \ \mathbb{G}(k,V).$$

Beweis. Mit der Varietät $\mathbb{X}(k,n)$ der inzidenten Paare in $\mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}_n$ und den Projektionen π_1, π_2 erhalten wir

$$U(k,X) \quad = \quad \pi_1(\pi_2^{-1}(X)).$$

Da $\mathbb{X}(k,n)$ als projektive Varietät vollständig ist, erhalten wir, dass $\pi_1(\pi_2^{-1}(X))$ abgeschlossen in $\mathbb{G}(k,n)$ ist. □

Konstruktion 5.4.12. Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{P}_n$ disjunkte Untervarietäten, und zu $(x,y) \in X \times Y$ sei $L(x,y) \subseteq \mathbb{P}_n$ die Verbindungsgerade. Dann erhält man eine abgeschlossene Untervarietät

$$\mathbb{V}(X,Y) \ := \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} L(x,y) \ \subseteq \ \mathbb{P}_n$$

Beweis. Wir betrachten die Varietäten $U(1,X) \subseteq \mathbb{G}(1,n)$ und $U(1,Y) \subseteq \mathbb{G}(1,n)$ aller Geraden durch X bzw. Y. Dann erhalten wir die Behauptung mit Konstruktion 5.4.10: Mit $A := U(1,X) \cap U(1,Y)$ gilt

$$\mathbb{V}(X,Y) \quad = \quad \bigcup_{L \in A} L.$$

□

Beispiel 5.4.13. Es seien $X \subseteq \mathbb{P}_n$ eine abgeschlossene Untervarietät, und es sei $x_\infty \in \mathbb{P}_n \backslash X$. Dann ist der *projektive Kegel* über X mit Spitze x_∞ die abgeschlossene Untervarietät

$$\mathbb{V}(X, \{x_\infty\}) \quad \subseteq \quad \mathbb{P}_n$$

Beispiel 5.4.14. Es sei $X = V(T_0^2 + \ldots + T_r^2) \subseteq \mathbb{P}_n$ eine Quadrik mit $r < n$. Dann gilt

$$X^{\mathrm{sing}} \ = \ V(T_0, \ldots, T_r) \ \cong \ \mathbb{P}_{n-r-1}$$

und

$$X' \ := \ X \cap V(T_{r+1}, \ldots, T_n) \ \subseteq \ V(T_{r+1}, \ldots, T_n)$$

ist eine glatte Quadrik in $V(T_{r+1}, \ldots, T_n) \cong \mathbb{P}_r$. Die Quadrik X erhält man als Verbindungsvarietät von X' und X^{sing}: Es gilt

$$X \quad = \quad \mathbb{V}(X', X^{\mathrm{sing}}).$$

Aufgaben zu Abschnitt 5.4.

Aufgabe 5.4.15. Es seien $X \subseteq \mathbb{P}_n$ eine Untervarietät und $C(X) \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ der zugehörige affine Kegel. Zeige: Der projektive Abschluss $\overline{C(X)} \subseteq \mathbb{P}_{n+1}$ ist ein projektiver Kegel über einer Untervarietät $X' \subseteq \mathbb{P}_{n+1}$ mit $X' \cong X$.

Aufgabe 5.4.16. Es sei $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und $V = \mathbb{K}^4$. Weiter bezeichne $e_i \in \mathbb{K}^4$ den i-ten Einheitsvektor und es sei $\omega \in \bigwedge^2 V$ gegeben mit der Entwicklung

$$\omega \quad = \quad \sum_{1 \le i < j \le 4} a_{ij} e_i \wedge e_j .$$

Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gilt $\omega = v_1 \wedge v_2$ mit $v_1, v_2 \in V$.
(ii) Es gilt $\omega \wedge \omega = 0 \in \bigwedge^4 V$.
(iii) Es gilt $a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$.

6. Divisoren

6.1. **Normale Singularitäten.**

Erinnerung 6.1.1. Es sei $R \subseteq S$ eine Erweiterung von K1-Ringen. Man nennt ein Element $s \in S$ *ganz* über R, falls es eine *Ganzheitsgleichung* erfüllt:

$$s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \;=\; 0, \qquad \text{wobei } a_{k-1}, \ldots, a_0 \in R.$$

Der *ganze Abschluss* $\overline{R} := \{s \in S;\; s \text{ ganz über } R\}$ ist ein Unterring in S. Man nennt einen Integritätsring R *normal*, falls $R = \overline{R}$ für $R \subseteq Q(R)$ gilt.

Jeder faktorielle Ring ist normal. Iansbesondere ist der Polynomring $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ normal.

Lemma 6.1.2. *Es seien $\mathbb{L}$ ein Körper und $R_i \subseteq \mathbb{L}$, $i \in I$, Unterringe. Sind alle R_i normal, so ist auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} R_i$ normal.*

Beweis. Wir setzen $R := \bigcap_{i \in I} R_i$. Als Unterring des Körpers $\mathbb{L}$ ist R ein Integritätsring. Um $R = \overline{R}$ nachzuweisen, vermerken wir zunächst, dass

$$Q(R) \;\subseteq\; Q(R_i) \;\subseteq\; \mathbb{L}$$

gilt. Ist nun $r \in Q(R)$ ganz über R, so ist R auch ganz über jedem R_i. Da alle R_i normal sind, erhalten wir $r \in R_i$. □

Lemma 6.1.3. *Es seien R ein Integritätsring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Ist R normal, so ist auch der Bruchring $S^{-1}R$ normal.*

Beweis. Da R ein Integritätsring ist, haben wir die folgenden Ringerweiterungen:

$$R \;\subseteq\; S^{-1}R \;\subseteq\; Q(R) \;=\; Q(S^{-1}R).$$

Es sei nun $r/s \in Q(R)$ ganz über $S^{-1}R$. Dann haben wir eine Ganzheitsgleichung

$$\left(\frac{r}{s}\right)^k + a_{k-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{k-1} + \ldots + a_0 \;=\; 0, \qquad \text{mit } a_i = \frac{b_i}{c_i},\; b_i, \in R,\; c_i \in S.$$

Es sei $c := c_{k_1} \cdot \ldots \cdot c_0$. Multiplizieren der obigen Ganzheitsgleichung mit c^k liefert

$$\left(\frac{cr}{s}\right)^k + ca_{k-1}\left(\frac{cr}{s}\right)^{k-1} + \ldots + c^k a_0 \;=\; 0.$$

Also ist $cr/s \in Q(R)$ ganz über R, und wir erhalten folgt $cr/s \in R$. Das impliziert jedoch

$$\frac{r}{s} \;=\; \frac{1}{c} \cdot \frac{cr}{s} \;\in\; C.$$

□

Definition 6.1.4. Es sei X eine Prävarietät.

(i) Ein Punkt $x \in X$ heisst *normal*, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ normal ist.
(ii) Wir nennen X *normal*, falls jedes $x \in X$ normal ist.

Satz 6.1.5. *Es sei X eine irreduzible affine Varietät. Dann sind äquivalent:*

(i) *X ist normal.*
(ii) *$\mathcal{O}(X)$ ist ein normaler Ring.*

Beweis. Sind alle Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ normale Ringe, so erhalten wir die Normalität $\mathcal{O}(X)$ mit Lemma 6.1.2 und

$$\mathcal{O}(X) \;=\; \bigcap_{x\in X} \mathcal{O}_{X,x} \;\subseteq\; \mathbb{K}(X).$$

Ist $\mathcal{O}(X)$ normal so ist nach Lemma 6.1.3 auch jeder Halm $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_x}$ ein normaler Ring. □

Beispiel 6.1.6. $\mathbb{K}^n$ ist normal, da $\mathbb{K}[T_1,\dots,T_n]$ als faktorieller Ring normal ist. Damit sind auch $\mathbb{P}_n$ und $G(k,n)$ normal.

Beispiel 6.1.7. Die Neilsche Parabel $X := V(T_1^3 - T_2^2) \subseteq \mathbb{K}^2$ ist nicht normal. Wir betrachten den surjektiven Morphismus

$$\varphi\colon \mathbb{K} \;\to\; X, \qquad z \;\mapsto\; (z^2, z^3).$$

Der zugehörige Komorphismus $\varphi^*\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathbb{K}[T]$ ist injektiv. Sein Bild ist gerade

$$R \;:=\; \varphi^*(\mathcal{O}_X(X)) \;=\; \mathbb{K}[T^2,T^3] \;=\; \left\{\sum a_iT^i \in \mathbb{K}[T];\; a_1 = 0\right\}.$$

Es folgt $Q(R) = \mathbb{K}(T)$. Das Element $T \in \mathbb{K}(T)$ ist offensichtlich ganz über R, liegt jedoch nicht in R.

Definition 6.1.8. Eine affine Varietät X heisst *lokal faktoriell*, falls jeder lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$, wobei $x \in X$, faktoriell ist.

Bemerkung 6.1.9. Es sei X eine affine Varietät. Ist $\mathcal{O}(X)$ faktoriell, so ist auch jeder Halm $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_x}$ faktoriell. Insbesodnere ist X lokal faktoriell.

Satz 6.1.10. *Glatte Varietäten sind lokal faktoriell.*

Beweis. Der Satz folgt aus der nichttrivialen (und hier nicht bewiesenen) Tatsache, dass jeder reguläre lokale Ring faktoriell ist (s. Matsumura, Commutative Algebra, Thm. 48, Seite 142). □

Satz 6.1.11. *Lokal faktorielle Varietäten sind normal.*

Beweis. Jeder faktorielle Ring ist normal. Dies wendet man auf die lokalen Ringe an. □

Bemerkung 6.1.12. Wir haben eben verschiedene Klassen affiner Varietäten kennengelernt. Mit den beiden obigen Sätzen ergibt sich folgendes Bild:

$$\text{glatte Varietäten} \;\subseteq\; \text{lok. fakt. Varietäten} \;\subseteq\; \text{normale Varietäten.}$$

Die folgenden Beispiele zeigen, dass es sich dabei jeweils um echte Inklusionen handelt.

Beispiel 6.1.13. Es sei $X := V(T_1T_2 - T_3^2) \subset \mathbb{K}^2$. Wir zeigen, dass X zwar normal ist, aber nicht lokal faktoriell. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \;\to\; X, \quad (z_1,z_2) \;\mapsto\; (z_1^2, z_2^2, z_1z_2).$$

Diese Abbildung ist surjektiv; man kann für jeden Punkt $(a_1,a_2,a_3) \in X$ ein Urbild angeben. Getrennt nach den Fällen $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ sowie $a_1a_2 \neq 0$ gilt

$$\varphi(0,\sqrt{a_2}) = (a_1,a_2,a_3), \quad \varphi(\sqrt{a_1},0) = (a_1,a_2,a_3), \quad \varphi(\frac{a_3}{\sqrt{a_2}},\sqrt{a_2}) = (a_1,a_2,a_3).$$

Insbesondere ist der zugehörige Komorphismus $\varphi^*\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathbb{K}[T_1,T_2]$ injektiv. Für sein Bild erhalten wir

$$\begin{aligned} R := \varphi^*(\mathcal{O}_X(X)) \;&=\; \mathbb{K}[T_1^2, T_2^2, T_1T_2] \\ &=\; \left\{\sum a_{ij}T_1^iT_2^j \in \mathbb{K}[T_1,T_2];\; a_{ij} = 0 \text{ falls } i+j \text{ ungerade}\right\}. \end{aligned}$$

D.h., R besteht genau aus den geraden Polynomen in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$. Wir zeigen, dass R normal ist. Dazu sei $f/g \in Q(R)$ ganz über R. Dann ist f/g insbesondere ganz über $\mathbb{K}[T_1, T_2]$.

Da der Polynomring $\mathbb{K}[T_1, T_2]$ als faktorieller Ring normal ist, gilt $f/g \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$. Da f/g als Quotient gerader Funktionen gerade ist, folgt $f/g \in R$. Um zu sehen, dass X nicht lokal faktoriell ist, betrachten wir den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,0}$. Zunächst sei vermerkt, dass man vermöge φ^* einen kanonischen Isomorphismus erhält

$$\mathcal{O}_{X,0} \;\cong\; R_0 \;:=\; \{f/g \in Q(R);\ g(0) \neq 0\} \;\subseteq\; Q(R).$$

Es genügt also zu zeigen, dass R_0 kein faktorieller Ring ist. Dazu zeigen wir, dass $F := T_1^2 \in R_0$ irreduzibel, aber nicht prim ist. Zur Irreduzibilität: Es sei

$$F \;=\; \frac{\widetilde{a}}{a}\frac{\widetilde{b}}{b} \qquad \text{mit } a, b, \widetilde{a}, \widetilde{b} \in R,\ a(0), b(0) \neq 0.$$

Wir haben zu zeigen, dass einer der Faktoren $\widetilde{a}/a$ und $\widetilde{b}/b$ eine Einheit in R_0 ist. Multiplikation der obigen Gleichung mit ab liefert die folgende Gleichung in R:

$$abF \;=\; abT_1^2 \;=\; \widetilde{a}\widetilde{b}.$$

Diese bearbeiten wir nun in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$. Wir behaupten, dass T_1^2 eines der beiden Elemente $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ teilt. Andernfalls hätten wir

$$\widetilde{a} \;=\; T_1 a', \qquad \widetilde{b} \;=\; T_1 b'$$

mit gewissen $a', b' \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$. Die Polyome a' und b' sind offenbar ungerade, insbesondere folgt $a'(0) = 0 = b'(0)$. Das widerspricht $ab = a'b'$. Also muss T_1^2 eines der Elemente $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ teilen, etwa $\widetilde{a}$. Damit folgt

$$ab \;=\; a'\widetilde{b}$$

mit einem $a' \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$. Insbesondere ergibt sich $\widetilde{b}(0) \neq 0$. Folglich ist $\widetilde{b}/b$ eine Einheit in R_0. Analog schließt man, dass $\widetilde{a}/a$ Einheit ist, falls T_1^2 Teiler von $\widetilde{b}$ ist. Zeigen wir nun, dass T_1^2 kein Primelement in R_0 ist. Wir betrachten die Zerlegungen

$$T_1^2 T_2^2 \;=\; (T_1T_2)(T_1T_2) \;=\; FT_2^2.$$

Wäre F Primelement in R_0, so müsste F ein Teiler von T_1T_2 sein, d.h., $T_1T_2 = F\widetilde{a}/a$ mit gewissen geraden Polynomen $\widetilde{a}$ und a, wobei $a(0) \neq 0$. In $\mathbb{K}[T_1, T_2]$ hätten wir damit

$$aT_2 \;=\; \widetilde{a}T_1.$$

Das Monom T_2 muss dann Teiler von $\widetilde{a}$ sein, was $a(0) = 0$ impliziert. Widerspruch. Also kann F kein Primelement in R_0 sein. Da irreduzible Elemente in faktoriellen Ringen prim sind, kann R_0 kein faktorieller Ring sein.

Beispiel 6.1.14. Es seien $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und $X := V(T_1^2 + \ldots + T_r^2) \subseteq \mathbb{K}^r$ mit $r \geq 5$. Dann gilt $X^{\mathrm{sing}} = \{0\}$. Der Ring $\mathcal{O}(X)$ ist faktoriell und somit sind auch alle lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ faktoriell, insbesondere gilt dies für den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,0}$. einen Beweis findet man in Scheja/Storch, Lehrbuch der Algebra, Teil 2, VII.60.2.

Satz 6.1.15. *Es seien X eine irreduzible normale Prävarietät, $n := \dim(X)$ und $Y \subseteq X$ mit $\dim(Y) = n-1$. Dann gibt es eine affine offene Menge $U \subseteq X$ und ein $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mit*

$$U \cap Y \;\neq\; \emptyset, \qquad\qquad I_U(Y \cap U) \;=\; \langle f \rangle.$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass X affin ist. Es sei $Y' \subseteq Y$ eine $(n-1)$-dimensionale irreduzible Komponente, und es sei $0 \neq g \in I_X(Y)$. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz ist $V_X(g) \subseteq X$ rein $(n-1)$-dimensional. Nach dem Identitätssatz ist daher Y' eine irreduzible Komponente von X. Durch geeignetes

Verkleinern von X erreichen wir $Y = Y' = V_X(g)$. Wir dürfen also von vorneherein annehnemmen, dass Y irreduzibel ist, und dass $Y = V_X(g)$ mit einem $g \in \mathcal{O}(X)$ gilt.

Es seien $g_1, \ldots, g_r$ Erzeugende des Verschwindungsideales $I_X(Y)$. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gibt es Zahlen $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $g_i^{k_i} \in \langle g \rangle$. Für hinreichend großes k, etwa $k \geq r \max(k_1, \ldots, k_r)$, gilt daher

$$I_X(Y)^k \quad \subseteq \quad \langle g \rangle.$$

Wir wählen nun k minimal mit der obigen Eigenschaft. Dann gibt es eine Funktion $h \in I_X(Y)^{k-1}$ mit $h \notin \langle g \rangle$ und $ah \in \langle g \rangle$ für alle $a \in I_X(Y)$. Wir erhalten

$$\frac{h}{g} \quad \in \quad \mathbb{K}(X) \setminus \mathcal{O}(X), \tag{6.1.15.1}$$

$$\frac{h}{g} I_X(Y) \quad \subseteq \quad \mathcal{O}(X), \tag{6.1.15.2}$$

$$\frac{h}{g} I_X(Y) \quad \not\subseteq \quad I_X(Y). \tag{6.1.15.3}$$

Dabei bedarf die letzte Aussage der Erläuterung. Hätte man $h/gI_X(Y) \subseteq I(Y)$, so erhält man für die Erzeugenden $g_1, \ldots, g_r$ von $I_X(Y)$ Darstellungen

$$\frac{h}{g} g_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{r} a_{ij} g_j$$

mit Funktionen $a_{ij} \in \mathcal{O}(X)$. Wir betrachten $A := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}$. Dann ist $(g_1, \ldots, g_r) \in \mathbb{K}(X)^r$ Eigenvektor zum Eigenwert h/g der Matrix A. Das bedeutet

$$\det \left(\frac{h}{g} E_r - A \right) \quad = \quad 0.$$

Dies ist jedoch eine Ganzheitsgleichung für h/g über $\mathcal{O}(X)$. Da $\mathcal{O}(X)$ nach Satz 6.1.5 normal ist, folgt $h/g \in \mathcal{O}(X)$. Widerspruch zur Wahl von h und g.

Nach 6.1.15.3 gibt es eine Funktion $f \in I_X(Y)$ mit $fh/g \notin I_X(Y)$. Nach 6.1.15.2 gilt $fh/g \in \mathcal{O}(X)$. Wir setzen $U := X_{fh/g}$. Wegen $fh/g \notin I_X(Y)$ ist der Durchschnitt $Y \cap U$ nicht leer. Weiter haben wir in $\mathbb{K}(U)$:

$$\begin{aligned}
f^{-1} I_U(Y \cap U) \quad &= \quad \frac{h}{g} \left(\frac{fh}{g} \right)^{-1} I_U(Y \cap U) \\
&= \quad \frac{h}{g} \left(\frac{fh}{g} \right)^{-1} \left\{ a \left(\frac{fh}{g} \right)^{-l} ;\ a \in I_X(Y),\ l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} \\
&= \quad \left\{ \frac{h}{g} a \left(\frac{fh}{g} \right)^{-l} ;\ a \in I_X(Y),\ l \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \right\} \\
&\subseteq \quad \mathcal{O}(U).
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass $f|_U$ die gewünschte Funktion ist: Für $b \in I_U(Y \cap U)$ gilt nach der obigen Überlegung $f^{-1}b = a \in \mathcal{O}(U)$, und es folgt $b = af \in \langle f \rangle$. □

Beispiel 6.1.16. Es sei $X := V(z_1 z_2 - z_3 z_4) \subseteq \mathbb{K}^4$. Dann ist X eine irreduzible (sogar normale) dreidimensionale affine Varietät. Die zweidimensionale Teilmenge

$$Y \ := \ V(z_1, z_3) \ \cong \ \mathbb{K}^2$$

kann jedoch nicht als Nullstellenmenge einer Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ realisiert werden, da $X \setminus Y$ nicht affin ist. Insbesondere kann $I_X(Y)$ kein Hauptideal sein.

Aufgaben zu Abschnitt 6.1.

Aufgabe 6.1.17. Beweise die Aussage aus Beispiel 6.1.16: Betrachte die algebraischen Mengen

$$X \;:=\; V(z_1z_2 - z_3z_4) \;\subseteq\; \mathbb{K}^4, \qquad Y \;:=\; V(z_1, z_3) \;\subseteq\; X$$

und zeige, dass Y nicht als Nullstellenmenge einer Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ realisiert werden kann.

Aufgabe 6.1.18. Es sei X eine affine Varietät mit irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_n$. Zeige:

$$X^{\mathrm{sing}} \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{r} X_i^{\mathrm{sing}} \;\cup\; \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j).$$

Hinweis: Zur Lösung der Aufgabe darf verwendet werden, dass jeder reguläre lokale Ring faktoriell ist.

6.2. **Der Divisor einer Funktion.**

Beispiel 6.2.1. Es sei $X := \mathbb{K}$. Ein *Divisor* auf X ist eine formale Linearkombination:

$$D \ := \ \sum_{x \in X} a_x \{x\}, \qquad \text{wobei } a_x \in \mathbb{Z} \text{ und fast immer } a_x = 0.$$

Die Menge der Divisoren auf X wird auf kanonische Weise zu einer abelschen Gruppe; man setzt

$$\left(\sum_{x \in X} a_x \{x\}\right) + \left(\sum_{x \in X} b_x \{x\}\right) \ := \ \sum_{x \in X} (a_x + b_x)\{x\}.$$

Wir wollen nun jeder rationalen Funktion $0 \neq f \in \mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(T)$ einen Divisor $\mathrm{div}(f)$ zuordnen.

Zunächst definiert man in zwei Schritten die *Ordnung* $\mathrm{ord}_x(f)$ von f in einem Punkt $x \in X$: Für ein Polynom $0 \neq p = \alpha \prod_{a \in \mathbb{K}} (T-a)^{\nu(a)}$ setzt man

$$\mathrm{ord}_x(p) \ := \ \nu(x) \ = \ \max(n \in \mathbb{Z}_{\geq} 0; \ (T-x)^n | p)$$

Dann schreibt man $f = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{K}[T]$ und setzt $\mathrm{ord}_x(f) := \mathrm{ord}_x(p) - \mathrm{ord}_x(q)$; dies hängt nicht von der Wahl von p, q ab. Der Divisor von f ist dann

$$\mathrm{div}(f) \ := \ \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(f)\{x\}.$$

Man beachte, dass $f \mapsto \mathrm{div}(f)$ einen Homomorphismus von $\mathrm{WDiv}(X)$ in die Gruppe der Divisoren von X definiert. Weiter hat man für $h \in \mathbb{K}/X)^*$ Polynome $f, g \in \mathcal{O}(X)$ stets

$$\begin{aligned} h \in \mathcal{O}(X) \quad & \iff \quad \mathrm{ord}_x(h) \geq 0 \text{ für alle } x \in X \\ & \iff: \quad \mathrm{div}(h) \geq 0, \\ f | g \text{ in } \mathcal{O}(X) \quad & \iff \quad \mathrm{ord}_x(g) \geq \mathrm{ord}_x(f) \text{ für alle } x \in X \\ & \iff: \quad \mathrm{div}(g) \geq \mathrm{div}(f). \end{aligned}$$

Definition 6.2.2. Es sei X eine irreduzible Prävarietät.

(i) Ein *Primdivisor* auf X ist eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y \subseteq X$ mit $\dim(Y) = \dim(X) - 1$.

(ii) Ein *Weildivisor* auf X ist eine formale ganzzahlige Linearkombination von Primdivisoren:

$$D \ := \sum_{Y \subseteq X \text{ Primdivisor}} a_Y Y, \qquad a_Y \in \mathbb{Z}, \text{ fast immer } a_Y = 0.$$

(iii) Die *Weildivisorengruppe* von X ist die Menge $\mathrm{WDiv}(X)$ aller Weildivisoren auf X zusammen mit der Addition

$$\left(\sum_Y a_Y Y\right) + \left(\sum_Y b_Y Y\right) \ := \ \sum_Y (a_Y + b_Y) Y.$$

Definition 6.2.3. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine *diskrete Bewertung* auf $\mathbb{K}$ ist eine surjektive Abbildung $\nu \colon \mathbb{K} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, sodass stets gilt

$$\nu(a) = \infty \iff a = 0, \qquad \nu(ab) \ = \ \nu(a) + \nu(b), \qquad \nu(a+b) \ \geq \ \min(\nu(a), \nu(b)).$$

Der zu einer Bewertung $\nu \colon \mathbb{K} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ gehörige *diskrete Bewertungsring* ist definiert als

$$R_\nu \ := \ \{a \in \mathbb{K}; \ \nu(a) \geq 0\}.$$

Beispiel 6.2.4. Es sei $X = \mathbb{K}$. Dann definiert jedes $x \in X$ eine diskrete Bewertung auf dem Funktionenkörper $\mathbb{K}(X)$ durch

$$\mathrm{ord}_x \colon \mathbb{K}(X)^* \ \mapsto \ \mathbb{Z}, \qquad f \ \mapsto \ \mathrm{ord}_x(f).$$

Der zu dieser Bewertung gehörige diskrete Bewertungsring ist genau der Halm der Strukturgarbe in x:

$$R_{\mathrm{ord}_x} \ = \ \left\{ f = \frac{p}{q};\ \mathrm{ord}_x(p) \ \ge \ \mathrm{ord}_x(q) \right\} \ = \ \mathcal{O}_{X,x}.$$

Bemerkung 6.2.5. Es sei X eine irreduzible Prävarietät. Dann hat man für jedes $x \in X$ einen kanonischen Monomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,x} \colon \ \to \ \mathbb{K}(X), \qquad f_x \ \mapsto \ [U, f],$$

wobei $f \in \mathcal{O}_X(U)$ den Keim f_x repräsentiert. Fasst man $\mathcal{O}_{X,x}$ als Unterring von $\mathbb{K}(X)$ auf, so gilt stets

$$\begin{aligned} \mathrm{Def}(f) &= \{x \in X;\ f \in \mathcal{O}_{X,x}\}, \\ \mathcal{O}_{X,x} &= \{f \in \mathbb{K}(X);\ x \in \mathrm{Def}(f)\}. \end{aligned}$$

Definition 6.2.6. Es seien X eine irreduzible Prävarietät und $Y \subseteq X$ eine irreduzible abgeschlossene Menge. Der *lokale Ring* von Y in X ist der Unterring

$$\mathcal{O}_{X,Y} \ = \ \{f \in \mathbb{K}(X);\ Y \cap \mathrm{Def}(f) \neq \emptyset\} \ \subseteq \ \mathbb{K}(X).$$

Bemerkung 6.2.7. Es sei X eine irreduzible Prävarietät. und $Y \subseteq X$ eine irreduzible abgeschlossene Menge. Ist $U \subseteq X$ offen mit $U \cap Y \neq \emptyset$, so hat man kanonische Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U,Y\cap U} & \subseteq & \mathbb{K}(U) \\ \Big\| & & \Big\| \\ \mathcal{O}_{X,Y} & \subseteq & \mathbb{K}(X) \end{array}$$

Lemma 6.2.8. *Es seien R ein K1-Ring und $S \subset R$ ein multiplikatives System. Ist R noethersch, so ist auch $S^{-1}R$ noethersch.*

Beweis. Wir betrachten den kanonischen Homomorphismus $\imath \colon R \to S^{-1}R$, $a \mapsto a/1$. Dann gilt $S^{-1}\imath(\imath^{-1}(\mathfrak{b})) = \mathfrak{b}$ für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subseteq S^{-1}R$. Somit erbt $S^{-1}R$ die Kettenbedingung von R. $\square$

Bemerkung 6.2.9. Es seien X eine irreduzible affine Varietät und $Y \subseteq X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge. Dann ist $\mathfrak{p}_Y := I_X(Y) \subseteq \mathcal{O}(X)$ ein Primideal und man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{p}_Y} \ \to \ \mathcal{O}_{X,Y}, \qquad \frac{f}{g} \ \mapsto \ \frac{f}{g}$$

von Algebren. Insbesondere ist $\mathcal{O}_{X,Y}$ ein noetherscher lokaler Integritätsring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m}_{X,Y} \ := \ \left\{ \frac{f}{g};\ f \in \mathfrak{p}_Y,\ g \in \mathcal{O}(X) \setminus \mathfrak{p}_Y \right\}$$

Satz 6.2.10. *Es seien X eine irreduzible Prävarietät und $Y \subseteq X$ eine irreduzible abgeschlossene Menge. Dann ist $\mathcal{O}_{X,Y}$ ein noetherscher lokaler Integritätsring mit Quotientenkörper $\mathbb{K}(X)$ und maximalem Ideal*

$$\mathfrak{m}_{X,Y} \ := \ \left\{ f \in \mathbb{K}(X);\ Y \cap \mathrm{Def}(f) \neq \emptyset,\ f_{|Y \cap \mathrm{Def}(f)} = 0 \right\}$$

Satz 6.2.11. *Es seien X eine irreduzible normale Prävarietät und $Y \subseteq X$ ein Primdivisor. Dann ist das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{X,Y}$ ein Hauptideal.*

Beweis. Nach Bemerkung 6.2.7 und Satz 6.1.15 dürfen wir annehmen, dass X affin ist und dass ein $f \in \mathcal{O}(X)$ existiert mit

$$I_X(Y) \quad = \quad \langle f \rangle.$$

Mit $S := \mathcal{O}(X) \setminus \langle f \rangle$ ist das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{X,Y} = S^{-1}\mathcal{O}(X)$ gegeben durch $S^{-1}\langle f \rangle$. □

Satz 6.2.12. *Es sei R ein noetherscher lokaler Integritätsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$, sodass $\mathfrak{m} = \langle a \rangle$ für ein $a \in R$ gilt.*

(i) *Jedes $b \in R$ besitzt eine Darstellung $b = ca^n$ mit eindeutig bestimmten $c \in R^*$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*
(ii) *Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ ist von der Gestalt $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^n$ mit einem eindeutig bestimmten $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Lemma 6.2.13. *Es seien R ein noetherscher Integritätsring und $a \in R$ eine Nichteinheit. Dann gilt:*

$$R \quad = \quad \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \langle a^n \rangle \setminus \langle a^{n+1} \rangle.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass R durch die Mengen $\langle a^n \rangle \setminus \langle a^{n+1} \rangle$ überdeckt wird.

Dazu sei $b \in R$ gegeben. Dann gilt entweder $b \in \langle a^0 \rangle \setminus \langle a^1 \rangle$, oder es gilt $b \in \langle a^1 \rangle$. In letzterem Fall haben wir $b = b_1 a$ mit einem $b_1 \in R$. Da a eine Nichteinheit ist, gilt dabei $\langle b \rangle \subsetneq \langle b_1 \rangle$ Für b_1 erhält man analog entweder $b_1 \in \langle a^0 \rangle \setminus \langle a^1 \rangle$ oder $b_1 = b_2 a$ mit einem $b_2 \in R$. Letzteres liefert eine echte Inklusion $\langle b_1 \rangle \subsetneq \langle b_2 \rangle$.

Da R noethersch ist, erhält man nach endlich vielen Schritten $b_n \in \langle a^0 \rangle \setminus \langle a^1 \rangle$, denn sonst hätte man eine unendliche strikt aufsteigende Kette

$$\langle b_1 \rangle \subsetneq \langle b_2 \rangle \subsetneq \langle b_3 \rangle \subsetneq \ldots, \qquad \text{wobei } b_i \ \in \ \langle a^0 \rangle \setminus \langle a^1 \rangle.$$

Mit $b_{n-1} = b_n a$, $b_{n-2} = b_{n-1} a$ etc. schliessen wir $b = b_n a^n$. Das bedeutet $b \in \langle a^n \rangle$. Weiter gilt $b \notin \langle a^{n+1} \rangle$, denn sonst hätte man $b_n a^n = ca^{n+1}$ mit einem $c \in R$ und somit $b_n = ca$. Widerspruch zu $b_n \notin \langle a^1 \rangle$. □

Beweis von Satz 6.2.12. Zu (i). Für den Nachweis der Existenz sei $b \in R$ gegeben. Nach Lemma 6.2.13 gibt es ein n mit $b \in \langle a^n \rangle \setminus \langle a^{n+1} \rangle$. Aus $b \in \langle a^n \rangle$ ergibt sich eine Darstellung $b = ca^n$ mit $c \in R$. Wir müssen zeigen, dass c eine Einheit ist. Andernfalls wäre $\langle c \rangle$ ein echtes Ideal, und somit hätte man $\langle c \rangle \subseteq \mathfrak{m} = \langle a \rangle$ das impliziert $c = c'a$ mit einem $c' \in R$. Widerspruch zu $b \notin \langle a^{n+1} \rangle$.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit seien zwei Darstellungen $b = ca^n = da^m$ wie in der Behauptung gegeben. Dann darf man $n \geq m$ annehmen. Da R ein Integritätsring ist, ergibt sich $ca^{m-n} = d$. Da a keine Einheit in R ist folgt $m = n$ und somit $c = d$.

Zu (ii). Es sei $\mathfrak{a} \subsetneqq R$ ein Ideal. Da R noethersch ist, gilt $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ mit gewissen $a_i \in R$. Nach Aussage (i) gilt $a_i = c_i a^{n_i}$ mit Einheiten $c_i \in R^*$. Für $n := \min(n_1, \ldots, n_r)$ erhalten wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^n$. Dabei ist n eindeutig wegen

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^n \ = \ \mathfrak{m}^k \quad &\iff \quad \langle a^n \rangle \ = \ \langle a^k \rangle \\ &\iff \quad a^n \ = \ ca^k \text{ mit } c \in R^* \\ &\iff \quad n \ = \ k. \end{aligned}$$

□

Konstruktion 6.2.14. Es sei R ein noetherscher lokaler Integritätsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \langle a \rangle \subseteq R$. Für $b \in R$ sei $\langle b \rangle = \mathfrak{m}^{n(b)}$ die Darstellung aus Satz 6.2.12 (ii). Dann definiert

$$\nu_R \colon Q(R) \ \to \ \mathbb{Z}, \qquad 0 \neq \frac{b_1}{b_2} \ \mapsto \ n(b_1) - n(b_2), \quad 0 \ \mapsto \ \infty$$

eine diskrete Bewertung auf dem Quotientenkörper $Q(R)$, und R ist der zugehörige diskrete Bewertungsring.

Beweis. Jedes Element $b_1/b_2 \in Q(R)^*$ besitzt nach Satz 6.2.12 eine eindeutige Darstellung

$$\frac{b_1}{b_2} \ = \ \frac{c_1 a^{n_1}}{c_2 a^{n_2}} \ = \ ca^n, \qquad c \in R^*, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Dabei gilt $n = n(b_1) - n(b_2) = \nu_R(b_1/b_2)$. Indem man für b_i geeignete Potenzen von a wählt erhält man sofort die surjektivität von ν_R. Weiter ergibt sich

$$\nu_R(\alpha\beta) \ = \ \nu_R(\alpha) + \nu_R(\beta).$$

Die Tatsache, dass $R = R_{\nu_R}$ gilt ist ebenfalls offensichtlich. Es bleibt zu prüfen, dass stets

$$\nu_R(\alpha + \beta) \ \geq \ \min(\nu_R(\alpha), \nu_R(\beta))$$

gilt, sofern $\alpha + \beta \neq 0$. Dazu dürfen wir $\nu_R(\alpha) \geq \nu_R(\beta)$ annehmen. Dann erhalten wir

$$\frac{\alpha}{\beta} \ = \ \gamma a^n \text{ mit } \gamma \in R^*, \ n = \nu_R(\alpha) - \nu_R(\beta) \geq 0.$$

Es folgt

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} \ = \ \frac{\alpha}{\beta} + 1 \ \in \ \gamma a^n + 1 \ \in \ R.$$

Das liefert schließlich

$$\nu_R(b + c) \ = \ \nu_R(c(\gamma^n + 1)) \ = \ \nu_R(c) + \nu_R(\gamma^n + 1) \ \geq \ \nu_R(c).$$

□

Konstruktion 6.2.15. Es seien X eine irreduzible normale Prävarietät und $Y \subseteq X$ ein Primdivisor. Dann hat man eine diskrete Bewertung, die *Ordnung längs* Y:

$$\mathrm{ord}_Y \colon \mathbb{K}(X) \ \to \ \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \qquad 0 \neq f \ \mapsto \ \nu_{\mathcal{O}_{X,Y}}(f), \quad 0 \ \mapsto \ \infty.$$

Bemerkung 6.2.16. Es seien X eine irreduzible normale affine Varietät.

(i) Ist $Y \subseteq X$ ein Primdivisor, und $0 \neq g \in \mathcal{O}(X)$, so gilt
$$\mathrm{ord}_Y(g) \ > \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Y \ \subseteq \ V_X(g).$$

(ii) Für jedes $f \in \mathbb{K}(X)^*$ gibt es nur endlich viele Primdivisoren $Y \subseteq X$ mit $\mathrm{ord}_Y(g) \neq 0$.

Definition 6.2.17. Es sei X eine irreduzible normale Prävarietät. Dann ist der *Divisor* einer Funktion $f \in \mathbb{K}(X)^*$ definiert als

$$\mathrm{div}(f) \ := \ \sum_{Y \subseteq X \text{ prim}} \mathrm{ord}_Y(f) Y.$$

Bemerkung 6.2.18. Es sei X eine irreduzible normale Prävarietät. Dann definiert die Zuordnung $f \mapsto \mathrm{div}(f)$ einen Homomorphismus $\mathbb{K}(X)^* \to \mathrm{WDiv}(X)$.

Aufgaben zu Abschnitt 6.2.

Aufgabe 6.2.19. Es seien X eine irreduzible normale Varietät, $Y \subseteq X$ ein Primdivisor und $f \in \mathcal{O}_{X,Y}$. Weiter seien $U \subseteq X$ eine affine offene Menge mit $U \cap Y \neq \emptyset$ und $g \in \mathcal{O}(U)$ mit $I_U(Y \cap U) = \langle g \rangle$. Zeige: Es gilt $\mathrm{ord}_Y(f) = \max(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; g^n \mid f)$.

Aufgabe 6.2.20. Zeige: Auf $X := \mathbb{K}^n$ ist jeder Weildivisor der Divisor einer rationalen Funktion.

Aufgabe 6.2.21. Es seien $X = V(T_1T_2 - T_3T_4) \subseteq \mathbb{K}^4$. Zeige, dass der folgende Divisor nicht Divisor einer rationalen Funktion ist:

$$D \quad := \quad V_X(T_1) \; + \; V_X(T_3).$$

Aufgabe 6.2.22. Es seien X eine irreduzible Prävarietät und $Z \subseteq Y \subseteq X$ irreduzible abgeschlossene Teilmengen. Beweise folgende Aussagen:

(i) Man hat kanonische Inklusionen $\mathcal{O}_{X,Z} \subseteq \mathcal{O}_{X,Y} \subseteq \mathcal{O}_{X,X} = \mathbb{K}(X)$.
(ii) Es gilt $\mathcal{O}_{X,Z} = \bigcap_{Z \subseteq Y'} \mathcal{O}_{X,Y'}$, wobei $Y' \subseteq X$ alle irreduziblen abgeschlossenen Mengen durchläuft.

6.3. **Divisoren und Teilbarkeit.**

Erinnerung 6.3.1. Es sei X eine irreduzible Prävarietät. Ein *Primdivisor* auf X ist eine irreduzible Hyperfläche $Y \subseteq X$. Ein *Weildivisor* auf X ist eine ganzahlige Linearkombination von Primdivisoren

$$D \quad := \quad \sum a_Y Y.$$

Die Menge $\mathrm{WDiv}(X)$ der Weildivisoren ist eine abelsche Gruppe bezüglich der koeffizientenweisen Addition. Ist X normal, so definiert jede rationale Funktion $f \in \mathbb{K}(X)^*$ einen Divisor

$$\mathrm{div}(f) \quad := \quad \sum \mathrm{ord}_Y(f) Y.$$

Die *Ordnung* $\mathrm{ord}_Y(f) \in \mathbb{Z}$ von $f \in \mathbb{K}(X)^*$ längs eines Primdivisors Y ist dabei folgendermaßen definiert: Für $g \in \mathcal{O}_{X,Y}$ setzt man

$$\mathrm{ord}_Y(g) \quad := \quad \max(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0};\ f \in \mathfrak{m}_{X,Y}^n),$$

wobei $\mathfrak{m}_{X,Y} \subseteq \mathcal{O}_{X,Y}$ das maximale Ideal im lokalen Ring von Y bezeichnet. Für $f = g/h \in \mathbb{K}(X) = Q(\mathcal{O}_{X,Y})$ mit $g, h \in \mathcal{O}_{X,Y}$ setzt man

$$\mathrm{ord}_Y(f) \quad := \quad \mathrm{ord}_Y(g) \ - \ \mathrm{ord}_Y(h).$$

Satz 6.3.2. *Es seien X eine irreduzible normale affine Varietät und $f = p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r} \in \mathbb{K}(X)$ mit Primelementen $p_i \in \mathcal{O}(X)$ und Zahlen $\nu_i \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$\mathrm{div}(f) \quad = \quad \nu_1 \cdot V_X(p_1) + \ldots + \nu_r \cdot V_X(p_r).$$

Beweis. Da p_i prim ist, gilt $\emptyset \neq V_X(p_i) \neq X$ und $V_X(p_i)$ ist irreduzibel. Der Krullsche Hauptidealsatz liefert $\dim(V_X(p_i)) = \dim(X) - 1$. Ist $Y \subseteq X$ ein Primdivisor, so haben wir

$$\mathrm{ord}_Y(p_i) > 0 \iff p_i \in I_X(Y) \iff V_X(p_i) \supseteq Y \iff V_X(p_i) = Y.$$

Gilt $Y = V_X(p_i)$, so liefert der Hilbertsche Nullstellensatz $I_X(Y) = \langle p_i \rangle$. Damit erhalten wir für das maximale Ideal $\mathfrak{m}_{X,Y} \subseteq \mathcal{O}_{X,Y}$:

$$\mathfrak{m}_{X,Y} \ = \ \left\{\frac{g}{h};\ g \in I_X(Y),\ h \in \mathcal{O}(X) \setminus I_X(Y)\right\} \ = \ \left\langle \frac{p_i}{1} \right\rangle.$$

Das impliziert $\mathrm{ord}_Y(p_i) = 1$, und wir erhalten $\mathrm{div}(p_i) = V_X(p_i)$. Die Behauptung folgt also mit

$$\mathrm{div}(f) \ = \ \mathrm{div}(p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}) \ = \ \nu_1 \cdot \mathrm{div}(p_1) + \ldots + \nu_r \cdot \mathrm{div}(p_r).$$

□

Beispiel 6.3.3. Der Divisor der rationalen Funktion T_1/T_2 auf $X = \mathbb{K}^2$ ist gegeben durch

$$\mathrm{div}\left(\frac{T_1}{T_2}\right) \quad = \quad 1 \cdot V(T_1) \ - \ 1 \cdot V(T_2).$$

Satz 6.3.4. *Es seien X eine irreduzible normale Prävarietät und $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge mit* $\dim(A) \le \dim(X) - 2$. *Dann hat man einen Isomorphismus*

$$\mathcal{O}(X) \ \to \ \mathcal{O}(X \setminus A), \qquad f \ \mapsto \ f_{|X \setminus A}.$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $X = \mathbb{K}^n$. Es sei $f \in \mathcal{O}(X \setminus A)$ gegeben. Dann ist f auf einer Hauptmenge von $\mathbb{K}^n$ regulär, und es folgt $f \in \mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n)$. Da $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ faktoriell ist, gibt es eine Darstellung

$$f \ = \ p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$$

mit paarweise nichtassoziierten Primelementen $p_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und Exponenten $0 \ne \nu_i \in \mathbb{Z}$. Wir müssen zeigen, dass stets $\nu_i > 0$ gilt. Nehmen wir an, es gelte $\nu_i < 0$ für ein i, etwa für $i = 1$. Wegen $V(p_i) \not\subseteq V(p_j)$ für $i \ne j$ finden wir eine Funktion

$$g \ \in \ I(A \cup V(p_2) \cup \ldots \cup V(p_r)) \ \setminus \ I(V(p_1)).$$

Die Primfaktorzerlegung von $g \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist dann von der Gestalt

$$g \ = \ p_2^{\mu_1} \cdots p_r^{\mu_r} \cdot q_1^{\kappa_1} \cdots q_r^{\kappa_s}$$

mit Primelementen $q_j \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, sodass $q_j \not\sim p_1$ gilt. Wir dürfen $\mu_i = \kappa_j = 1$ annehmen. Wegen $A \subseteq V(g)$ ist f regulär auf der Hauptmenge $\mathbb{K}^n_g$. Folglich gilt $f = h/g^l$ mit einem $h \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ und somit

$$f' g^l \ = \ p_1^{-\nu_1} f'' h,$$

wobei $f' \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ das Produkt der Primfaktoren p_i mit $\nu_i > 0$ ist und $f'' = p_1^{\nu_1} f'/f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Das ist jedoch auf Grund der Primfaktorzerlegung von g nicht möglich.

Es sei nun X eine irreduzible normale affine Varietät. Nach dem noetherschen Normalisierungslemma gibt es einen endlichen Morphismus $\varphi\colon X \to \mathbb{K}^n$, wobei $n = \dim(X)$ gilt. Da $\varphi\colon X \to \mathbb{K}^n$ endlich ist, ist das Bild $Z := \varphi(A)$ abgeschlossen in $\mathbb{K}^n$. Weiter gilt

$$\dim(Z) \ \le \ \dim(A) \ \le \ n - 2.$$

Wir schreiben $\mathbb{K}^n \setminus Z$ als Vereinigung von Hauptmengen $V_1, \ldots, V_r \subseteq \mathbb{K}^n$. Es seien $U_i := \varphi^{-1}(V_i)$ und $\varphi_i := \varphi_{|U_i}$. Als Lokalisierung des endlichen Morphismus $\varphi\colon X \to \mathbb{K}^n$ ist jedes $\varphi_i\colon U_i \to V_i$ ebenfalls endlich, siehe Lemma 6.3.6 aus der kommutativen Algebra. Mit $\mathbb{L} := \varphi^*(\mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n))$ erhalten wir weiter eine endliche Körpererweiterung $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}(X)$.

Wir zeigen nun, dass für jede rationale Funktion $f \in \mathbb{K}(X)$ mit $f \in \mathcal{O}(X \setminus A)$ bereits $f \in \mathcal{O}(X)$ gilt. Dazu betrachten wir das Minimalpolynom von f über $\mathbb{L}$. Dieses ist von der Form

$$q_f \ = \ T^k + a_{k-1} T^{k-1} + \ldots + a_0, \qquad \text{mit } a_j \ = \ \varphi^*(b_j), \ b_j \in \mathbb{K}(T_1, \ldots, T_n).$$

Da $f \in \mathcal{O}(U_i)$ ganz über $\varphi^*(\mathcal{O}(V_i)$ ist und $\varphi^*(\mathcal{O}(V_i))$ als faktorieller Ring normal ist, erhalten wir mit Satz 6.5.9 aus der kommutativen Algebra, dass $a_j \in \varphi^*(\mathcal{O}(V_i))$ und somit $b_j \in \mathcal{O}(V_i)$ für jedes j gilt.

Es folgt $b_j \in \mathcal{O}(\mathbb{K}^n \setminus Z)$. Wie eingangs gesehen, impliziert das $b_j \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Also gilt $q_f \in \varphi^*(\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n])[T]$. Insbesondere ist f ganz über $\mathcal{O}(X)$. Da X normal ist, erhalten wir $f \in \mathcal{O}(X)$.

Schließlich müssen wir noch den Fall behandeln, dass X eine irreduzible normale Prävarietät ist. Wir überdecken X durch offene affine Teilmengen $U_1, \ldots, U_r \subseteq X$. Wie eben gesehen, sind die Einschränkungshomomorphismen $\mathcal{O}(U_i) \to \mathcal{O}(U_i \setminus A)$ surjektiv. Daraus ergibt sich direkt die Surjektivität von $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X \setminus A)$. $\square$

Definition 6.3.5. Es seien $D = \sum a_Y Y$ und $E = \sum b_Y Y$ Weildivisoren auf einer irreduziblen Prävarietät X. Wir schreiben $D \geq E$, falls $a_Y \geq b_Y$ für jeden Primdivisor $Y \subseteq X$ gilt.

Satz 6.3.6. *Es sei X eine irreduzible normale Prävarietät, und es sei $f \in \mathbb{K}(X)^*$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt $f \in \mathcal{O}(X)$.*
(ii) *Es gilt $\mathrm{div}(f) \geq 0$.*

Beweis. Für jede rationale Funktion $f \in \mathbb{K}(X)^*$ erhalten wir mit Satz 6.3.4:

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}(X) \quad &\iff \quad \dim(X \setminus \mathrm{Def}(f)) \leq \dim(X) - 2 \\ &\iff \quad \mathrm{Def}(f) \cap Y \neq \emptyset \text{ für alle Primdivisoren } Y \subseteq X \\ &\iff \quad f \in \mathcal{O}_{X,Y} \text{ für alle Primdivisoren } Y \subseteq X \\ &\iff \quad \mathrm{ord}_Y(f) \geq 0 \text{ für alle Primdivisoren } Y \subseteq X \\ &\iff \quad \mathrm{div}(f) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Folgerung 6.3.7. *Es sei X eine irreduzible normale Prävarietät, und es seien $f, g \in \mathcal{O}(X)$.*

(i) *Es gilt genau dann $g \mid f \in \mathcal{O}(X)$, wenn $\mathrm{div}(g) \leq \mathrm{div}(f)$ gilt.*
(ii) *Es gilt genau dann $f \in \mathcal{O}(X)^*$, wenn $\mathrm{div}(f) = 0$ gilt.*

Satz 6.3.8. *Es sei X eine irreduzible normale affine Varietät, und es sei $f \in \mathcal{O}(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) *f ist prim in $\mathcal{O}(X)$.*
(ii) *$\mathrm{div}(f)$ ist ein Primdivisor.*

Beweis. Die Implikation "(i)⇒(ii)" ergibt sich sofort mit Satz 6.3.2. Zu "(ii)⇒(i)". Ist $\mathrm{div}(f)$ ein Primdivisor, so muss $0 \neq f \notin \mathcal{O}(X)^*$ gelten. Es seien nun $g, h \in \mathcal{O}(X)$ mit $f \mid gh$ in $\mathcal{O}(X)$. Dann gibt es ein $a \in \mathcal{O}(X)$ mit $af = gh$. Das bedeutet

$$\mathrm{div}(a) + \mathrm{div}(f) \quad = \quad \mathrm{div}(g) + \mathrm{div}(h).$$

Insbesondere muss der Primdivisor $Y = V_X(f)$ mit nichttrivialer Vielfachheit in $\mathrm{div}(g)$ oder $\mathrm{div}(h)$ vorkommen. Satz 6.3.6 liefert daher $g/f \in \mathcal{O}(X)$ oder $h/f \in \mathcal{O}(X)$ und somit $f \mid g$ oder $f \mid h$. □

Definition 6.3.9. Es sei X eine irreduzible normale Prävarietät. Ein Weildivisor D auf X auf X heißt *Hauptdivisor*, falls $D = \mathrm{div}(f)$ mit einer Funktion $f \in \mathbb{K}(X)^*$ gilt.

Satz 6.3.10. *Es sei X eine irreduzible normale affine Varietät, Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Der Ring $\mathcal{O}(X)$ ist faktoriell.*
(ii) *Jeder Weildivisor auf X ist ein Hauptdivisor.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Es genügt zu zeigen, dass jeder Primdivisor D auf X ein Hauptdivisor ist. Dazu wählen wir $f \in I_X(D)$. Dann gilt $\mathrm{div}(f) \geq D$ und, da $\mathcal{O}(X)$ faktoriell ist, haben wir eine Darstellung

$$f \quad = \quad c \cdot f_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{\nu_r}$$

mit Primelementen $f_i \in \mathcal{O}(X)$. Nach Satz 6.3.8 ist jeder Divisor $D_i := \mathrm{div}(f_i)$ prim. Wegen $\mathrm{ord}_D(f) \geq 0$ folgt $D = D_i$ für ein i.

Zu "(ii)⇒(i)". Es sei eine nichttriviale Nichteinheit $f \in \mathcal{O}(X)$ gegeben. Dann ist der Divisor von f von der Gestalt

$$\operatorname{div}(f) \quad = \quad \nu_1 D_1 + \ldots + \nu_r D_r$$

mit Primdivisoren $D_1, \ldots, D_r$ und Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Nach Voraussetzung gilt $D_i = \operatorname{div}(f_i)$; dabei ist $f_i \in \mathcal{O}(X)$ ein Primelement. Es folgt

$$f \quad = \quad c \cdot f_1^{\nu_1} \cdots f_r^{\nu_r}$$

mit $c := f / f_1^{\nu_1} \cdots f_r^{\nu_r}$. Wegen $\operatorname{div}(c) = 0$ ist c eine Einheit in $\mathcal{O}(X)$. Somit haben wir gesehen, dass man f als Produkt von Primelementen schreiben kann. □

Aufgaben zu Abschnitt 6.3.

Aufgabe 6.3.11. Es seien $\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ und $d := \nu_1 + \ldots + \nu_n$. Berechne den Divisor der rationalen Funktion
$$f \ := \ \frac{T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n}}{T_0^d} \ \in \ \mathbb{K}(\mathbb{P}_n).$$

Aufgabe 6.3.12. Es sei X eine normale affine Varietät und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Menge, sodass $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X \setminus Y)$, $f \mapsto f_{|X \setminus Y}$ ein Isomorphismus ist. Zeige, dass $\dim(Y) \leq \dim(X) - 2$ gilt.

Aufgabe 6.3.13. Es seien X eine normale irreduzible Prävarietät der Dimension n und $f \in \mathbb{K}(X)$. Zeige: Es gilt $\mathrm{Def}(f) = X$ oder $X \setminus \mathrm{Def}(f)$ ist rein $(n-1)$-dimensional.

6.4. Divisorenklassengruppe.

Erinnerung 6.4.1. Es sei X eine irreduzible normale Prävarietät der Dimension n. Ein *Primdivisor* auf X ist eine irreduzible Hyperfläche $Y \subseteq X$ der Dimension $n-1$. Ein *Weildivisor* ist eine formale ganzahlige Linearkombination von Primdivisoren

$$D \;=\; \sum_Y a_y Y,$$

d.h., ein Element der von den Primdivisoren erzeugten freien abelschen Gruppe $\mathrm{WDiv}(X)$. Durch Übergang zum Divisor einer rationalen Funktion erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{K}(X)^* \;\to\; \mathrm{WDiv}(X), \qquad\qquad f \;\mapsto\; \mathrm{div}(f) = \sum \mathrm{ord}_Y(f)Y.$$

Definition 6.4.2. Es sei X eine irreduzible normale Prävarietät.

(i) Die Gruppe der *Hauptdivisoren* auf X ist

$$\mathrm{HDiv}(X) \;:=\; \{\mathrm{div}(f);\; f \in \mathbb{K}(X)^*\} \;\leq\; \mathrm{WDiv}(X).$$

(ii) Die *Divisorenklassengruppe* von X ist die Faktorgruppe

$$\mathrm{Cl}(X) \;:=\; \mathrm{WDiv}(X)/\mathrm{HDiv}(X).$$

Satz 6.4.3. *Es sei X eine irreduzible normale affine Varietät. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt* $\mathrm{Cl}(X) = \{0\}$.
(ii) *Es gilt* $\mathrm{WDiv}(X) = \mathrm{HDiv}(X)$.
(iii) *Der Ring $\mathcal{O}(X)$ ist faktoriell.*

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii) ist nach Definition klar. Die Äquivalenz von Aussagen (ii) und (iii) gilt nach Satz 6.3.10. □

Beispiel 6.4.4. Es gilt $\mathrm{Cl}(\mathbb{K}^n) = \{0\}$ und $\mathrm{Cl}(\mathbb{T}^n) = \{0\}$.

Konstruktion 6.4.5. Es sei X eine irreduzible normale Prävarietät und $U \subseteq X$ eine offene Menge. Für jeden Primdivisor $Y \subseteq X$ setzen wir

$$\imath^*(Y) \;:=\; \begin{cases} Y \cap U, & \text{falls } Y \cap U \neq \emptyset, \\ 0, & \text{falls } Y \cap U = \emptyset. \end{cases}$$

Das definiert einen Homomorphismus $\imath^*\colon\ \mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{WDiv}(U)$ abelscher Gruppen. Weiter erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{HDiv}(X) \arrow[d, "\imath^*"'] & \subseteq & \mathrm{WDiv}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\imath^*"'] & \mathrm{Cl}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\imath^*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{HDiv}(U) & \subseteq & \mathrm{WDiv}(U) \arrow[r] & \mathrm{Cl}(U) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

wobei alle Abbildungen Homomorphismen abelscher Gruppen sind und die beiden Zeilen exakt Sequenzen sind.

Beweis. Da die Primdivisoren eine $\mathbb{Z}$-Basis für die Gruppe der Weildivisoren bilden, liefert die obige Vorgabe von Werten einen wohldefinierten Homomorphismus $\imath^*\colon\ \mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{WDiv}(U)$.

Wir zeigen, dass $\imath^*(\mathrm{HDiv}(X)) \subseteq \mathrm{HDiv}(U)$ gilt. Für jede rationale Funktion $f \in \mathbb{K}(X)^*$ haben wir

$$\imath^*(\mathrm{div}(f)) \;=\; \imath^*\left(\sum_Y \mathrm{ord}_Y(f)Y\right) \;=\; \sum_{Y\cap U \neq \emptyset} \mathrm{ord}_{Y\cap U}(f_{|U})(Y \cap U) \;=\; \mathrm{div}(f_{|U}).$$

Damit ist das linke Rechteck im Diagramm wohldefiniert und kommutativ. Der Homomorphiesatz liefert uns dann einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(U)$, ebenfalls mit $\imath^*$ bezeichnet, mit dem das gesamte Diagramm kommutativ wird. □

Satz 6.4.6. *Es seien X eine irreduzible normale Prävarietät und $U \subseteq X$ eine offene Menge. Weiter sei*

$$X \setminus U \ = \ Y_1 \cup \ldots \cup Y_r \cup B,$$

wobei jedes $Y_i \subseteq X$ ein Primdivisor und $B \subseteq X$ abgeschlossen mit $\dim(B) \le n-2$ *sei. Dann hat man eine exakte Sequenz*

$$\mathbb{Z}^r \xrightarrow{e_i \mapsto [Y_i]} \mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\imath^*} \mathrm{Cl}(U) \longrightarrow 0 \ .$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\imath^* \colon \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(U)$ surjektiv ist. Nach Konstruktion 6.4.5 gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{WDiv}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\imath^*"'] & \mathrm{Cl}(X) \arrow[d, "\imath^*"] \\ \mathrm{WDiv}(U) \arrow[r] & \mathrm{Cl}(U). \end{tikzcd}$$

Dabei sind $\imath^* \colon \mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{WDiv}(U)$ und $\mathrm{WDiv}(U) \to \mathrm{Cl}(U)$ surjektiv. Somit ist auch $\imath^* \colon \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(U)$ surjektiv.

Weiter müssen wir zeigen, dass $\ker(\imath^*) = \sum \mathbb{Z} \cdot [Y_i]$ gilt. Wegen $Y_i \cap U = \emptyset$ gilt $\imath^*(Y_i) = 0$ und somit liegen alle Klassen $[Y_i]$ in $\ker(\imath^*)$.

Ist $D \in \mathrm{WDiv}(X)$ mit $\imath^*([D]) = 0 \in \mathrm{Cl}(U)$ gegeben, so existiert ein $f \in \mathbb{K}(U)^*$ mit $\imath^*(D) = \mathrm{div}(f)$ auf U. Auf X haben wir

$$D' \ := \ D - \mathrm{div}(f) \ = \ \sum b_i Y_i,$$

wobei $b_i \in \mathbb{Z}$. Für die zu gehörigen Klassen in $\mathrm{Cl}(X)$ gilt $[D] = [D'] = \sum b_i [Y_i]$. Das beweist $\ker(\imath^*) \subseteq \sum \mathbb{Z} \cdot [Y_i]$. □

Folgerung 6.4.7. *Es seien X eine irreduzible normale Prävarietät und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Gilt* $\dim(X \setminus U) \le \dim(X) - 2$, *so gilt* $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Cl}(U)$.

Folgerung 6.4.8. *Es seien X eine irreduzible normale Prävarietät und $U \subseteq X$ eine offene Menge. Weiter sei*

$$X \setminus U \ = \ Y \cup B,$$

wobei $Y \subseteq X$ ein Primdivisor $B \subseteq X$ abgeschlossen mit $\dim(B) \le \dim(X) - 2$ *sei. Gilt $\mathcal{O}(X) = \mathbb{K}$ und* $\mathrm{Cl}(U) = \{0\}$, *so gilt* $\mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z} \cdot [Y] \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Satz 6.4.6 liefert uns einen Epimorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}(X)$, $k \mapsto k \cdot [Y]$. Wir haben zu zeigen, dass $k \cdot [\mathbb{Z}] \ne 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt. Andernfalls hätten wir

$$k \cdot Y \ = \ \mathrm{div}(f) \quad \text{ mit } k \in \mathbb{Z}_{>0}, \ f \in \mathbb{K}(X)^*.$$

Insbesondere gilt $\mathrm{div}(f) \ge 0$. Nach Satz 6.3.6 bedeutet das $f \in \mathcal{O}(X)$. Nach Voraussetzung ist f dann konstant und wir erhalten $\mathrm{div}(f) = 0$; Widerspruch zu $k > 0$. □

Folgerung 6.4.9. *Mit $Y_0 := V(T_0) \subseteq \mathbb{P}_n$ gilt* $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}_n) = \mathbb{Z} \cdot [Y_0] \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Für $U_0 = \mathbb{P}_n \setminus Y_0$ haben wir $U_0 \cong \mathbb{K}^n$. Insbesondere ist $\mathcal{O}(U_0)$ faktoriell und somit gilt $\mathrm{Cl}(U_0) = \{0\}$. Folgerung 6.4.8 liefert dann die Behauptung. □

Folgerung 6.4.10. *Es sei* $g \in \mathbb{K}[T_2, \ldots, T_n]$ *irreduzibel und homogen vom Grad* $k > 1$. *Weiter seien* $f := T_0^{k-1}T_1 + g \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ *und* $X := V_{\mathbb{P}_n}(f) \subseteq \mathbb{P}_n$ *normal. Dann gilt* $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Die Varietät X ist irreduzibel und es gilt $\dim(X) = n - 1$. Wir betrachten $Y := X \cap V_{\mathbb{P}_n}(T_0) \subseteq X$ und $U := X \setminus Y \subseteq X$. Wir zeigen zunächst, dass Y ein Primdivisor in X ist. Es gilt

$$A \ := \ V_{\mathbb{K}^{n+1}}(T_0, g) \ \cong \ V_{\mathbb{K}^n}(g).$$

Da g irreduzibel ist, muss A irreduzibel sein. Damit ist auch Y irreduzibel, denn wir haben

$$Y \ = \ V_{\mathbb{P}_n}(T_0, f) \ = \ V_{\mathbb{P}_n}(T_0, g) \ = \ \pi_n(A \setminus \{0\}).$$

Weiter ist für $U_1 = \mathbb{P}_n \setminus V_{\mathbb{P}_n}(T_1)$ der Durchschnitt $U_1 \cap V_{\mathbb{P}_n}(T_0, g)$ isomorph zur Hyperfläche $V_{\mathbb{K}^{n-1}}(g)$ und somit gilt $\dim(Y) = n - 2 = \dim(X) - 1$.

Wir zeigen nun, dass $\mathrm{Cl}(U) = \{0\}$ gilt. Dazu betrachten wir $U_0 = \mathbb{P}_n \setminus V_{\mathbb{P}_n}(T_0)$ und den Isomorphismus

$$\varphi_0 \colon \mathbb{K}^n \ \to \ U_0, \qquad (z_1, \ldots, z_n) \ \mapsto \ [1, z_1, \ldots, z_n]$$

Es gilt $U = X \cap U_0$ und in $\mathbb{K}^n$ hat man $\varphi_0^{-1}(U) = V_{\mathbb{K}^n}(T_1 + g)$. Folglich erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{K}^{n-1} \ \to \ \varphi_0^{-1}(U), \qquad (w_1, \ldots, w_{n-1}) \ \mapsto \ (-g(w_1, \ldots, w_{n-1}), w_1, \ldots, w_{n-1}).$$

Insbesondere ergibt sich $\mathrm{Cl}(U) \ \cong \ \mathrm{Cl}(\mathbb{K}^{n-1}) \ = \ \{0\}$. Somit können wir Folgerung 6.4.8 anwenden und erhalten $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}$. □

Folgerung 6.4.11. *Es seien* $4 \le r \le n$ *und* $f = T_0^2 + \ldots + T_r^2 \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$. *Für die Quadrik* $X := V_{\mathbb{P}_n}(f) \subseteq \mathbb{P}_n$ *gilt dann* $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir betrachten $f' = T_0T_1 + T_2T_3 + T_4^2 + \ldots + T_r^2$ und $X' := V_{\mathbb{P}_n}(f') \subseteq \mathbb{P}_n$. Mit $I := \sqrt{-1}$ erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{P}_n \ \to \ \mathbb{P}_n, \qquad [z_0, \ldots, z_n] \ \mapsto \ [z_0 + Iz_1, z_0 - Iz_1, z_2 + Iz_3, z_2 - Iz_3, z_4, \ldots, z_n].$$

Dieser bildet X auf X' ab. Es genügt also zu zeigen, dass X' triviale Divisorenklassengruppe besitzt. Dazu betrachten wir die Polynome

$$h \ := \ T_4^2 + \ldots + T_r^2, \qquad g \ := \ T_2T_3 + h.$$

Wir zeigen, dass g irreduzibel ist. Andernfalls hätten wir $g = g_1g_2$ mit homogenenen Polynomen g_1 und g_2 vom Grad eins. Wir schreiben

$$g_1 \ = \ a_1T_2 + b_1T_3 + h_1, \qquad g_2 \ = \ a_2T_2 + b_2T_3 + h_2$$

mit Linearformen $h_1, h_2 \in \mathbb{K}[T_4, \ldots, T_r]$. Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich führt zu einem Widerspruch.

Somit können wir Folgerung 6.4.10 auf X', f', g anwenden und erhalten, wie gewünscht, $\mathrm{Cl}(X') = \{0\}$. □

Definition 6.4.12. Es sei X eine irreduzible normale Prävarietät.

(i) Wir nennen einen Weildivisor D auf X *Cartierdivisor*, falls für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ und eine Funktion $f \in \mathbb{K}(U)^*$ existieren, sodass $\imath^*(D) = \mathrm{div}(f)$ gilt, wobei $\imath^* \colon \mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{WDiv}(U)$ wie in Konstruktion 6.4.5 definiert ist.

(ii) Die *Cartierdivisorengruppe* von X ist die Untergruppe aller Cartierdivisoren in der Weildivisorengruppe:

$$\mathrm{CDiv}(X) \ := \ \{D \in \mathrm{WDiv}(X);\ D \text{ Cartierdivisor}\} \ \le \ \mathrm{WDiv}(X).$$

Beispiel 6.4.13. Es gilt $\mathrm{CDiv}(\mathbb{P}_n) = \mathrm{WDiv}(\mathbb{P}_n)$, denn auf $U_i \cong \mathbb{K}^n$ ist jeder Weildivisor Hauptdivisor.

Definition 6.4.14. Es sei X eine irreduzible normale Prävarietät. Die *Picardgruppe*, auch *Cartierdivisorenklassengruppe* genannt, ist die Untergruppe

$$\mathrm{Pic}(X) \;:=\; \mathrm{CDiv}(X)/\mathrm{HDiv}(X) \;\le\; \mathrm{Cl}(X).$$

Beispiel 6.4.15. Es gilt $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_n) = \mathrm{Cl}(\mathbb{P}_n) = \mathbb{Z}$.

Bemerkung 6.4.16. Es sei $\varphi\colon X \to X'$ ein Isomorphismus normaler irreduzibler Prävarietäten. Dann hat man einen Isomorphismus abelscher Gruppen

$$\varphi^*\colon\ \mathrm{WDiv}(X') \;\to\; \mathrm{WDiv}(X), \qquad \sum a_Y Y \;\mapsto\; \sum a_Y \varphi^{-1} Y.$$

Dabei gilt $\varphi^*(\mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(\varphi^*(f))$ für jedes $0 \neq f \in \mathbb{K}(X')^*$ und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{HDiv}(X') \arrow[d, "\varphi^*"', "\cong"] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \mathrm{WDiv}(X') \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*"', "\cong"] & \mathrm{Cl}(X') \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*"', "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{HDiv}(X) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \mathrm{WDiv}(X) \arrow[r] & \mathrm{Cl}(X) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt $\mathrm{Cl}(X') \cong \mathrm{Cl}(X)$. Weiter haben wir $\varphi^*(\mathrm{CDiv}(X')) = \mathrm{CDiv}(X)$ und erhalten $\mathrm{Pic}(X') \cong \mathrm{Pic}(X)$.

Aufgaben zu Abschnitt 6.4.

Aufgabe 6.4.17. Berechne die Divisorenklassengruppe $\mathrm{Cl}(X)$ für die Gerade X mit dem doppelten Nullpunkt.

Aufgabe 6.4.18. Zeige: Die Divisorenklassengruppe der affinen Varietät $X = V(T_1T_2 - T_3^2) \subseteq \mathbb{K}^3$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6.4.19. Zeige: Die Divisorenklassengruppe der affinen Varietät $X = V(T_1T_2 - T_3T_4) \subseteq \mathbb{K}^4$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$.

7. Torische Varietäten II

7.1. Normale affine torische Varietäten.

Erinnerung 7.1.1. Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ und $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}^n$ ihre Zeilen. Dann hat man einen zugehörigen Homomorphismus von Standardtori

$$\varphi_A \colon \mathbb{T}^n \ \to \ \mathbb{T}^m, \qquad t \ \mapsto \ (t^{a_1}, \ldots, t^{a_m}).$$

Der Abschluss des Bildes $X_A := \overline{\varphi(\mathbb{T}^n)}$ ist eine affine torische Varietät mit Basispunkt $\mathbf{1}_m$ und der Operation

$$\mathbb{T}^k \times X_A \ \to \ X_A, \qquad t \cdot x \ := \ \varphi_C(t)x,$$

mit $k = \mathrm{rg}(A)$, einer Zerlegung $\varphi_A = \varphi_C \circ \varphi_B$, wobei $\varphi_B \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^k$ surjektiv, $\varphi_C \colon \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^m$ abgeschlossene Einbettung, und $\mathbb{T}^m$ wie üblich auf $\mathbb{K}^m$ operiert.

Beispiel 7.1.2. Die Neilsche Parabel und die affinen Quadriken in drei bzw. vier Variablen sind von der Form X_A:

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{liefert} \quad X_A \ = \ V(T_1^3 - T_2^3) \qquad \subseteq \ \mathbb{K}^2,$$

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{liefert} \quad X_A \ = \ V(T_1T_2 - T_3^2) \qquad \subseteq \ \mathbb{K}^3,$$

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{liefert} \quad X_A \ = \ V(T_1T_2 - T_3T_4) \ \subseteq \ \mathbb{K}^4.$$

Konstruktion 7.1.3. Es sei S ein abelsches Monoid. Die zu S gehörige *Monoidalgebra* ist als Vektorraum ist gegeben durch

$$\mathbb{K}[S] \ := \ \bigoplus_{u \in S} \mathbb{K}\chi^u.$$

Die Multiplikation auf $\mathbb{K}[S]$ wird zunächst für homogene Elemente definiert durch $\chi^u\chi^{u'} := \chi^{u+u'}$, und wird dann durch "Ausmultiplizieren" auf $\mathbb{K}[S]$ fortgesetzt:

$$\left(\sum_u \alpha_u \chi^u\right)\left(\sum_v \beta_v \chi^v\right) \ := \ \sum_w \left(\sum_{u+v=w} \alpha_u \beta_v\right) \chi^w.$$

Der Übergang zur Monoidalgebra ist funktoriell; jeder Homomorphismus $F \colon S \to S'$ von Monoiden induziert einen Homomorphismus:

$$\psi_F \colon \mathbb{K}[S] \ \to \ \mathbb{K}[S'], \qquad \sum \alpha_u \chi^u \ \mapsto \ \sum \alpha_u \chi^{F(u)}.$$

Beispiel 7.1.4. Die zu den Monoiden $\mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ bzw. $\mathbb{Z}^n$ gehörigen Monoidalgebren sind gegeben durch

$$\mathbb{K}[\mathbb{Z}^n_{\ge 0}] \ = \ \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}} \mathbb{K} \cdot \chi^u \ \cong \ \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n],$$

$$\mathbb{K}[\mathbb{Z}^n] \ = \ \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{K} \cdot \chi^u \ \cong \ \mathbb{K}[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}].$$

Konstruktion 7.1.5. Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{Z})$ eine Matrix und $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{Z}^n$ ihre Zeilen. Das *Zeilenmonoid* von A ist das von $a_1,\ldots,a_n$ erzeugte Untermonoid von $\mathbb{Z}^n$:

$$S_A \ := \ \{c_1a_1 + \ldots + c_na_n;\ c_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \ \subseteq \ \mathbb{Z}^n.$$

Satz 7.1.6. *Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{Z})$ eine Matrix, $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m)$ die zugehörige affine torische Varietät und $S_A \subseteq \mathbb{Z}^n$ das zugehörige Monoid. Dann hat man einen wohldefinierten Isomorphismus*

$$\varphi_A^*\colon \mathcal{O}(X_A) \ \to \ \mathbb{K}[S_A], \qquad T^\nu_{|X_A} \ \mapsto \ \chi^{A^t\nu}.$$

Beweis. Wir betrachten die folgenden durch $\varphi_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ definierten kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^n \arrow[rr, "\varphi_A"] \arrow[dr] & & \mathbb{K}^m \\ & X_A \arrow[ur] & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K}[S_1^{\pm 1},\ldots,S_n^{\pm 1}] & & \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m] \arrow[ll, "\varphi_A^*"'] \arrow[dl] \\ & \mathcal{O}(X_A) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Dann ist $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m] \to \mathcal{O}(X_A)$ surjektiv und $\mathcal{O}(X_A)$ ist injektiv. Folglich erhalten wir

$$\mathcal{O}(X_A) \ \cong \ \varphi_A^*(\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]) \ \cong \ \mathbb{K}[S_A].$$

□

Definition 7.1.7. Ein *Gittermonoid* ist ein Paar $S \subseteq M$, wobei M ein Gitter, d.h. ein freier endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul, und S ein endlich erzeugtes Untermonoid ist, welches M als Gitter erzeugt.

Bemerkung 7.1.8. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{Z})$ eine Matrix. Wird $\mathbb{Z}^n$ durch die Zeilen von A erzeugt, so ist $S_A \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gittermonoid.

Konstruktion 7.1.9. Es seien M ein Gitter und $M_\mathbb{Q} = M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ der zugehörige rationale Vektorraum. Das zu einem konvexen Kegel $\omega \subseteq M_\mathbb{Q}$ gehörige *Kegelmonoid* ist das Untermonoid

$$S_\omega \ := \ \omega \cap M \ \subseteq \ M.$$

Satz 7.1.10. *Es seien M ein Gitter und $\omega \subseteq M_\mathbb{Q}$ ein polyedrischer konvexer Kegel von voller Dimension. Dann ist S_ω ein endlich erzeugtes Gittermonoid.*

Lemma 7.1.11 (Gordon)**.** *Es seien M ein Gitter und $\omega \subseteq M_\mathbb{Q}$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann ist $S_\omega = \omega \cap M$ ein endlich erzeugtes Monoid.*

Beweis. Als polyedrischer konvexer Kegel ist ω von der Gestalt $\omega = \mathrm{Kegel}(u_1,\ldots,u_r)$ mit $u_1,\ldots,u_r \in M$. Weiter können wir jedes Element $u \in S_\omega$ schreiben als

$$u \ = \ \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i \ + \ \sum_{i=1}^r \beta_i u_i$$

mit nichtnegativen ganzen Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ und rationalen Zahlen $0 \leq \beta_i \leq 1$. Somit wird S_ω erzeugt durch die Menge

$$M \ \cap \ \left\{ \sum_{i=1}^r \beta_i u_i;\ 0 \leq \beta_i \leq 1 \right\}.$$

□

Lemma 7.1.12. *Es seien M ein Gitter und $\omega \subseteq M_{\mathbb{Q}}$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Kegel ω erzeugt $M_{\mathbb{Q}}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.*
(ii) *Der Kegel ω enthält eine Gitterbasis für M.*

Beweis. Die Implikation "(ii)⇒(i)" ist offensichtlich. Zum Beweis der Implikation "(i)⇒(ii)" schreiben wir $\omega = \mathrm{Kegel}(u_1, \ldots, u_m)$. Wir betrachten den ersten Gittervektor $u_0 \in \mathbb{Q}_{>0}(u_1 + \ldots + u_m)$. Dann gibt es eine Linearform v_0 mit $v_0(u_0) = 1$. Somit gilt

$$M \quad = \quad \mathbb{Z}u_0 \, \oplus \, \ker(v_0).$$

Wir wählen eine Gitterbasis $b_1, \ldots, b_{m-1}$ für $\ker(v_0)$. Jeder Basisvektor b_i ist von der Gestalt

$$b_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} u_j$$

mit $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$. Offenbar gilt $v_i := b_i + nu_0 \in \omega$ sobald $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ groß genug ist. Somit ist $\{u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ die gewünschte Gitterbasis. □

Beweis von Satz 7.1.10. Verwende Lemmas 7.1.11 und 7.1.12. □

Satz 7.1.13. *Es seien M ein Gitter und $\omega \subseteq M_{\mathbb{Q}}$ ein konvexer polyedrischer Kegel. Dann ist $\mathbb{K}[S_\omega]$ ein normaler Ring.*

Beweis. Es sei $\omega = \mathrm{POrt}(v_1, \ldots, v_r)$. Wir betrachten die Kegel $\omega_i := \mathrm{POrt}(v_i)$. Dann erhalten wir

$$S_\omega \quad = \quad \bigcap_{i=1}^{r} S_{\omega_i} \; \subseteq \; \mathbb{K}[M].$$

Um zu sehen, dass $\mathbb{K}[S_\omega]$ normal ist, genügt es also zu zeigen, dass jedes $\mathbb{K}[S_{\omega_i}]$ normal ist. Es gilt

$$S_{\omega_i} \; = \; \mathrm{POrt}(v_i) \, \cap \, M \; \cong \; \mathrm{POrt}(e_1) \, \cap \, \mathbb{Z}^m \; = \; \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \; + \; \mathbb{Z}(0, 1, \ldots, 1).$$

Somit ist $\mathbb{K}[S_{\omega_i}] \; \cong \; \mathbb{K}[z_1, \ldots, z_m]_{z_2 \cdots z_m}$ als Lokalisierung eines normalen Ringes normal. □

Satz 7.1.14. *Es seien M ein Gitter, $S \subseteq M$ ein Gittermonoid und $\omega \subseteq M_{\mathbb{Q}}$ der durch S erzeugte konvexe polyedrische Kegel. Dann ist der ganze Abschluss der Monoidalgebra $\mathbb{K}[S]$ in ihrem Quotientenkörper $Q(\mathbb{K}(S)) = Q(\mathbb{K}[M])$ gegeben durch*

$$\overline{\mathbb{K}[S]}^{\mathbb{K}(S)} \quad = \quad \mathbb{K}[S_\omega].$$

Beweis. Zur Inklusion "⊆". Es sei $f \in Q(\mathbb{K}[M])$ ganz über $\mathbb{K}[S]$. Dann ist f auch ganz über $\mathbb{K}[S_\omega]$. Nach Satz 7.1.13 ist $\mathbb{K}[S_\omega]$ ein normaler Ring. Somit gilt $f \in \mathbb{K}[S_\omega]$.

Zur Inklusion "⊇". Es genügt zu zeigen, dass jedes χ^u mit $u \in \omega \cap M$ ganz über $\mathbb{K}[S]$ ist. Sind $u_1, \ldots u_r$ Erzeugende für S, so können wir schreiben

$$u \quad = \quad \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \; \in \; \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Folglich liegt ein Vielfaches nu mit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ in S. Mit $(\chi^u)^n - \chi^{nu} = 0$ erhalten wir die gewünschte Ganzheitsgleichung. □

Folgerung 7.1.15. *Es seien M ein Gitter und $S \subseteq M$ ein Gittermonoid. Dann sind äquivalent*

(i) *Die Gittermonoidalgebra $\mathbb{K}[S]$ ist normal.*
(ii) *Es gilt $S = \mathrm{Kegel}(S) \cap M$.*

Folgerung 7.1.16. *Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ eine Matrix sodass $\mathbb{Z}^n$ durch die Zeilen von A erzeugt wird. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Die zugehörige Varietät X_A ist normal.*
(ii) *Es gilt $S_A = \mathrm{Kegel}(S_A) \cap \mathbb{Z}^n$.*

Beispiel 7.1.17. Die Neilsche Parabel ist nicht normal, während die affinen Quadriken in drei bzw. vier Variablen normal sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{liefert} \quad S_A = \{0, 2, 3, \ldots\} \subsetneq \mathrm{Kegel}(S_A) \cap \mathbb{Z}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{liefert} \quad S_A = \sum \mathbb{Z}_{\ge 0} A_{i*} = \mathrm{Kegel}(S_A) \cap \mathbb{Z}^2,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{liefert} \quad S_A = \sum \mathbb{Z}_{\ge 0} A_{i*} = \mathrm{Kegel}(S_A) \cap \mathbb{Z}^3.$$

Aufgaben zu Abschnitt 7.1.

Aufgabe 7.1.18. Zeige: Die Zuordnungen $M \mapsto \mathbb{K}[M]$ und $F \mapsto (\psi_F, F)$ definieren einen kovarianten Funktor von der Kategorie der abelschen Monoide in die Kategorie der graduierten Algebren.

7.2. **Eine kovariante Äquivalenz.**

Beispiel 7.2.1. Wir betrachten die affine torische Varietät $X = \mathbb{K}^2$ mit dem Torus $T = \mathbb{T}^2$, der Operation

$$\mathbb{T}^2 \times \mathbb{K}^2 \ \to \ \mathbb{K}^2, \qquad t{\cdot}z \ := \ (t_1 z_1, t_2 z_2)$$

und dem Basispunkt $x_0 = (1,1)$. Der Torus $\mathbb{T}^2$ wird über die Bahnabbildung offen nach $\mathbb{K}^2$ eingebettet:

$$\mu\colon \mathbb{T}^2 \ \to \ \mathbb{K}^2, \qquad t \ \mapsto \ t{\cdot}x_0 = (t_1, t_2).$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^2 & \mathbb{K}[T_1, T_2] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mu^*"'] & \mathbb{K}[\mathbb{Z}^2_{\ge 0}] \\ \mathbb{T}^2 \arrow[u, "\mu"] & \mathbb{K}[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1]} \arrow[r, equal] & \mathbb{K}[\mathbb{Z}^2] \end{tikzcd}$$

Aufgaben zu Abschnitt 7.2.

Aufgabe 7.2.2.

7.3. **Torische Singularitäten.**

Erinnerung 7.3.1. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m,k,\mathbb{Z})$ eine Matrix, deren Zeilen $a_1,\ldots,a_k$ das Gitter $\mathbb{Z}^k$ erzeugen und es sei $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m)$ die zugehörige affine torische Varietät. Dann haben wir $X_A \subseteq \mathbb{K}^m$ mit

$$I(X_A) \ = \ \langle T^\nu - T^\mu;\ \nu,\mu \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0},\ \nu - \mu \in \mathrm{Kern}(A^t)\rangle.$$

Weiter sind der Konvergenzkegel $\sigma(X_A)$, das Gewichtsmonoid $S(X_A)$ und der Gewichtskegel $\omega(X_A)$ gegeben durch

- $\sigma(X_A) \ = \ A^{-1}(\mathrm{Kegel}(e_1,\ldots,e_m))$,
- $S(X_A) \ = \ S_A \ = \ \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(a_1,\ldots,a_k)$,
- $\omega(X_A) \ = \ \mathrm{Kegel}(a_1,\ldots,a_k) \ = \ A^t(\mathrm{Kegel}(e_1,\ldots,e_m))$.

Dabei sind $\sigma(X_A)$ und $\omega(X_A)$ dual zueinander und es gilt $\mathcal{O}(X_A) = \mathbb{K}[S_A]$. Schließlich ist X_A genau dann normal, wenn $S_A = \omega(X_A) \cap \mathbb{Z}^k$ gilt.

Satz 7.3.2. *Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m,k,\mathbb{Z})$ eine Matrix, deren Zeilen $a_1,\ldots,a_k$ das Gitter $\mathbb{Z}^k$ erzeugen und es sei $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m)$ die zugehörige affine torische Varietät. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Es gilt $0 \in X_A$.*
(ii) *Der Gewichtskegel $\omega(X_A) \subseteq \mathbb{Q}^k$ ist spitz.*
(iii) *Der Konvergenzkegel $\sigma(X_A) \subseteq \mathbb{Q}^k$ ist volldimensional.*

Gilt eine dieser drei Aussagen, so liegt der Punkt $0 \in X_A$ im Abschluss einer jeden Bahn $\mathbb{T}^k \cdot x$ mit $x \in X_A$.

Beweis. Für die Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii) betrachten wir die Erzeuger des Verschwindungsideal $I(X_A)$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \notin X_A \quad &\iff \quad \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \cap \mathrm{Kern}(A^t) \neq \{0\} \\ &\iff \quad \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n = 0 \text{ mit einem } 0 \neq \mu \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \\ &\iff \quad \mathrm{Kegel}(a_1,\ldots,a_n) \text{ nicht spitz.} \end{aligned}$$

Zur Äquivalenz von (ii) und (iii). Mit $\omega := \omega(X_A)$ und $\sigma := \sigma(X_A)$ und den Untervektoräumen $U := \mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}(\omega) \leq \mathbb{Q}^k$ sowie $V := U^\perp \leq \mathbb{Q}^k$ gilt

$$\begin{aligned} \omega \text{ nicht volldimensional} \quad &\iff \quad \omega \subseteq U \neq \mathbb{Q}^k \\ &\iff \quad \sigma \supseteq V \neq \{0\} \\ &\iff \quad \sigma \text{ nicht spitz.} \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, es gelte $0 \in X_A$. Wir zeigen, dass dann $0 \in Y(x) := \overline{\mathbb{T}^k \cdot x}$ für jedes $x \in X$ gilt. Andernfalls finden wir ein

$$f \ = \ \sum a_u \chi^u \ \in \ I_{X_A}(Y(x)) \ \subseteq \ \mathcal{O}(X_A) \ = \ \mathbb{K}[S_A]$$

mit $f(0) \neq 0$. Die Menge $Y(x)$ ist invariant unter der $\mathbb{T}^k$-Operation. Somit ist das Ideal $I_{X_A}(Y(x))$ homogen und es folgt $\chi^u \in I_{X_A}(Y(x))$ für alle u mit $a_u \neq 0$. Für jedes u erhalten wir

$$\chi^u(0) \ = \ \chi^u(t \cdot 0) \ = \ \chi^u(t)\chi^u(0) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^k.$$

Folglich gilt entweder $u = 0$ oder $\chi^u(0) = 0$. Das impliziert $f = \alpha_0$; Widerspruch zu $f \in I_{X_A}(Y(x))$. □

Satz 7.3.3. *Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m,k,\mathbb{Z})$ eine Matrix, deren Zeilen $a_1,\ldots,a_k$ das Gitter $\mathbb{Z}^k$ erzeugen und es sei $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m)$ die zugehörige affine torische Varietät, wobei $0 \in X_A$ gelte. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Die Varietät X_A ist glatt.*
(ii) *Der Punkt $0 \in X_A$ ist glatt.*
(iii) *Es gilt $(X_A, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m) \cong (\mathbb{K}^k, \mathbb{T}^k, \mathbf{1}_m)$.*

Lemma 7.3.4. *Es seien $f_1,\ldots,f_r \in \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$, wobei $f_r = T_n - g$ mit einem $g \in \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_{n-1}]$ gelte. Dann hat man ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n] \arrow[rr, "\varphi\colon T_i \mapsto \begin{cases} T_i & 1\le i\le n-1, \\ g & i=n \end{cases}"] \arrow[d] & & \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_{n-1}] \arrow[d] \\
\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]/\langle f_1,\ldots,f_r\rangle \arrow[rr, "\cong"'] & & \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_{n-1}]/\langle \varphi(f_1),\ldots,\varphi(f_{r-1})\rangle
\end{tikzcd}$$

Mit den affinen Varietäten $X := V(f_1,\ldots,f_r) \subseteq \mathbb{K}^n$ und $Y := V(\varphi(f_1),\ldots,\varphi(f_{r-1})) \subseteq \mathbb{K}^{n-1}$ erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n & \mathbb{K}^{n-1} \arrow[l, "(z,g(z)) \leftarrow\!\shortmid z"'] \\
X \arrow[u] & Y \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Beweis. Man zeigt leicht, dass $\mathrm{Kern}(\varphi) = \langle f_r \rangle$ gilt. Die Behauptung ergibt sich dann mit dem Homomorphiesatz. □

Beweis von Satz 7.3.3. Die Implikation "(i)⇒(ii)" ist offensichtlich. Zum Nachweis der Implikation "(ii)⇒(i)" sei $x \in X_A$ gegeben. Nehmen wir an, x sei singulär. Dann ist auch jeder Punkt der Bahn $\mathbb{T}^k \cdot x$ singulär. Da X_A^{sing} abgeschlossen ist, muss auch jeder Punkt von $\overline{\mathbb{T}^k \cdot x}$ singulär sein. Insbesondere ist dann $0 \in X_A$ singulär. Widerspruch.

Zur Implikation "(ii)⇒(iii)". Es seien $f_i := T^{\nu_i} - T^{\mu_i}$ Erzeuger des Verschwindungsideals. Dabei dürfen wir annehmen, dass für jedes f_i die Monome T^{ν_i}, T^{μ_i} teilerfremd sind. Ist f_r von der Gestalt $T_n - T^{\mu_r}$, so haben wir nach Lemma 7.3.4 einen torischen Isomorphismus

$$X_{A'} \;\to\; X_A, \qquad z \;\mapsto\; (z, z^{\mu_r}),$$

wobei $X_{A'} \in \mathbb{K}^{n-1}$ durch $r-1$ Binome definiert ist. Durch wiederholtes Anwenden dieser Prozedur erreichen wir, dass keine f_i von der Gestalt $T_j - T^{\mu_j}$ mehr vorkommen. Für die Jacobimatrix der verbleibenden $f_1,\ldots,f_s$ erhalten wir dann $(\partial f_i/\partial T_j)(0) = 0$. Da 0 ein glatter Punkt von X_A ist, muss $s = 0$ gelten. □

Satz 7.3.5. *Es sei (X, T, x_0) eine normale affine torische Varietät mit voldimensionalem Konvergenzkegel $\sigma(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Die Varietät X ist glatt.*
(ii) *Der Kegel $\sigma(X)$ wird durch eine Gitterbasis von $\Lambda(T)$ erzeugt.*
(iii) *Der Kegel $\omega(X)$ wird durch eine Gitterbasis von $\mathbb{X}(T)$ erzeugt.*

Index

Mathematisches Institut, Universität Tübingen, Auf der Morgenstelle 10, 72076 Tübingen

Email address: hausen@mail.mathematik.uni-tuebingen.de